

# 欧拉弹性正则化的图像泊松去噪

张峥嵘<sup>1</sup>, 刘红毅<sup>1</sup>, 韦志辉<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学理学院, 江苏南京 210094; 2. 南京理工大学计算机科学与技术学院, 江苏南京 210094)

**摘 要:** 利用泊松噪声分布与图像灰度值相关这一特性, 结合图像的水平集曲线对图像灰度值的刻画能力, 在 Bayesian-MAP 框架下, 提出了欧拉弹性正则与泊松似然保真的图像泊松去噪变分正则化模型. 利用交替方向乘法, 将原问题转化为几个不同低阶子问题的求解. 对于子问题中出现的高阶非线性项, 利用滞后扩散不动点迭代进行线性化, 从而得到模型的快速迭代求解算法. 通过数值模拟实验, 证明了当图像受不同强度泊松噪声影响时, 所提出的泊松去噪方法都能够有效的抑制泊松噪声, 同时具有良好的结构保持性能.

**关键词:** 泊松去噪; 欧拉弹性; 水平集; 变分正则化

**中图分类号:** TP391

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2017)01-0181-11

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.01.025

## Image Poisson Denoising Based on Euler's Elastica Regularization

ZHANG Zheng-rong<sup>1</sup>, LIU Hong-yi<sup>1</sup>, WEI Zhi-hui<sup>2</sup>

(1. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;

2. School of Compute Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

**Abstract:** Poisson noise has strong relationship with the gray-values of image, meanwhile the gray-values of image can be represented by level line. In the framework of the Bayesian-MAP, a Poisson denoising variational regularization model is proposed. The Euler's elastica energy is used as a prior regularization term combined with negative-log Poisson likelihood. By using the alternating direction method of multipliers (ADMM), we transform the original high-order optimization problem into several low-order sub-problems. Then the lagged diffusivity fixed point iteration is applied to solve the high-order nonlinear term. For images with strong or weak Poisson noise, experiments show the validity and efficiency of the proposed method both in preserving geometric structure and suppressing noise.

**Key words:** Poisson denoising; Euler's elastica; level line; variational regularization

## 1 引言

在光量子计数成像系统中, 因量子结构引起光子流统计波动现象, 使图像产生小幅度变化, 形成细小颗粒, 从而得到的图像通常受到量子噪声污染. 量子噪声在统计上服从泊松分布, 因此也称为泊松噪声, 其特点是均值与方差相等. 因而量子噪声强度与信号强度相关, 图像灰度值越大, 受到的噪声干扰越大, 这与通常的加性高斯白噪声有很大区别. 因而, 针对加性高斯白噪声提出的图像去噪、恢复等模型不再适用, 研究图像的泊松去噪模型和算法具有十分重要的理论意义和应用前景.

针对图像泊松去噪问题, 经典的做法是通过方差

变换 (Variance Stabilization, VS) 将泊松分布转换为近似高斯分布. 然后再利用成熟的高斯去噪方法, 如维纳滤波、小波阈值收缩、全变差模型<sup>[1,2]</sup>、稀疏表示<sup>[3]</sup>、非局部均值 (Nonlocal Means, NLM)<sup>[4]</sup>、Block Match 3-D filtering (BM3D)<sup>[5]</sup> 等, 进行去噪处理. 最后经逆 VS 变换获得最终去噪后的图像<sup>[6-9]</sup>. 但这种方法只适用于光子数多, 噪声弱的情形, 在特定情形下, 如 X-Ray、Gamma 射线等医学成像设备中, 只能接收到很少量的光量子数, 此时 VS 变换不再有效.

目前, 在泊松去噪方法中, 使用较为广泛的是 R-L 算法<sup>[10]</sup>, 该方法通过最小化对数似然函数并逐步迭代来去除泊松噪声. 但由于缺少正则项约束, 因此经过多次迭代后, R-L 算法得到的恢复图像中噪声会被放大.

在 R-L 算法的基础上,产生了许多基于变分正则化的泊松去噪方法,这类方法在 Bayesian 最大后验概率(Maximum A Posteriori, MAP)框架下,针对 R-L 算法的保真项设计变分模型中的正则项.常用的有 TV (Total Variation) 正则项, Tikhonov 正则项, 高阶正则项等. Le 等<sup>[11]</sup>在 Bayesian-MAP 框架下采用了负对数泊松似然函数作为保真项,并选取 TV 作为正则项,推导出了相应的偏微分方程求解算法. Landi 等<sup>[12,13]</sup>给出了高斯和泊松噪声下的 TV 以及 Tikhonov 正则化去噪问题的预投影牛顿迭代求解方法. Chan<sup>[14]</sup>等针对此模型,提出了多层的高效数值解法. Jiang 等<sup>[15]</sup>联合一阶和二阶导数,有效抑制了 TV 模型的阶梯效应,保持了图像边缘. Li 等<sup>[16]</sup>在处理泊松高斯混合噪声时,在变分框架下对框架波的稀疏性进行加权,并利用 Bregman 迭代进行数值求解. Sun 等<sup>[17]</sup>在 Bayesian-MAP 框架下,提出了针对泊松噪声的稀疏性正则化图像恢复凸变分模型,以图像在冗余字典下表示系数的稀疏性作为非光滑的正则性约束,并利用分裂 Bregman 迭代对模型进行快速求解. Zhang 等<sup>[18]</sup>提出了非局部 TV 正则化的泊松图像去噪变分模型,得到了具有良好纹理保持效果的去噪图像.

尽管上述所提到的泊松去噪方法取得了较好的去噪效果,但这些方法在去噪时基本没有考虑到低光子数的情形. Elad 等<sup>[19]</sup>说明了当图像受泊松噪声影响小(图像峰值大于 4)的时候,通过 VS 变换可以达到较好的去噪效果,但当接受到的光子数较少,图像中含有很强的泊松噪声时,VS 变换将不再有效.针对低光子数下的泊松图像去噪问题, Salmon 等<sup>[20]</sup>提出了非局部 PCA (Principal Component Analysis) 的去噪方法,该方法利用 Bregman 距离以及指数分布特性,联合字典学习,建立代价函数,对聚类后的图像 patch 进行稀疏的 PCA 分解,并通过迭代的方式更新字典,从而得到了在强噪声污染下的高性能去噪方法.

在低光子数下,图像受到很强的泊松噪声污染,噪声图像呈现出对原图像随机采样的形式,图像中的大部分灰度值为 0,此时图像去噪问题接近于图像修补问题.由此,本文利用图像修补中的欧拉弹性,结合 Bayesian-MAP 框架下的泊松似然函数,提出了基于欧拉弹性正则化的图像泊松去噪正则化变分模型,并通过交替方向乘子法对模型进行快速迭代求解.数值实验说明当图像中噪声强度高或低时,所提出的去噪方法都能达到较好的去噪效果.

## 2 欧拉弹性

令  $u(x)$  为定义在区域  $\Omega \subseteq R$  上的图像.假设  $u(x)$  光滑,则对灰度值  $l$ , 图像的上水平集函数定义为<sup>[21]</sup>:

$$\Gamma_l = \{x \in \Omega | u(x) \geq l\} \quad (1)$$

水平线定义为图像上水平集的边界,从 Jordan 曲率来说,所有水平线的集合给出了图像  $u$  的完备表示.因此,图像可以由其零水平线完全重构.

