

## 一种解析的基于旋转矩阵估计的 波达方向估计方法

徐先峰<sup>1</sup>, 段晨东<sup>1</sup>, 刘来君<sup>2</sup>, 杨小军<sup>3</sup>

(1. 长安大学电子与控制工程学院, 陕西西安 710064; 2. 长安大学公路学院, 陕西西安 710064;  
3. 长安大学信息工程学院, 陕西西安 710064)

**摘 要:** 本文提出了一种解析的基于旋转矩阵估计的高分辨波达方向估计算法. 为了充分利用空时信息以提高算法的估计性能, 利用传感器阵列接收数据相关矩阵构建既包含旋转矩阵信息又具有可对角化结构的目标矩阵组. 通过一系列矩阵变换, 将复数域普通目标矩阵组转化为实数域对称目标矩阵组, 以利用 ACDC 算法实现目标矩阵组的联合对角化并求得对角矩阵, 继而求取旋转矩阵并挖掘波达角度信息, 实现了波达方向估计. 仿真结果表明, 与其他现存的经典算法相比, 所提算法具有更强的分辨能力及更准确的估计性能.

**关键词:** 波达方向估计; 旋转矩阵估计算法; 联合对角化; ACDC 算法

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)04-1012-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.04.033

## An Analytical Direction-of-Arrival Algorithm Based on the Estimation of Rotation Matrix

XU Xian-feng<sup>1</sup>, DUAN Chen-dong<sup>1</sup>, LIU Lai-jun<sup>2</sup>, YANG Xiao-jun<sup>3</sup>

(1. School of Electronic & Control Engineering, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China;  
2. School of Highway, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China;  
3. School of Information Engineering, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China)

**Abstract:** An analytical high-resolution direction-of-arrival (DOA) algorithm based on the estimation of rotation matrix (ERM) is proposed. In order to sufficiently utilize the concerning spatial temporal domain information to improve the performance of the algorithm, a set of correlation matrices of the received signals containing the rotation matrix and possessing diagonal structure is generated. These common complex-valued target matrices are transformed into real symmetrical ones through a series of matrix transformation operations to make use of ACDC to diagonalize the target matrices and to estimate the rotation matrix. The arrival angles could be further derived and the DOA goal could be finally reached. Simulation results illustrate that, compared with other existing state-of-the-art DOA algorithms, the proposed ERM possesses higher resolution and more accurate DOA estimation performance.

**Key words:** direction-of-arrival (DOA) estimation; estimation of rotation matrix (ERM); joint diagonalization (JD); alternating columns diagonal centers (ACDC)

### 1 引言

波达方向 (Direction-of-Arrival, DOA) 是接收来波信号的重要参数. 利用一组传感器阵列接收数据实现 DOA 估计, 在雷达、无线通信、声呐、语音信号处理、地震波检测等阵列信号处理相关应用领域起着重要的作

用, 是信号处理领域的热点研究课题<sup>[1-10]</sup>.

纵观大量现存的 DOA 估计方法<sup>[5-10]</sup>, MUSIC (Multiple Signal Classification) 方法<sup>[5,6]</sup>和 ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique) 方法<sup>[7,8]</sup>是最常用的 DOA 估计方法. MUSIC 系列方法<sup>[5,6]</sup>利用信号子空间与噪声子空间的正交性获得

收稿日期: 2015-11-06; 修回日期: 2016-05-06; 责任编辑: 孙瑶

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 61201407, No. 61473047); 中国博士后科学基金面上资助 (No. 2013M542309); 陕西省自然科学基金基础研究计划 (No. 2016JQ5103); 长安大学中央高校基本科研业务费 (No. 0009-2014G1321038)

MUSIC 谱的峰值实现波达角度估计. 但是, MUSIC 方法无法获得解析解<sup>[7-9]</sup>. ESPRIT 系列方法<sup>[7,8]</sup>将传感器阵列划分为两个子阵, 第一个子阵的信号子空间特征向量是第二个子阵的信号子空间特征向量与包含 DOA 信息的旋转矩阵的乘积, 通过计算旋转矩阵获得 DOA 估计的解析解. 但是, 仅仅利用一个相关矩阵的策略限制了 ESPRIT 方法的估计精度. 为了提高算法性能, Poursostam 提出了一种新方法<sup>[10]</sup>, 该方法利用解盲信号分离问题的二阶盲辨识 (Second-Order Blind Identification, SOBI)<sup>[11]</sup>实现 DOA 估计, 本文将其称为 SOBI-DOA 方法. 多个相关矩阵的利用提高了该算法的分辨能力和估计性能. 但是, SOBI-DOA 算法要求目标矩阵中至少有一个正定矩阵, 以构建预白化矩阵进行预白化操作, 但是噪声的影响和有限样本数的限制导致此目标矩阵的正定性难以保证, 因此白化操作难免引入误差, 而且这些在预白化处理阶段引入的误差无法在后续处理中得以校正<sup>[12]</sup>, 这就限制了 SOBI-DOA 算法的估计精度.