零水平线上的曲率可以用单位法矢量的散度来计算:

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad (2)$$

这也被称为水平集基本方程.

基于变分水平集的图像处理方法可以直接处理各种图像中比较直观的几何特征变量,如曲率、法向量、梯度、切向量以及水平集等.图像建模中,最重要的是对图像的边、纹理等几何结构建立数学模型.从 Bayesian 观点来看,即需要对所有曲线构造概率分布.另外,从 Gibbs 能量场来看,则要求寻找一种合适的能量形式.1744 年, Euler 在模拟自由旋转细棒的稳态时提出了欧拉弹性(Euler's elastica, EL) 能量, Mumford<sup>[22]</sup>首次将这类光滑曲线作为早期的曲线模型引入到了计算机视觉,并用于图像分割.

曲线  $\Gamma$  的欧拉弹性能量定义为:

$$e(\Gamma) = \int_{\Gamma} (a + b\kappa^\beta) ds \quad (3)$$

其中  $a, b$  是正的常量权重,  $\kappa$  代表向量曲率,  $ds$  是弧长.  $\beta$  是曲率的幂次,可以取 1 或 2.

一旦建立了曲线模型,通过直接泛函化和水平集方法就可将其“提升”为图像模型<sup>[21]</sup>:

$$E[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} e[\Gamma_l] \omega(l) dl \quad (4)$$

其中  $\omega(l)$  可以设为 1, 以此反映人体感知灵敏度, 以下取  $\omega(l) = 1$ .

若以长度能量为曲线模型,则相应的图像模型为:

$$E[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{length}[\Gamma_l] dl \quad (5)$$

利用弧长公式,可推导出此模型对应的正好是 Rudin、Osher 和 Farenzi 提出的著名的 ROF 模型,也称 TV 模型,详细证明可参考文献[21]. 2002 年,在 TV 模型基础上, Chan、Kang 和 Shen 等以欧拉弹性能量为曲线模型,提出了适应于图像修补的欧拉弹性模型<sup>[23]</sup>:

$$E(u) = \int_{\Omega} (a + b\kappa^2) |\nabla u| dx \quad (6)$$

此弹性修复模型对应于最小化后验能量:

$$E(u|f, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \varphi(\kappa) |\nabla u| dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} |u - f|^2 dx \quad (7)$$

其中  $\varphi(s) = a + bs^2$ ,  $\nabla$  是梯度算子,  $u$  是原始图像,  $f$  是待修补图像,  $\mu$  是正则化参数. 这个模型已被广泛应用于图像修补,并取得了很好的修补效果.文献[24-25]将修补模型(7)应用到图像去噪中,研究了在椒盐噪声

( $t=1$ )和高斯噪声( $t=2$ )下的图像去噪问题,并利用推广拉格朗日乘子法,给出了模型的快速数值解法.

### 3 欧拉弹性正则化泊松去噪模型

#### 3.1 Bayesian-MAP 原理

假设理想图像为  $u$ , 观察到的噪声图像为  $f$ , 其中噪声服从泊松分布, 根据 Bayesian 公式:

$$P(u|f) = \frac{P(f|u)P(u)}{P(f)} \quad (8)$$

以及最大后验概率准则 (MAP), 原始无噪声图像  $u$  的 MAP 估计为:

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \max_u P(u|f) \\ &= \arg \max_u \frac{P(f|u)P(u)}{P(f)} \\ &= \arg \max_u P(f|u)P(u) \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $P(f|u)$  为极大似然 (Maximum Likelihood, ML) 估计中的似然函数,  $P(u)$  为图像先验的概率密度函数. 对式(9)中的最大后验取对数, 则最大化后验概率  $P(f|u)P(u)$  转化为如式(10)的最小化负对数问题:

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \max_u \{ \ln P(f|u) + \ln P(u) \} \\ &= \arg \min_u \{ -\ln P(f|u) - \ln P(u) \} \end{aligned} \quad (10)$$

似然函数  $P(f|u)$  由退化模型的噪声类型决定, 一般取为随机噪声的概率密度函数. 当退化图像的噪声服从泊松分布并假定像素之间相互独立时, 似然函数  $P(f|u)$  可写成:

$$p(f|u) = p_u(f) = \frac{e^{-u} u^f}{f!} \quad (11)$$

对式(11)两端取自然对数, 得到负对数泊松似然函数:

$$\ln P(f|u) = -u + f \ln u - \ln f! \quad (12)$$

下面针对泊松噪声的先验进行建模, 并推导对应的正则化变分模型.

#### 3.2 欧拉弹性正则化的泊松去噪模型

先验概率  $P(u)$  的建模依赖于对图像先验的认识, 常用图像模型为 Markov 随机场 (Markov Random Field, MRF), 此时  $P(u)$  可以用 Gibbs 概率密度函数表示为:

$$P(u) = \exp(-J(u)) \text{ 或 } \ln P(u) = -J(u) \quad (13)$$

其中  $J(u)$  为能量函数.

将式(13)和式(12)代入到式(10)中, 得到 Bayesian-MAP 准则下的图像泊松去噪正则化优化模型:

$$u^* = \arg \min_u \{ J(u) + \mu \int_{\Omega} (u - f \ln u) dx \} \quad (14)$$

在正则化理论中, 第一项  $J(u)$  也称为正则项,  $\mu > 0$  为正则化参数, 第二项称为保真项; 在泊松噪声情况下, 对应负对数泊松似然保真. 常用的正则项能量函数为长度能量, 即 TV 正则项, 此时得到泊松噪声对应的

TV 去噪模型. 但 TV 模型具有明显的阶梯效应, 为了减少这一效应, 需要寻找更高阶的模型.

泊松噪声分布与图像灰度值紧密相关, 图像中灰度值偏大的像素点被赋以强噪声, 而灰度值偏小的点则被加以较小的噪声. 针对泊松噪声分布的这一特性, 以图像中同一灰度值像素的集合为单元建立能量函数, 即对图像所有水平集曲线进行约束, 图像  $u$  的所有水平集曲线的欧拉弹性能量表示为:

$$J(u) = \int_{l=0}^L \int_{\Gamma_l} \varphi(\kappa) ds dl \quad (15)$$

利用弧长公式, 光滑图像  $u$  沿着任意水平集  $\Gamma_l$ , 有:

$$dl = |\nabla u| dt, \text{ length}(\Gamma_l) = \int_{\Gamma_l} ds \quad (16)$$

其中  $ds, dt$  分别表示水平集的弧长和其对偶梯度流 (彼此相互正交). 特别的,  $ds dt = dx$  是面积微元. 再令  $\varphi(s) = a + bs^2$ , 则得到:

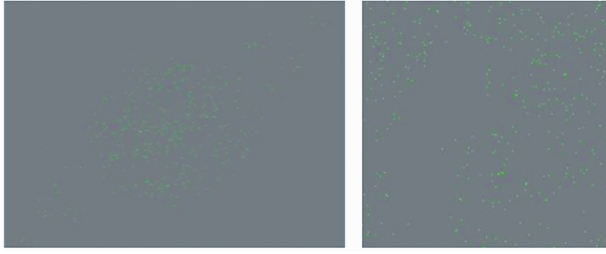
$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{l=0}^L \int_{\Gamma_l} \varphi(\kappa) ds dl \\ &= \int_{\Omega} \varphi(\kappa) |\nabla u| dt ds \\ &= \int_{\Omega} \varphi(\kappa) |\nabla u| dx \\ &= \int_{\Omega} (a + b\kappa^2) |\nabla u| dx \end{aligned} \quad (17)$$

进一步, 代入式(17)到式(14)中, 则得到对应于图像泊松噪声的弹性去噪模型:

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \min_{u \in BV(\Omega)} \int_{\Omega} (a + b\kappa^2) |\nabla u| + \mu \int_{\Omega} (u - f \ln u) \\ &= \arg \min_{u \in BV(\Omega)} \left[ a + b \left( \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)^2 \right] |\nabla u| + \mu \int_{\Omega} (u - f \ln u) \end{aligned} \quad (18)$$

此模型中, 第一项是欧拉弹性正则项, 第二项是泊松似然保真项,  $a$  和  $b$  为常参数,  $\mu$  是正则化参数, 平衡两项在去噪中的作用. 欧拉弹性中  $|\nabla u|$  为梯度项, 是 TV 模型的一部分, 通过对图像中水平线曲线变化长度的约束, 达到了保持图像边缘结构的效果; 而另一部分  $\left( \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)^2 |\nabla u|$  通过曲率与梯度的结合, 对图像的水平集曲率进行最小约束, 要求沿着水平线, 曲线的曲率、角度变化最小, 作用是保持曲率的连通性, 进一步提高了图像中几何结构的保持能力.

值得注意的是, 模型中的欧拉能量也可以从图像修补角度进行解释. 如前面所提到的, 当图像中泊松噪声强度很大时, 得到的含噪图像丢失了大部分信息 (如图 1 所示), 图像更接近于二值图像, 大部分数值为 0. 在这种情况下利用图像修补方法对图像信息进行相应的修补增强, 以得到更多的图像信息. 在图像修补领域,



(a) Saturn (b) Cameraman  
图1 受强泊松噪声污染的图像(peak=0.2)

众所周知的是基于欧拉弹性的图像修补模型,因此,在泊松去噪中引入欧拉弹性具有一定的物理背景意义.

#### 4 模型的数值解法

求解模型(18)的主要困难在于曲率项的高阶和非线性性,为解决此问题,首先,将原无约束优化问题(18)转化为有约束问题:

$$\min_{u, p, n, h} \int_{\Omega} (a + bh^2) |p| + \mu \int_{\Omega} (u - f \ln u) \quad (19)$$

s. t.  $p = \nabla u; p = |p|n; h = \nabla \cdot n$

其中  $p = (p_1, p_2)^T, n = (n_1, n_2)^T$ , 继而利用交替方向乘法 ADMM, 原问题可写成:

$$\begin{aligned} L(u, p, n, h; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \int_{\Omega} (a + bh^2) |p| + \mu \int_{\Omega} (u - f \ln u) \\ &+ \int_{\Omega} (p - |p|n) \cdot \lambda_1 + \frac{r_1}{2} \int_{\Omega} (p - |p|n)^2 \\ &+ \int_{\Omega} (p - \nabla u) \cdot \lambda_2 + \frac{r_2}{2} \int_{\Omega} (p - \nabla u)^2 \\ &+ \int_{\Omega} (h - \nabla \cdot n) \lambda_3 + \frac{r_3}{2} \int_{\Omega} (h - \nabla \cdot n)^2 \quad (20) \end{aligned}$$

解此多变量优化问题,需要通过交替迭代对变量  $u, p, n, h$  进行解耦,转化为针对单变量的多个子问题的求解,继而分别对四个变量  $u, p, n, h$  和乘子  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  进行迭代更新.

##### 4.1 变量解耦

给定初始值  $u^0, p^0, n^0, h^0$ , 假设已得到第  $k$  次迭代结果  $u^k, p^k, n^k, h^k$ :

(1) 固定  $u^k, n^k, h^k$ , 求解关于  $p$  的子问题 1:

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= \arg \min_p E_1(p^k) \\ &= \arg \min_p \int_{\Omega} (a + bh^2) |p^k| + \int_{\Omega} (p^k - |p^k|n^k) \cdot \lambda_1 \\ &+ \frac{r_1}{2} \int_{\Omega} (p^k - |p^k|n^k)^2 + \int_{\Omega} p^k \cdot \lambda_2 + \frac{r_2}{2} \int_{\Omega} (p^k - \nabla u^k)^2 \quad (21) \end{aligned}$$

(2) 固定  $u^k, n^k, p^k$ , 求解关于  $h$  的子问题 2:

$$h^{k+1} = \arg \min_h E_2(h^k)$$

$$\begin{aligned} &= \arg \min_h \int_{\Omega} b |p^k| (h^k)^2 + \int_{\Omega} \lambda_3 h^k \\ &+ \frac{r_3}{2} \int_{\Omega} (h^k - \nabla \cdot n^k)^2 \quad (22) \end{aligned}$$

(3) 固定  $u^k, h^k, p^k$ , 求解关于  $n$  的子问题 3:

$$\begin{aligned} n^{k+1} &= \arg \min_n E_3(n^k) \\ &= \arg \min_n - \int_{\Omega} |p^k| n^k \cdot \lambda_1 \\ &+ \frac{r_1}{2} \int_{\Omega} (p^k - |p^k|n^k)^2 \\ &- \int_{\Omega} \lambda_3 \nabla \cdot n^k + \frac{r_3}{2} \int_{\Omega} (h^k - \nabla \cdot n^k)^2 \quad (23) \end{aligned}$$

(4) 固定  $h^k, n^k, p^k$ , 求解关于  $u$  的子问题 4:

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \arg \min_u E_4(u^k) \\ &= \arg \min_u \mu \int_{\Omega} (u^k - f \ln u^k) \\ &- \int_{\Omega} \nabla u^k \cdot \lambda_2 + \frac{r_2}{2} \int_{\Omega} (p^k - \nabla u^k)^2 \quad (24) \end{aligned}$$

#### 4.2 子问题求解

##### 4.2.1 子问题 1, 2, 3 求解

对于  $p$  的子问题 1 可得到显式解:

$$p_{ij} = \frac{1}{r_1 + r_2} \max\{0, 1 - \frac{c}{|q_{ij}|}\} q_{ij} \quad (25)$$

其中  $c = a + bh^2 - n \cdot \lambda_1$ ,

$$q = r_1 |p^{k-1}| n + r_2 \nabla u - \lambda_1 - \lambda_2.$$

对于  $h$  子问题 2, 其解的形式为:

$$h = \frac{r_3 \operatorname{div}(n) - \lambda_3}{2b |p| + r_3} \quad (26)$$

其中  $\operatorname{div}$  为散度算子.

关于  $n$  的子问题(23)的 Euler 方程为:

$$(r_1 |p|^2 - r_3 \nabla \cdot \operatorname{div} n) n = r_1 p |p| + \lambda_1 |p| - r_3 \nabla h - \nabla \lambda_3 \quad (27)$$

此方程可化为线性方程组求解,从而可利用高斯消去、高斯-赛德尔等方法求解.