针对上述算法的不足, 本文提出了一种解析的基于旋转矩阵估计的高分辨 DOA 估计算法, 命名为 ERM (Estimation of Rotation Matrix). 首先将传感器阵列划分为两个子阵, 为了充分利用空时信息以提高算法的估计性能, 取各子阵接收数据的非零延时相关矩阵以及两个子阵接收数据之间的非零延时相关矩阵, 构建一组目标矩阵. 该组目标矩阵不仅蕴含着旋转矩阵信息而且具有可对角化结构. 为了充分利用可对角化结构并深入挖掘旋转矩阵信息, 引入一系列矩阵变换, 将复数域普通目标矩阵转化为实数域对称目标矩阵, 以满足性能优异的 ACDC (Alternating Columns Diagonal Centers) 方法<sup>[12]</sup>对目标矩阵的要求. 利用 ACDC 算法求得对角阵后, 进一步求取一系列旋转矩阵, 继而挖掘到达角度信息, 实现 DOA 估计. 仿真结果表明, 与 MUSIC<sup>[6]</sup>, ESPRIT<sup>[8]</sup>, SOBI-DOA<sup>[10]</sup>等现存的经典 DOA 估计算法相比, 所提 ERM 算法具有更强的分辨能力以及更准确的 DOA 估计性能.

## 2 信号模型

考虑有  $M$  个全向阵元的等距线阵, 阵元间隔为  $d$  ( $d \leq \frac{\lambda}{2}$ ,  $\lambda$  表示信号波长), 接收  $N$  个人射方向为  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  的远场窄带信号, 第  $u$  个阵元接收信号可表示为:

$$x_u(t) = \sum_{v=1}^N s_v(t) e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(u-1)d\sin(\theta_v)} + n_u(t) \quad (1)$$

$\theta_v$  是第  $v$  ( $v=1, \dots, N$ ) 个信源到第  $u$  ( $u=1, \dots, M$ ) 个阵元的波达角. 传感器阵列在快拍  $t$  ( $t=1, \dots, T$ , 其中  $T$  为总的快拍数) 时所接收的数据为:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_M(t)]^T = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

此时阵列流型  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_N)]$  是列满秩的, 其列向量

$$\mathbf{a}(\theta_v) = [1, e^{j2\pi(d/\lambda)\sin\theta_v}, \dots, e^{j2\pi(M-1)(d/\lambda)\sin\theta_v}]^T \quad (v=1, \dots, N)$$

为导向矢量.  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T$  表示均值为零, 两两相互独立的源信号, 即

$$E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t+k\Delta\tau)] = \text{diag}[\rho_1(k), \dots, \rho_N(k)] = \mathbf{R}_s(k) \quad (3)$$

其中,  $\text{diag}[\cdot]$  表示以向量  $\cdot$  为对角线元素的对角阵.

$$\rho_v(k) = E[s_v(t)s_v^H(t+k\Delta\tau)]$$

其中, ( $v=1, \dots, N$ ), ( $k=1, 2, \dots, K$ ),  $\Delta\tau$  为整数, 代表非零延时步长. 式(2)中  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_M(t)]^T$  表示所接收的均值为零方差为  $\sigma_n^2$  且相互独立的阵元噪声, 即

$$R_n = E[n_p(t)n_q^H(t)] = \sigma_n^2\delta_{p,q} \quad (p, q=1, \dots, M) \quad (4)$$

为了推导简便, 在后续的公式推导中, 不再体现出噪声的影响.