##### 4.2.2 子问题 4 求解

关于  $u$  的子问题(24)的 Euler 方程为:

$$\frac{\partial E_4(u)}{\partial u} = -(r_2 \Delta u - \operatorname{div} \lambda_2 - r_2 \operatorname{div} p) + \frac{\mu}{u} (u - f) = 0 \quad (28)$$

此问题关于  $u$  为非线性的,对于此类非线性问题求解,可以利用线性化技巧来求解,如滞后扩散不动点迭代、迭代阈值等方法.在此,我们将滞后扩散不动点迭代方法进行推广,用来求解泊松去噪问题.

记  $\tilde{\mu}(u) = \frac{\mu}{u}$ , 代入式(28)得到:

$$\frac{\partial E_4(u)}{\partial u} = -(r_2 \Delta u - \operatorname{div} \lambda_2 - r_2 \operatorname{div} p) + \tilde{\mu}(u - f) = 0 \quad (29)$$

引入线性扩散算子  $L(u)$ :

$$L(u)v = -(r_2 \Delta u - \operatorname{div} \lambda_2 - r_2 \operatorname{div} p) + \tilde{\mu} v \quad (30)$$

并代入式(29)中,得到:

$$L(u)u = \tilde{\mu}(u)f \quad (31)$$

由此,可得到不动点迭代格式:

$$L(u^m)u^{m+1} = \tilde{\mu}(u)f, \quad m=0,1,\dots \quad (32)$$

其中  $m$  表示迭代次数. 在迭代过程中,记能量泛函  $E_4(u)$  在  $u^m$  处的下降方向为  $d^m$ ,则

$$u^{m+1} = u^m + d^m \quad (33)$$

将  $u^{m+1}$  代入式(32),得到如下的线性扩散方程:

$$L(u^m)d^m = -(L(u^m)u^m - \tilde{\mu}(u^m))f = -\frac{\partial E_4(u)}{\partial u^m} \quad (34)$$

方程(34)是线性方程,可以用高斯-赛德尔等方法求解得到  $d^m$ ,进而得到  $u^{m+1}$ .

综上,最优化正则化模型(18)的 ADMM 算法可归纳为算法 1.

#### 算法 1 模型的 ADMM 快速算法

输入:噪声图像  $f$

初始化:  $u^0 = f, p^0 = \nabla u, n^0 = \frac{p}{|p|}, h^0 = \nabla \cdot n, \lambda_1^0 = 0, \lambda_2^0 = 0, \lambda_3^0 = 0$

For  $k=0,1,2,\dots$

Step1 求解式(25),求解得到  $p^{k+1}$ ;

Step2 求解式(26),求解得到  $h^{k+1}$ ;

Step3 利用高斯-赛德尔方法求解式(27),得到  $n^{k+1}$ ;

Step4 利用高斯-赛德尔方法求解线性方程组(34),得到  $d^m$ ,进而利用式(33)计算  $u^{m+1}$ ,其迭代收敛的值记为  $u^{k+1}$ ;

Step5 更新参数:

$$\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + r_1(p^{k+1} - |p^{k+1}|n^{k+1})$$

$$\lambda_2^{k+1} = \lambda_2^k + r_2(p^{k+1} - \nabla u^{k+1})$$

$$\lambda_3^{k+1} = \lambda_3^k + r_3(h^{k+1} - \operatorname{div}(n^{k+1}))$$

Step6 若  $\|u^{k+1} - u^k\| < \varepsilon$ ,迭代终止,得到去噪后图像  $u^* = u^{k+1}$ ;否则,  $k = k+1$ ,转到 Step 1.

End

输出:去噪图像  $u^*$

## 5 实验结果与分析

本节中,为了验证算法的有效性,我们进行了两组实验,仿真的自然图像泊松去噪实验和临床 PET 图像泊松去噪实验.

为了证明所提出方法的有效性,我们采用峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似性指标 (SSIM)<sup>[26]</sup> 来评价算法的去噪结果. PSNR 越大,SSIM 越接近于 1,算法的去噪效果越好.其定义分别如下:

$$\text{PSNR} = 10 \lg \frac{\max(u)^2}{\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [u(i,j) - f(i,j)]^2} \quad (35)$$

$$\text{SSIM} = \frac{(2\mu_f \mu_u + c_1)(2\sigma_{fu} + c_2)}{(\mu_f^2 + \mu_u^2 + c_1)(\sigma_f^2 + \sigma_u^2 + c_2)} \quad (36)$$

其中  $f$  是去噪后图像,  $u$  是原始图像,  $M, N$  是图像大小,  $\mu_f, \mu_u$  为图像  $f, u$  的均值,对应方差为  $\sigma_f, \sigma_u, \sigma_{fu}$  为图像  $f$  和  $u$  的协方差.

实验中为了简洁,记我们所提出的图像泊松噪声的欧拉弹性去噪模型为 EL. 所选取的对比算法有经典的 TV 正则化泊松去噪方法 (PTV)<sup>[12]</sup>,非局部 TV 正则化泊松去噪方法 (PNLTV)<sup>[18]</sup>,以及非局部 PCA 的泊松去噪方法 (NLPCA)<sup>[20]</sup>. 所比较的这几种方法都是针对泊松噪声先验直接建模,不需要进行 VS 变换,其中 PTV 以及 PNLTV 方法的提出没有考虑噪声强度问题,而 NLPCA 以及我们的方法 (EL) 重点针对高噪声强度的情况.

首先,我们给出模型参数的设置. 参数  $\lambda_i, r_i (i=1, 2, 3)$  是在算法迭代过程中引入的,对算法的迭代速度会有一定影响,但对去噪结果的影响甚微,实验中固定这些参数,均取值为 1. 正则化参数  $\mu$  的取值根据参考文献中的经验,一般取值比较小,实验中我们固定  $\mu = 0.001$ .

下面,主要分析欧拉弹性参数  $a$  和  $b$  的变化对去噪结果的影响.  $a$  和  $b$  的比值决定了梯度和曲率在去噪中的作用,实验中,以图像峰值为 0.2 时的 Saturn 图像为例. 固定  $a = 1, b$  分别取值为 0.2、1、2、10、20、50、100. 图 2 显示了 PSNR 随参数  $a$  和  $b$  变化的曲线图. 当  $b$  值变大,曲率项作用增大,图像趋于平滑,去噪效果增强,PSNR 增大. 当其比值大于 50 时,曲线趋于平坦. 由此可以看到,本文所提出的 EL 方法对于参数  $a$  和  $b$  的变化具有一定的鲁棒性. 在以下实验中,为了比较的公平性,我们固定  $b$  和  $a$  比值为 10:1.

### 实验一 自然图像泊松去噪实验

在此实验中,针对不同自然图像,分别加入不同强度的泊松噪声. 图 3 中图像为原始自然测试图像,其中 Saturn 图像大小为  $328 \times 438$ , Flag 图像大小为  $480 \times 640$ , Woman 图像、Swoosh 图像和 Cameraman (Cam) 图像大小为  $256 \times 256$ . 泊松噪声添加的方式如下:先将测试图像的最大亮度规范化为 1,然后再将最大亮度调整到某一固定值,生成相应的受泊松噪声污染的图像,称此固定值为图像峰值 (peak). 图像峰值数值越大,泊松噪声的强度越低. 实验中图像峰值取值为 0.2、0.5、1、2、4、5、15. 虽然本文主要考虑的是低噪声强度情况下的去噪问题,但对较高图像峰值 (5 和 15) 的图像去噪,可以说明方法的鲁棒性和广泛的适用性.