将上述传感器阵列分为两个子阵, 分别包含的阵元编号为  $1, \dots, M-1$  和  $2, \dots, M$ . 则第一个子阵接收数据  $\mathbf{x}_1(t)$  及第二个子阵接收数据  $\mathbf{x}_2(t)$  可以分别表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= [x_1(t), \dots, x_{M-1}(t)]^T \\ &= \mathbf{A}_1(\theta)\mathbf{s}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= [x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \\ &= \mathbf{A}_2(\theta)\mathbf{s}(t) \\ &= \mathbf{A}_1(\theta)\Phi\mathbf{s}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

此处,  $\mathbf{A}_1(\theta) = [\mathbf{a}_1(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_1(\theta_N)]$ ,

$$\mathbf{a}_1(\theta_v) = [1, e^{j2\pi(d/\lambda)\sin\theta_v}, \dots, e^{j2\pi(M-2)(d/\lambda)\sin\theta_v}]^T \quad (v=1, \dots, N).$$

$\mathbf{A}_2(\theta)$  的含义可相应导出.  $\Phi = \text{diag}[e^{j2\pi(d/\lambda)\sin\theta_1}, \dots, e^{j2\pi(d/\lambda)\sin\theta_N}]$  为旋转矩阵. 显然, 所有的波达方向信息  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$  都包含在  $\Phi$  中<sup>[7]</sup>, 求得  $\Phi$  即可求得波达方向估计. 由于本文的算法旨在通过估计旋转矩阵实现 DOA 估计, 因此命名为 ERM (Estimation of Rotation Matrix). 为了表示简便, 后续章节中将忽略  $\mathbf{A}_1(\theta)$  和  $\mathbf{A}_2(\theta)$  中的  $\theta$ .

令  $\mathbf{R}_{m,n}(k)$  ( $m, n=1, 2$ ) 表示第  $m$  个子阵接收信号  $\mathbf{x}_m(t)$  和第  $n$  个子阵接收信号  $\mathbf{x}_n(t)$  在  $K$  个不同非零延时  $k\Delta\tau$  ( $k=1, \dots, K$ ) 情况下的空时相关矩阵,  $\Delta\tau$  为整数, 代表延时步长:

$$\mathbf{R}_{1,1}(k) = \mathbf{A}_1\mathbf{R}_s(k)\mathbf{A}_1^H \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1,2}(k) &= \mathbf{A}_1\mathbf{R}_s(k)\mathbf{A}_2^H \\ &= \mathbf{A}_1\mathbf{R}_s(k)\Phi^H\mathbf{A}_1^H \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{2,1}(k) &= \mathbf{A}_2\mathbf{R}_s(k)\mathbf{A}_1^H \\ &= \mathbf{A}_1\Phi\mathbf{R}_s(k)\mathbf{A}_1^H \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{2,2}(k) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_s(k) \mathbf{A}_2^H \\ &= \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{R}_s(k) \Phi^H \mathbf{A}_1^H \end{aligned} \quad (10)$$

式(7)~(10)可以统一表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{m,n}(k) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{m,n}(k) \mathbf{A}_1^H \\ m, n &= 1, 2; k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,1}(k) &= \mathbf{R}_s(k) \\ \mathbf{A}_{1,2}(k) &= \mathbf{R}_s(k) \Phi^H \\ \mathbf{A}_{2,1}(k) &= \Phi \mathbf{R}_s(k) \\ \mathbf{A}_{2,2}(k) &= \Phi \mathbf{R}_s(k) \Phi^H \end{aligned} \quad (12)$$

如此,便建立了一组由  $4K$  个矩阵构成的目标矩阵组  $\mathbf{C} = \{\mathbf{R}_{m,n}(k) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{m,n}(k) \mathbf{A}_1^H; m, n = 1, 2; k = 1, \dots, K\}$ .  $\mathbf{C}$  中所有矩阵均具有如下形式:

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{C}^p = \mathbf{A}_1 \mathbf{D}^p \mathbf{A}_1^H; p = 1, \dots, P\} \quad (13)$$

此时  $P = 4K$ . 对角阵  $\mathbf{D}^p$  中显然包含旋转矩阵  $\Phi$ . 一旦求得  $\mathbf{D}^p$ , 即可求得  $\Phi$ , 并最终实现 DOA 估计. 以式(7)中的  $\mathbf{R}_{1,1}(k)$  为例, 说明上述各非零延时相关矩阵的求解方法. 第 1 个子阵接收信号  $\mathbf{x}_1(t)$  与它的延时信号  $\mathbf{x}_1(t + k\Delta\tau)$  之间的相关矩阵为  $\mathbf{R}_{1,1}(k)$ , 其任意一个第  $i$  行第  $j$  列元素  $r_{i,j}^{11}(k)$  可以利用统计平均的方法求得:

$$\begin{aligned} r_{i,j}^{11}(k) &= E[x_i(t)x_j^H(t+k\Delta\tau)] \\ &= \frac{1}{T-k\Delta\tau} \sum_{m=1}^{T-k\Delta\tau} x_i(m)x_j^H(m+k\Delta\tau) \end{aligned}$$

其中  $T$  为快拍数. 显见,受制于噪声和有限快拍数,式(13)所示为近似对角化结构.

观察式(13)并考虑相应假设可知,上述数学模型和联合对角化问题的模型完全一致<sup>[11-13]</sup>. 有趣的是,联合对角化是解决盲源分离问题的最有效工具之一<sup>[14]</sup>. 但是,大部分现存的优秀联合对角化算法,最初在提出时,往往只着眼于求解混迭矩阵  $\mathbf{A}_1$  (或者其逆矩阵)的估计作为联合对角化器来实现目标矩阵的对角化,而包含旋转矩阵  $\Phi$  信息的对角矩阵  $\mathbf{D}^p$  则成了冗余参量而不予以求取. 幸运的是,作为一种性能优秀的联合对角化算法,ACDC 虽然也立足于求解混迭矩阵  $\mathbf{A}_1$ ,但是基于其运算机制,还求解出了冗余参量对角阵  $\mathbf{D}^p$ ,因此可以考虑利用 ACDC 算法求得对角阵后进而求得旋转矩阵  $\Phi$ . ACDC 算法要求目标矩阵为厄米特对称阵,即  $\mathbf{D}^p$  为实矩阵或厄米特对称阵,但是上述的目标矩阵组  $\mathbf{C}$  不满足此要求. 为了进一步利用 ACDC 算法,需要先考虑将目标矩阵转换为实对称阵.

另外,考虑到当  $M-1 > N$  时,  $\mathbf{A}_1$  不是方阵,但是包括 ACDC 在内的大部分联合对角化算法均要求混迭矩阵为方阵. 为了适应算法要求,便于计算,并降低运算量,根据学者 FENG Da-Zheng 所述方法<sup>[15]</sup> 对目标矩阵组  $\mathbf{C}$  进行降维处理:令  $\psi = \sum_{p=1}^P \mathbf{C}^p (\mathbf{C}^p)^H$ , 对  $\psi$  进行奇异

值分解  $\psi = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H$ , 取  $\psi$  的  $N$  个主特征矢量组成降维矩阵  $\mathbf{F} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N]$ . 令  $\hat{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{F}^H \mathbf{A}_1$ , 则可得到降维后的矩阵组  $\hat{\mathbf{C}} = \{\hat{\mathbf{C}}^p = \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{D}^p \hat{\mathbf{A}}_1^H; p = 1, \dots, P\}$ . 显然地,降维处理并没有破坏目标矩阵组的对角化结构,并且,据此方法得到的降维矩阵还具有抑制噪声的作用<sup>[16]</sup>. 综合上述分析可知,所提 ERM 算法所能估计的最大波达方向数为  $M-1$ .

### 3 波达方向估计方法

#### 3.1 目标矩阵组的实对称化

本节的目的,是将普通的复数域目标矩阵组  $\hat{\mathbf{C}} = \{\hat{\mathbf{C}}^p = \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{D}^p \hat{\mathbf{A}}_1^H; p = 1, \dots, P\}$  转化为实对称目标矩阵组.

首先从  $\hat{\mathbf{C}}^p$  ( $p = 1, \dots, P$ ) 入手,通过如式(14)和式(15),构造  $2P$  个矩阵,其中第偶数个矩阵为  $\tilde{\mathbf{C}}^{2p}$  ( $p = 1, \dots, P$ ),第奇数个矩阵为  $\tilde{\mathbf{C}}^{2p-1}$  ( $p = 1, \dots, P$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}^{2p} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{C}}^p + \hat{\mathbf{C}}^{pH}) = \hat{\mathbf{A}}_1 \text{Re}(\mathbf{D}^p) \hat{\mathbf{A}}_1^H \\ p &= 1, \dots, P \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}^{2p-1} &= \frac{1}{2j}(\hat{\mathbf{C}}^p - \hat{\mathbf{C}}^{pH}) = \hat{\mathbf{A}}_1 \text{Im}(\mathbf{D}^p) \hat{\mathbf{A}}_1^H \\ p &= 1, \dots, P \end{aligned} \quad (15)$$

随后,定义如式(16)的矩阵变换函数:

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{X}) & \text{Im}(\mathbf{X}) \\ -\text{Im}(\mathbf{X}) & \text{Re}(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