表 1 和表 2 给出了不同图像在不同噪声强度下的峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似性指标 (SSIM) 的比较,从表中可看到,针对不同强度的噪声和不同图

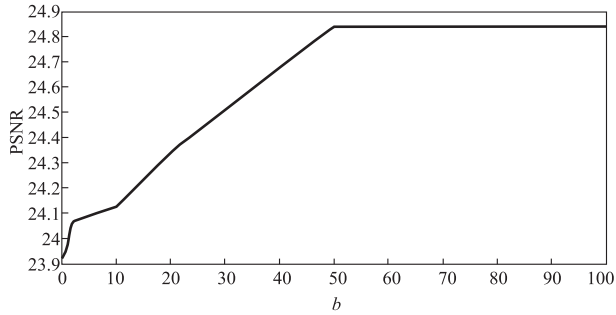


图2 PSNR随a和b比值的变化曲线

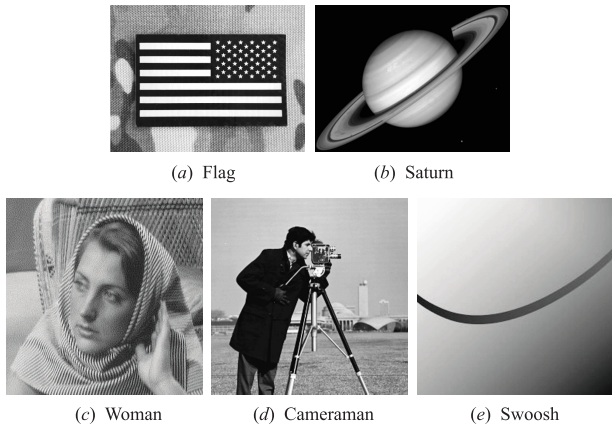


图3 测试图像

像,四种方法的去噪能力各有千秋.在图像峰值较低时,PTV和PNLTV方法的对应的PSNR和SSIM数值都较低,去噪效果不好.分析其原因,在低光子数情况下,图像中的边缘、纹理等几何结构信息几乎全部丢失,因此PTV模型中保边缘的TV正则项,以及PNLTV模型中的保纹理特性的非局部TV项都失效.但另一方面,随着图像峰值的增大,图像中结构信息增多,PTV和PNLTV方法的去噪性能逐步提高.例如当图像峰值为15时,PNLTV方法针对纹理丰富的Flag图像,同时达到了去除噪声和保持纹理的效果,具有较高的峰值信噪比和结构相似性指标,甚至高于EL方法的.而NLPCA方法通过对图像的非局部邻域patch进行聚类以及主成分的提取,有效的保持了图像中的纹理结构,对于含有丰富纹理的图像(Flag),NLPCA方法的PSNR和SSIM指标较高,但随着图像峰值的提高,此方法的评价指标会逐渐低于EL和PNLTV方法的.我们所提出的EL方法由于欧拉弹性项的加入,沿着图像水平线进行修补去噪,当图像的峰值比较大时,图像中的水平线信息增强,因此表现出较好的去噪性能,具有较高的评价指标,特别是对于Saturn和Cameraman这类具有更多边结边结构的图像,能够达到较高的峰值信噪比和结构相似性指标.

表1 去噪图像 PSNR 比较

Peak	方法	测试图像				
		Saturn	Flag	Woman	Cam	Swoosh
0.2	PTV	/	/	/	/	/
	PNLTV	/	/	/	/	/
	NLPCA	<b>24.34</b>	<b>17.33</b>	<b>17.47</b>	<b>17.75</b>	<b>20.58</b>
	EL	24.12	15.70	17.36	17.34	19.48
0.5	PTV	/	/	/	/	/
	PNLTV	/	/	/	/	/
	NLPCA	<b>26.69</b>	<b>19.13</b>	<b>18.19</b>	<b>19.45</b>	<b>24.40</b>
	EL	25.14	15.74	16.32	18.38	22.80
1	PTV	/	/	/	/	/
	PNLTV	/	/	/	/	/
	NLPCA	<b>28.41</b>	<b>19.22</b>	<b>18.72</b>	<b>20.02</b>	<b>27.28</b>
	EL	26.67	17.52	18.27	19.24	24.27
2	PTV	8.09	3.05	6.68	6.80	7.57
	PNLTV	14.23	10.19	10.26	10.41	10.68
	NLPCA	27.70	<b>18.84</b>	18.72	19.64	<b>25.55</b>
	EL	<b>27.95</b>	18.59	<b>19.23</b>	<b>20.16</b>	25.54
4	PTV	13.32	11.44	10.981	11.06	11.30
	PNLTV	20.36	16.02	15.73	17.01	17.69
	NLPCA	28.76	<b>21.07</b>	19.32	20.78	<b>30.18</b>
	EL	<b>29.33</b>	19.64	<b>19.73</b>	<b>21.01</b>	27.17
5	PTV	14.43	11.87	12.31	12.46	12.47
	PNLTV	22.25	17.85	17.61	18.69	20.08
	NLPCA	29.50	<b>21.73</b>	19.41	20.81	<b>31.84</b>
	EL	<b>29.57</b>	20.00	<b>19.80</b>	<b>21.30</b>	27.38
15	PTV	20.26	17.86	18.23	18.41	17.49
	PNLTV	29.51	22.14	20.10	<b>23.99</b>	32.22
	NLPCA	31.01	21.98	19.76	21.03	<b>33.98</b>
	EL	<b>31.85</b>	<b>22.16</b>	<b>20.73</b>	23.03	29.46

表2 去噪图像 SSIM 比较

Peak	方法	测试图像				
		Saturn	Flag	Woman	Cam	Swoosh
0.2	PTV	/	/	/	/	/
	PNLTV	/	/	/	/	/
	NLPCA	<b>0.91</b>	<b>0.65</b>	<b>0.58</b>	0.73	0.86
	EL	0.91	0.53	0.55	0.72	<b>0.90</b>
0.5	PTV	/	/	/	/	/
	PNLTV	/	/	/	/	/
	NLPCA	<b>0.94</b>	0.58	<b>0.59</b>	<b>0.78</b>	0.93
	EL	0.92	0.56	0.57	0.73	<b>0.94</b>