由式(14)和式(16),定义  $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{C}}^{2p}$ , 记  $\bar{\mathbf{C}}^{2p} = f(\mathbf{X})$ , 则  $\bar{\mathbf{C}}^{2p}$  具有如式(17)的形式:

$$\bar{\mathbf{C}}^{2p} = f(\tilde{\mathbf{C}}^{2p}) = \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\mathbf{C}}^{2p}) & \text{Im}(\tilde{\mathbf{C}}^{2p}) \\ -\text{Im}(\tilde{\mathbf{C}}^{2p}) & \text{Re}(\tilde{\mathbf{C}}^{2p}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

将式(14)代入式(17)可得:

$$\bar{\mathbf{C}}^{2p} = \begin{bmatrix} \text{Re}[\hat{\mathbf{A}}_1 \text{Re}(\mathbf{D}^p) \hat{\mathbf{A}}_1^H] & \text{Im}[\hat{\mathbf{A}}_1 \text{Re}(\mathbf{D}^p) \hat{\mathbf{A}}_1^H] \\ -\text{Im}[\hat{\mathbf{A}}_1 \text{Re}(\mathbf{D}^p) \hat{\mathbf{A}}_1^H] & \text{Re}[\hat{\mathbf{A}}_1 \text{Re}(\mathbf{D}^p) \hat{\mathbf{A}}_1^H] \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中,

$$\begin{aligned} &\text{Re}[\hat{\mathbf{A}}_1 \text{Re}(\mathbf{D}^p) \hat{\mathbf{A}}_1^H] \\ &= \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) + j\text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \\ \cdot [\text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) + j\text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1)]^H \end{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{D}^p) \right\} \\ &= \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \\ &\quad + \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \end{aligned} \quad (19)$$

类似地,

$$\begin{aligned} &\text{Im}[\hat{\mathbf{A}}_1 \text{Re}(\mathbf{D}^p) \hat{\mathbf{A}}_1^H] \\ &= -\text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \\ &\quad + \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \end{aligned} \quad (20)$$

将式(19)和(20)的结果代入式(18),可得式(21).

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}^{2p} &= \begin{bmatrix} \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) + \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) & -\text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) + \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \\ \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) + \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) & \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) + \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) & \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \\ -\text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) & \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \text{Re}(\mathbf{D}^p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) & -\text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \\ \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) & \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) & \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \\ -\text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) & \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{D}^p) & 0 \\ 0 & \text{Re}(\mathbf{D}^p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) & -\text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) \\ \text{Im}(\hat{\mathbf{A}}_1) & \text{Re}(\hat{\mathbf{A}}_1) \end{bmatrix} \quad (21)
\end{aligned}$$

根据式(16)所定义的矩阵变换函数,式(21)可以进一步整理为

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}^{2p} &= f(\hat{\mathbf{A}}_1) \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{D}^p) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Re}(\mathbf{D}^p) \end{bmatrix} f^T(\hat{\mathbf{A}}_1) \\
&= \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{D}}^{2p} \bar{\mathbf{A}}_1^T; \quad p=1, \dots, P \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \bar{\mathbf{A}}_1 = f(\hat{\mathbf{A}}_1), \bar{\mathbf{D}}^{2p} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{D}^p) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Re}(\mathbf{D}^p) \end{bmatrix}.$$

类似地,由式(15)和式(16)定义  $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{C}}^{2p-1}$ , 则  $\bar{\mathbf{C}}^{2p-1} = f(\mathbf{X})$  具有如式(23)的形式:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}^{2p-1} &= f(\bar{\mathbf{C}}^{2p-1}) \\
&= f(\mathbf{A}_1) \begin{bmatrix} \text{Im}(\mathbf{D}^p) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Im}(\mathbf{D}^p) \end{bmatrix} f^T(\mathbf{A}_1) \\
&= \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{D}}^{2p-1} \bar{\mathbf{A}}_1^T; \quad p=1, \dots, P \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \bar{\mathbf{D}}^{2p-1} = \begin{bmatrix} \text{Im}(\mathbf{D}^p) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Im}(\mathbf{D}^p) \end{bmatrix}.$$

式(22)和式(23)可以统一表示为:

$$\bar{\mathbf{C}}^p = \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{D}}^p \bar{\mathbf{A}}_1^T; \quad p=1, \dots, 2P \quad (24)$$

可见,通过上述一系列变换,将  $P$  个维数为  $N \times N$  的普通复数值目标矩阵构成的矩阵组  $\hat{\mathbf{C}} = \{\hat{\mathbf{C}}^p = \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{D}^p \hat{\mathbf{A}}_1^H; p=1, \dots, P\}$  转化为了  $2P$  个维数为  $2N \times 2N$  新的实数值目标矩阵构成的目标矩阵组  $\bar{\mathbf{C}} = \{\bar{\mathbf{C}}^p; p=1, \dots, 2P\}$ . 通过分析不难发现:新的目标矩阵组同样具有对角化结构,即式(24)中  $\bar{\mathbf{D}}^p (p=1, \dots, 2P)$  为对角阵;并且新的目标矩阵为实对称阵,即  $\bar{\mathbf{C}}^{pT} = \bar{\mathbf{C}}^p (p=1, \dots, 2P)$ . 通过上述的矩阵变换,普通的复数值目标矩阵转换为了实对称目标矩阵,满足了 ACDC 算法的要求.