续表 2

1	PTV	/	/	/	/	/
	PNLTV	/	/	/	/	/
	NLPCA	<b>0.95</b>	<b>0.71</b>	0.61	<b>0.80</b>	0.81
	EL	0.94	0.62	<b>0.61</b>	0.75	<b>0.94</b>
2	PTV	0.03	0.14	0.08	0.08	0.08
	PNLTV	0.62	0.23	0.22	0.25	0.13
	NLPCA	0.95	<b>0.71</b>	0.61	<b>0.79</b>	<b>0.96</b>
	EL	<b>0.95</b>	0.65	<b>0.64</b>	0.78	0.95
4	PTV	0.13	0.31	0.23	0.21	0.16
	PNLTV	0.75	0.47	0.45	0.50	0.41
	NLPCA	0.95	<b>0.78</b>	0.63	0.82	<b>0.98</b>
	EL	<b>0.96</b>	0.70	<b>0.65</b>	<b>0.79</b>	0.95
5	PTV	0.17	0.34	0.29	0.26	0.20
	PNLTV	0.80	0.56	0.55	0.58	0.55
	NLPCA	0.95	<b>0.82</b>	0.63	<b>0.82</b>	<b>0.99</b>
	EL	<b>0.96</b>	0.72	<b>0.66</b>	0.80	0.96
15	PTV	0.62	0.64	0.62	0.57	0.42
	PNLTV	0.95	0.77	0.67	<b>0.89</b>	0.96
	NLPCA	0.97	<b>0.83</b>	0.65	0.83	<b>0.99</b>
	EL	<b>0.97</b>	0.81	<b>0.73</b>	0.83	0.97

图 4 比较了不同图像峰值下 Saturn 图像的去噪结果. 第一行到四行, 图像峰值分别为 0.2、2、5 和 15. Saturn 图像的特点是主要包含平滑和边缘部分, 纹理较少. 从视觉效果而言, 针对不同强度的泊松噪声, PTV 去噪能力相对最弱, 当图像中的泊松噪声强度较大

时(图像峰值等于 0.2、2、5 时), 噪声几乎没有被去除, 同时图像的结构信息也未能恢复. PNLTV 方法在小图像峰值的情况下也几乎失效, 但不同的是, 当图像峰值较大时, 能够达到比较好的去噪效果, 恢复图像中纹理结构保持良好. NLPCA 方法的去噪能力最强, 不足的是边缘等细节信息丢失较多, 去噪后图像的边缘不清楚, 图像整体过于光滑(图 4(c)). 而此时 EL 方法很好的修复了图像中的边、线结构, 去噪图像的边缘等细节信息清晰可见, 同时噪声也得到了一定的抑制(图 4(e)). 随着噪声强度的减弱, 我们方法会残留一部分噪声, 但去噪图像中的边缘信息却得到了很好的保持和恢复.

图 5 和图 6 中, 针对含有丰富纹理和边缘信息的 Flag 图像, 四种方法得到的去噪结果和图 4 基本一致. 从局部放大图像可看到, 当图像峰值为 2 时, PNLTV 方法的去噪结果图像残留了过多的噪声(图 5(g)). 图 5(h)的 NLPCA 方法虽然去除了一定噪声, 当 Flag 图像中的边缘曲线被扭曲, 五角星模糊不清. 图 5(i)的 EL 方法较好的恢复了图像中的结构信息, 五角星轮廓可见, 同时也具有了一定的去噪性能. 同样的, 当图像峰值增大到 15 时, NLPCA 方法得到的图像过于模糊, Flag 图像的纹理方向被改变(图 6(h)), 五角星等边线结构丢失. 而此时, PTV, PNLTV 以及 EL 方法得到的图像结构信息保持良好. 当图像峰值较高时, 噪声图像已经具有很好的结构信息, 因而此时, 基于非局部的去噪方法 PNLTV 表现出了很好的去噪以及结构保持性能. EL 方法具有很好的水平线修补性能, 在保持结构方面也达到了较好的效果, 尤其对于图像中边角结构, Flag 图像中五角星清晰可见(图 6(i)).

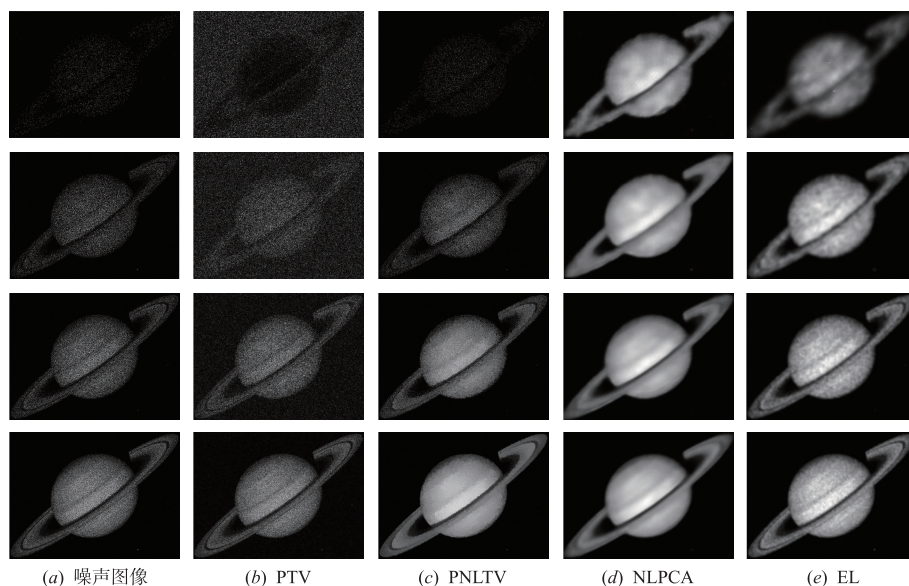


图 4 不同噪声强度下 Saturn 图像去噪结果比较

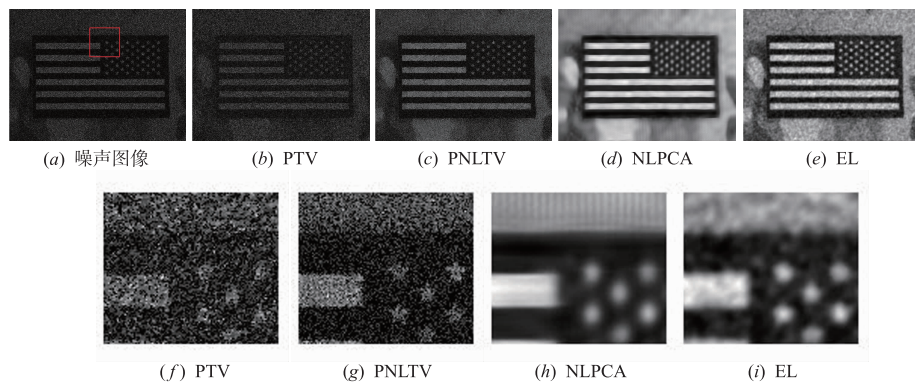


图5 图像峰值为2的Flag图像去噪图像及局部放大图比较

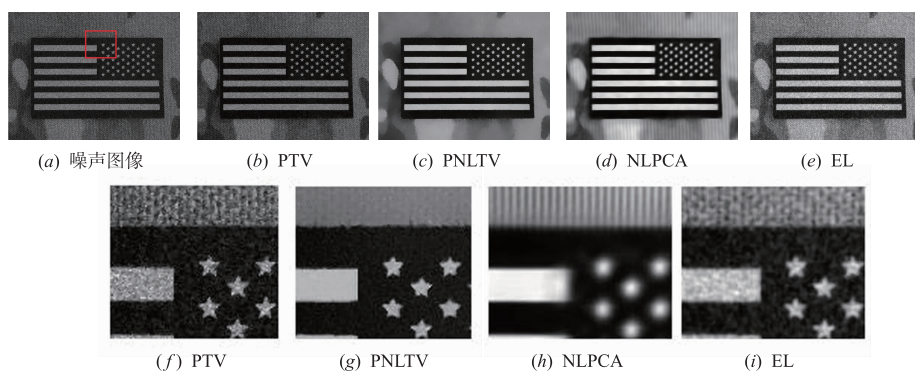


图6 图像峰值为15的Flag图像去噪图像及局部放大图比较

针对纹理、边缘等几何结构多的图像,如 Woman 图像、Cameraman 图像,其去噪结果如图 7 和图 8 所示. 其中图 7 的第一行和第二行图像峰值分别为 1 和 5. 整体而言,当噪声强度大或小时,我们所提出的 EL 方法具有比较高的质量评价指标,同时可以达到比较理想的去噪效