### 3.2 ERM 算法

接下来,由式(24)入手,估计所有的  $\bar{\mathbf{D}}^p (p=1, \dots, 2P)$ . 首先建立表征联合对角化程度的代价函数如式(25)所示.

$$J(\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_1, \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^1, \dots, \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^{2P}) = \sum_{p=1}^{2P} w_p \|\bar{\mathbf{C}}^p - \tilde{\bar{\mathbf{A}}}_1 \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^p \tilde{\bar{\mathbf{A}}}_1^T\|_F^2 \quad (25)$$

其中  $\|\cdot\|_F$  指 F-范数,  $w_p$  为正的权值,  $(\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_1, \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^1, \dots, \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^{2P})$  是待搜索的  $(\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{D}}^1, \dots, \bar{\mathbf{D}}^{2P})$  的估计值. 式(25)可以通过两个交替子步实现最小化:在 AC (Alternating Columns) 子步中,保持其他参数不变,通过最小化代价函

数  $J(\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_1, \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^1, \dots, \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^{2P})$ , 每次求得  $\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_1$  的一列. 在 DC (Diagonal Centers) 子步中,保持  $\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_1$  不变,估计所有对角阵  $\tilde{\bar{\mathbf{D}}}^1, \dots, \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^{2P}$ . 需要注意的是,为了保证算法的收敛性,可以在运行 3~4 次 AC 子步后再运行一次 DC 子步.

对于 ACDC 算法来说,其目的是为了求解  $\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_1$  进而估计混迭矩阵,因此对角阵  $\tilde{\bar{\mathbf{D}}}^1, \dots, \tilde{\bar{\mathbf{D}}}^{2P}$  为其冗余解,但却是 ERM 算法的待求目标. 算法收敛后,可求得  $\mathbf{D}^p (p=1, \dots, 2P)$  的估计值. 随后,根据式(23)和式(24)所示关系,可求得  $\mathbf{D}^p (p=1, \dots, P)$ . 然后,根据  $\mathbf{D}^p (p=1, \dots, P)$  与  $\mathbf{A}_{m,n}(k) (m, n=1, 2; k=1, \dots, K)$  之间清晰的关系,所有  $\mathbf{A}_{m,n}(k)$  可以直接求得. 最后,基于式(12)易得如式(26)的结果.

$$\begin{aligned}
\Phi_1(k) &= \mathbf{A}_{1,2}^H(k) \mathbf{A}_{1,1}^{-H}(k) \\
\Phi_2(k) &= \mathbf{A}_{2,1}(k) \mathbf{A}_{1,1}^{-1}(k) \\
\Phi_3(k) &= \mathbf{A}_{2,2}^H(k) \mathbf{A}_{2,1}^{-H}(k) \\
\Phi_4(k) &= \mathbf{A}_{2,2}(k) \mathbf{A}_{1,2}^{-1}(k) \quad (26)
\end{aligned}$$

作为  $\Phi$  的估计值,所有的  $4K$  个  $\Phi_m(k) (m=1, \dots, 4; k=1, \dots, K)$  本应该都等于  $\Phi$ . 但是,由于噪声的影响和有限快拍数的限制,  $\mathbf{C}$  中的所有目标矩阵都仅仅具有近似而非严格对角化结构. 因此,利用联合对角化算法所求得各  $\Phi_m(k) (m=1, \dots, 4; k=1, \dots, K)$  之间以及它们和  $\Phi$  之间,并不会严格相等. 为了提高求解的准确性,波达方向角的统计平均值可以求得式(27).

$$\hat{\theta}_v = \frac{180}{4K\pi} \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^K \left\{ \arcsin \left[ \frac{\lambda}{2\pi d} \text{angle}(\Phi_m^v(k)) \right] \right\} \quad v=1, \dots, N \quad (27)$$

其中,  $\text{angle}(\cdot)$  代表幅角主值.  $\Phi_m^v(k)$  是  $\Phi_m(k)$  的第  $v$  个对角元素. 进而,可得 DOA 最终估计  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N)$ .

## 4 仿真结果

本节通过两个实验来分析所提 ERM 算法的性能. 设独立实验总次数为  $Q$  次,定义  $\hat{\theta}_v(q)$  为第  $q$  次试验对第  $v$  个信源波达方向的估计值,  $\theta_v$  为第  $v$  个信源的真实波达方向角度. 首先给出两个性能指标,第一个性能指

标为分辨概率 PR (Probability of Resolution): 设所允许的角度估计误差门限值为  $\Delta\theta$ , 记在  $Q$  次独立实验中, 对  $N$  个波达方向角度的估计误差均满足  $|\hat{\theta}_v(q) - \theta_v| \leq \Delta\theta (v=1, \dots, N)$  的实验次数为  $\tilde{Q}$  次, 则分辨概率 PR 定义为  $PR = \tilde{Q}/Q$ . 第二个性能指标为角度估计的均方根误差 (RMSE), 定义为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \left[ \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (\hat{\theta}_v(q) - \theta_v)^2 \right]} \quad (28)$$

**实验 1** 运行 1000 次 Monte-Carlo 实验以验证所提 ERM 算法的分辨性能, 并与 MUSIC<sup>[6]</sup>, ESPRIT<sup>[8]</sup> 和 SOBI-DOA 算法<sup>[10]</sup> 比较. 为了保证比较的公平性, 设定与 SOBI-DOA 相同的仿真条件: 假设 4 个 ( $M=4$ ) 相距半波长的均匀线阵接收 2 个 ( $N=2$ ) 波达方向角为  $\theta_1 = 15^\circ$  和  $\theta_2 = 16^\circ$  的远场窄带信号, 有白噪声存在. 取快拍数  $T=600$ . 式(7)中  $K=3$ , 即在 3 个非零延时下, 构建  $P=12$  个空时相关矩阵构成目标矩阵组. SOBI-DOA 算法中的相关矩阵的个数也相应地取为 12. 经验性地设定所允许的角度估计误差门限值为  $\Delta\theta = 0.1^\circ$ . 图 1 所示为四种算法在不同信噪比 (SNR) 下的 PR 曲线. ERM 算法的门限 SNR 明显低于其他三种算法, 体现了算法良好的分辨能力.

**实验 2** 本实验验证不同信噪比和快拍数对 ERM 算法的影响, 并同两个解析算法 ESPRIT<sup>[8]</sup> 和 SOBI-DOA<sup>[10]</sup> 比较. 假设  $M=7$  个相距半波长的传感器构成的均匀线阵, 接收  $N=3$  个波达方向为  $\theta = (-5^\circ, 0^\circ, 5^\circ)^T$  的远场窄带信号, 有白噪声存在. 取  $K=4$  且 SOBI-DOA 算法中相关矩阵个数取为 12. 所得仿真结果均为 1000 次 Monte Carlo 实验的统计平均值. 快拍数为  $T=400$  时, 不同信噪比下三种算法的 RMSE 曲线如图 2 所示. 信噪比为  $SNR = 10\text{dB}$  时, 不同快拍数下三种算法的 RMSE 曲线如图 3 所示. 图 2 与图 3 所示的仿真结果表明, ERM 算法的 DOA 估计精度明显优于其他两个解析算法.