果,恢复图像中去除了大部分噪声,同时图像中的边、线等几何结构信息得到很好的保持. 而 NLPCA 方法得到的去噪图像过于光滑,且随着噪声越来越弱,NLPCA 的去噪能力变弱,PSNR 和 SSIM 相应降低,恢复图像变得更加模糊,去噪过程中丢失了图像的部分几何结构.

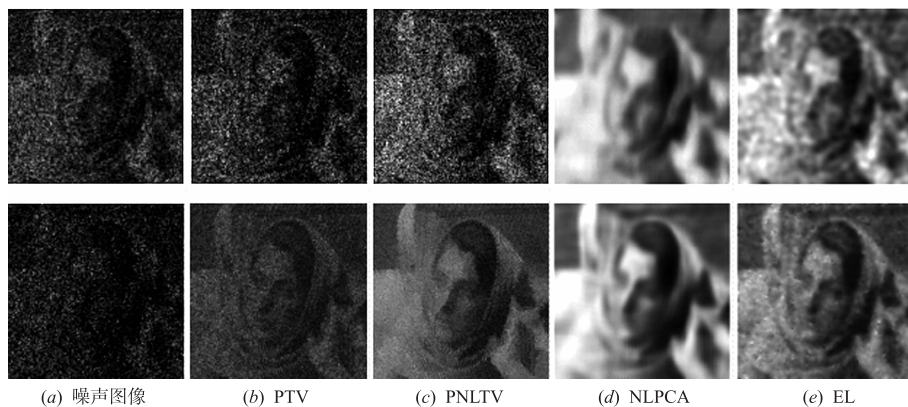


图7 图像峰值等于1和5时Woman图像去噪结果比较

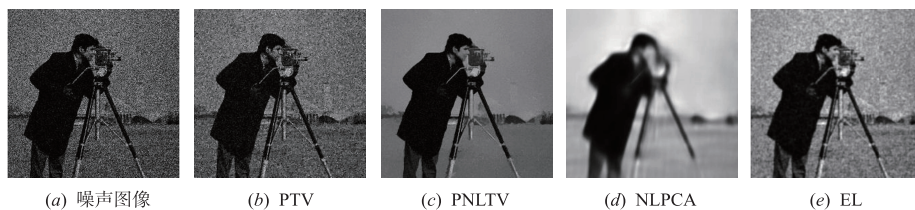


图8 图像峰值等于15时Cameraman图像去噪结果比较

图 9 给出了去噪前后 Saturn 图像(图像峰值等于 2) 水平线的比较,可以看到,去噪前,图像的水平线大都是断开的,而去噪之后,水平线更加光滑.另外,在去噪图像中,PNLTV 以及 EL 方法的保持结构性能较好,因此其对应的水平线比其它两种方法的更为清楚,连续,从而说明了所提出方法对于图像中线条结构的强保持能力.

最后,我们通过 CPU 时间来比较几种方法的时间复杂度,电脑系统 CPU 是 2.5GHz,8G 内存,运行环境为 Matlab 7.11.0 R2010b.表 3 统计了不同图像在不同噪声强度下的 CPU 平均运行时间.本文所提出的 EL 方法运行时间最短,其次是 PTV 方法,然后是 PNLTV 方法,运行时间最长的是 NLPCA 方法.由于 EL 方法采用了高效的数值解法,迭代快速衰减,运行时间短,运行效率高,平均运行时间只需要 1s 左右.而 NLPCA 方法需要对图像 patch 进行聚类、PCA 分解,所以运行时间最长.因此,从去噪的运行效率上讲,我们的方法具有比较强的优势.

表 3 不同大小图像泊松去噪运行时间比较(单位:s)

方法	Saturn	Flag	Woman	Cameraman	Swoosh
PTV	1.33	2.57	0.48	0.54	0.34
PNLTV	2.43	6.36	1.37	1.25	1.23
NLPCA	166.16	270.71	41.15	39.34	36.27
EL	<b>1.13</b>	<b>2.33</b>	<b>0.45</b>	<b>0.29</b>	<b>0.28</b>

### 实验二 临床 PET 图像泊松去噪实验

本节实验中,我们对两幅临床 PET 图像进行泊松去噪实验.经过 PTV、PNLTV、NLPCA 以及 EL 方法去噪后的结果如图 10、图 11 所示.相比较而言,PET 图像中所含的泊松噪声强度不大,因此,同仿真实验结果类似.此时,NLPCA 和 PNLTV 都达到了较好的去噪效果,但 NLPCA 在去噪同时抹去了图像的细节信息,致使图像模糊. PNLTV 的结果也过于光滑,如 Breast 图像中的纹理信息有所丢失.而本文所提出的 EL 方法,能够有效去除临床 PET 图像的泊松噪声,同时较好的保持了图像中的边缘和纹理结构,有利于医生的后续诊治,分析和处理.

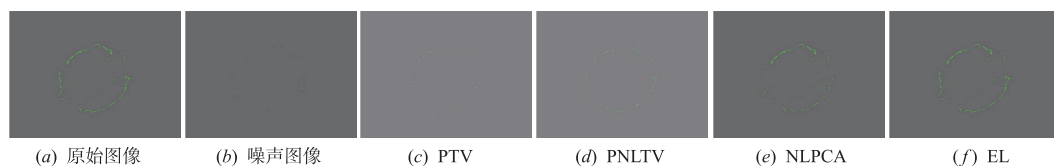


图9 图像峰值为2时Saturn图像水平线比较

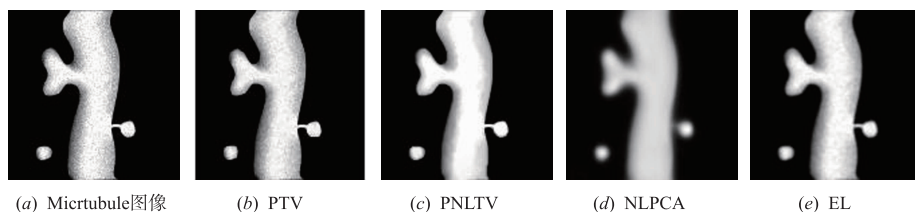


图10 Mircrtubule图像去噪结果比较

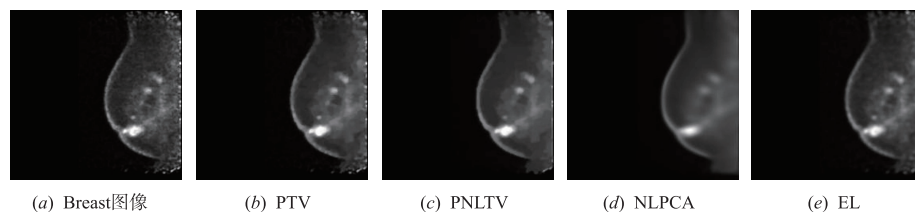


图11 Breast图像去噪结果比较

## 6 结论

本文在分析泊松噪声分布特点的基础上,提出了图像泊松去噪的欧拉方法.结合图像水平集描述图像几何结构的物理特性,通过引入欧拉曲率正则项,建立了欧拉弹性正则化的图像泊松去噪模型,并利用交替方向乘子法对模型进行化简,化为几个子问题进行快

速高效求解.针对不同的噪声强度进行了数值模拟实验,实验表明,所提出的新方法在去除泊松噪声同时具有良好的图像结构保持性能,同时模型算法也具有较高的执行效率.另一方面,本文所提出方法的效果和效率与临床医学的要求之间,还存在一定的差距,因此,在后续的研究工作中,我们会进一步改进模型以及算法,探讨不同算法的实现方式对实验结果的影响,从而

提出更适合于临床应用的高效泊松去噪方法.

#### 参考文献

- [1] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D*, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [2] 刘鹏飞, 肖亮, 黄丽丽. 图像方向纹理保持的方向全变差正则化去噪模型及其主优化算法[J]. *电子学报*, 2014, 42(11): 2205-2212.  
LIU Pengfei, XIAO Liang, HUANG Lili. Directional texture preserving total variation regularization based image denoising and majorization minimization algorithm [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2014, 42(11): 2205-2212. (in Chinese)
- [3] 蔡泽民, 赖剑煌. 一种基于超完备字典学习的图像去噪方法[J]. *电子学报*, 2009, 37(2): 347-350.  
CAI Zemin, LAI Jianhuang. An over-complete learned dictionary-based image de-noising method [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(2): 347-350. (in Chinese)
- [4] BUADES A, COLL B, MOREL J M. A review of image denoising algorithms, with a new one [J]. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2005, 4(2): 490-530.
- [5] DABOV K, FOI A, KATKOVNIK V, EGIAZARIAN K. Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(8): 2080-2095.
- [6] ANSCOMBE F J. The transformation of Poisson, binomial and negative-binomial data [J]. *Biometrika*, 1948, 35(3): 246-254.
- [7] FRYZLEWICZ P, NASON G P. A Haar-Fisz algorithm for poisson intensity estimation [J]. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 2004, 13(3): 621-638.
- [8] ZHANG B, FADILI M, STARCK J L. Wavelets, ridgelets and curvelets for Poisson noise removal [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(7): 1093-1108.
- [9] STARCK J L, MURTAGH F. *Astronomical Image and Data Analysis* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006: 29-70.
- [10] DEY N, BLANC L. Richardson-Lucy algorithm with total variation regularization for 3D confocal microscope deconvolution [J]. *Microscopy Research and Technique*, 2006, 69(4): 260-266.
- [11] LE T, CHARTRAND R, ASAKI T J. A variational approach to reconstructing images corrupted by poisson noise [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2001, 27(3): 257-263.
- [12] LANDI G, PICCOLOMINI E L. NPTool: a Matlab software for nonnegative image restoration with Newton projection methods [J]. *Numerical Algorithms*, 2013, 62(3): 487-504.
- [13] LANDI G, PICCOLOMINI E L. An efficient method for nonnegatively constrained Total Variation-based denoising of medical images corrupted by Poisson noise [J]. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 2012, 36(1): 38-46.
- [14] CHAN R, CHEN K. Multilevel algorithm for a Poisson noise removal model with total-variation regularization [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2007, 84(8): 1167-1181.
- [15] JIANG L, HUANG J, LIU J, LV X G. A combined first-order and second-order variation approach for multiplicative noise removal [J]. *The ANZIAM Journal*, 2014, 56(02): 116-137.
- [16] LI J, SHEN Z W, YIN R J, ZHANG X Q. A reweighted l2 method for image restoration with Poisson and mixed Poisson-Gaussian noise [J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2015, 9(3): 875-894.
- [17] 孙玉宝, 韦志辉, 吴敏, 等. 稀疏型正则化的图像泊松去噪算法[J]. *电子学报*, 2011, 29(2): 285-290.  
SUN Yubao, WEI Zhihui, WU Min, et al. Image poisson denoising using sparse representations [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(2): 285-290. (in Chinese)
- [18] 张峥嵘, 黄丽丽, 费选, 韦志辉. 非局部 TV 正则化的图像泊松去噪模型与算法[J]. *系统仿真学报*, 2014, 26(9): 2110-2115.  
ZHANG Zhengrong, HUANG Lili, FEI Xuan, WEI Zhihui. Image poisson denoising model and algorithm based on nonlocal TV regularization [J]. *Journal of System Simulation*, 2014, 26(9): 2110-2115. (in Chinese)
- [19] GIRYAS R, ELAD M. Sparsity based poisson denoising [A]. *IEEE 27th Convention of Electrical & Electronics Engineers in Israel* [C]. Eilat, Israel: IEEE Press, 2012. 1-5.
- [20] SALMON J, HARMANY Z, DELEDALLE C A, WILLETT R. Poisson noise reduction with non-local PCA [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2014, 48(2): 279-294.
- [21] CHAN T F, SHEN J H [著]. 陈文斌, 程晋 [译]. 图像处理与分析: 变分, PDE, 小波及随机方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [22] MUMFORD D. *Elastica and computer vision* [A]. *Algebraic Geometry and Its Applications* [M]. New York: Springer-Verlag, 1994. 491-506.
- [23] CHAN T F, KANG S H, SHEN J. Euler's elastica and curvature based inpaintings [J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2002, 63(2): 564-592.
- [24] TAI X C, HAHN J, CHUNG G J. A fast algorithm for Euler's elastica model using augmented Lagrangian method [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011, 4(1): 313

-344.

- [25] DUAN Y, WANG Y, HAHN J. A fast augmented Lagrangian method for Euler's elastica models [A]. Scale Space and Variational Methods in Computer Vision [C]. Berlin Heidelberg: Springer, 2012; 144 - 156.

- [26] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH H R, SIMONCELLI E P. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600 - 612.

### 作者简介



张峥嵘 女, 1977 年 10 月出生, 江苏淮安人. 2015 年获南京理工大学计算机科学与工程学院工学博士学位. 主要研究方向为图像去噪与恢复, 变分法图像处理等.  
E-mail: zhengrongzhang6@hotmail.com



刘红毅(通信作者) 女, 1974 年 3 月出生, 陕西西安人. 2012 年获南京理工大学计算机科学与工程学院工学博士学位. 南京理工大学理学院副教授, 主要研究方向为图像建模、图像去噪与恢复, 遥感图像处理等.  
E-mail: hylu@mail.njust.edu.cn



韦志辉 男, 1963 年 11 月出生, 江苏淮安人. 南京理工大学计算机科学与工程学院教授、博士生导师. 主要研究领域为图像建模理论与分析、计算机视觉、遥感图像处理、稀疏表示与压缩感知.  
E-mail: gswei@mail.njust.edu.cn