## 5 结束语

本文提出了一种解析的基于旋转矩阵估计的 DOA

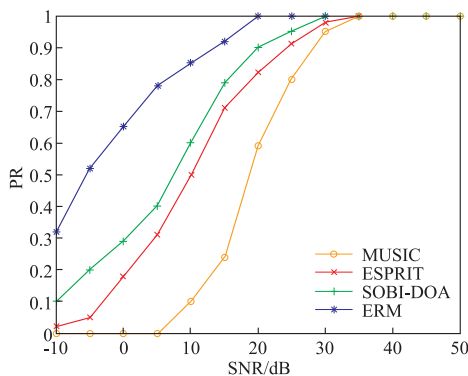


图 1 不同 SNR 时各算法的 PR 曲线

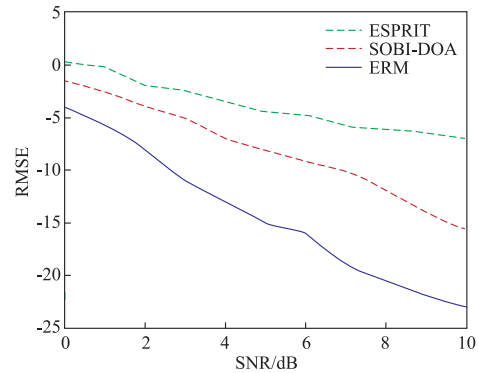


图 2 不同 SNR 时各算法的 RMSE 曲线

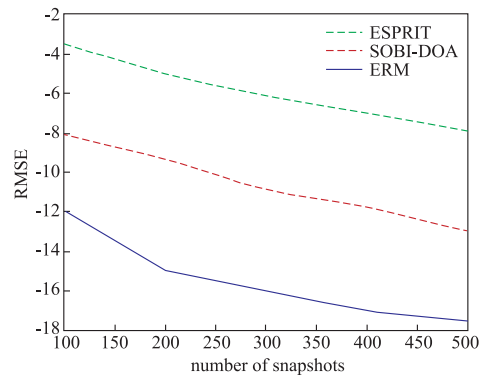


图 3 不同快拍数时各算法的 RMSE 曲线

估计方法. 首先建立了一组空时相关矩阵, 并通过一系列矩阵变换将其转化为实对称阵, 引入联合对角化 AC-DC 算法计算对角矩阵, 并获得旋转矩阵, 直至求得最终的波达方向角. 仿真结果验证了算法的分辨能力及良好的 DOA 估计性能.

## 参考文献

- [1] SI Q, ZHANG Y D, AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(6): 1377 - 1390.
- [2] ZHAO T, YONINA C E, ARYE N. Direction of arrival estimation using co-prime arrays: a super resolution viewpoint [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(21): 5565 - 5576.
- [3] 刘永军, 廖桂生, 杨东. 基于自适应迭代的强弱信号波达方向估计 [J]. 电子学报, 2015, 43(7): 1425 - 1431. LIU Yong-jun, LIAO Gui-sheng, YANG Dong. DOA estimation for strong and weak signals based on adaptive iteration [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(7): 1425 - 1431. (in Chinese)
- [4] WANG J M, XIN J M, WANG J S, et al. Subspace-based two-dimensional direction estimation and tracking of multiple targets [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Elec-

- tronic Systems, 2015, 51(2):1386 – 1402.
- [5] RALPH O S. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3):276 – 280.
- [6] VINOD V R, BOON P N, ANDY W H K. Insights into MUSIC-like algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(10):2551 – 2556.
- [7] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(7):984 – 995.
- [8] TRIPATHY P, SRIVASTAVA S C, SINGH S N. A modified TLS-ESPRIT-based method for low-frequency mode identification in power systems utilizing synchrophasor measurements [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(2):719 – 727.
- [9] LEE H B, WENGROVITZ M. Statistical characterization of the MUSIC null spectrum [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(6):1333 – 1347.
- [10] POURROSTAM J, ZEKAVAT S A, POURKHAATOUN M. Super-resolution direction-of-arrival estimation via blind signal separation methods [A]. IEEE Radar Conference [C]. USA: IEEE Press, 2007. 614 – 617.
- [11] BELOUHRANI A, ABED-MERAÏM K, CARDOSO J F, et al. A blind source separation technique using second-order statistics [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(2):434 – 444.
- [12] SOULOUMIAC A. Nonorthogonal joint diagonalization by combining givens and hyperbolic rotations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(6):2222 – 2231.
- [13] YEREDOR A. Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source separation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(7):1545 – 1553.
- [14] CHABRIEL G, KLEINSTEUBER M, MOREAU E, et al. Joint matrices decompositions and blind source separation: A survey of methods, identification, and applications [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2014, 31(3):34 – 43.
- [15] FENG D Z, ZHENG W X, CICHOCKI A. Matrix-group algorithm via improved whitening process for extracting statistically independent sources from array signals [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(3):962 – 977.
- [16] 张辉, 葛临东, 李蒙, 吴月娴. 多径环境中二维波达方向估计的子空间平滑算法 [J]. 电子学报, 2005, 33(6):1077 – 1080.  
ZHANG Hui, GE Lin-dong, LI Meng, WU Yue-xian. Multipath 2-D direction finding with subspace smoothing algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(6):1077 – 1080. (in Chinese)

#### 作者简介



徐先峰 男, 1982 年 3 月出生于山东宁阳, 博士、副教授、硕士生导师。主要研究方向为盲信号处理及其应用。  
E-mail: xuxianfeng1982@163.com



段晨东 男, 1966 年 4 月出生于陕西韩城, 博士、教授、硕士生导师。主要研究方向为信号处理、故障诊断与模式识别。  
E-mail: cdduan@chd.edu.cn