

高斯和高阶无迹卡尔曼滤波算法

王磊¹,程向红²,李双喜¹

(1. 安徽科技学院电气与电子工程学院,安徽蚌埠 233100;2. 东南大学仪器科学与工程学院,江苏南京 210096)

摘要: 为了提高非线性变换的近似精度,提出了一种高阶无迹变换(High order Unscented Transform, HUT)机制,利用 HUT 确定采样点并进行数值积分去近似状态的后验概率密度函数,建立了高阶无迹卡尔曼滤波(High-order Unscented Kalman Filter, HUKF)算法. 进一步的为了解决非线性、非高斯系统的状态估计问题,将 HUKF 与高斯和滤波(Gaussian Sum Filter, GSF)相结合,提出了一种高斯和高阶无迹卡尔曼滤波算法(Gaussian Sum High order Unscented Kalman filter, GS-HUKF),该算法的核心思想是利用一组高斯分布的和去近似状态的后验概率密度,同时针对每一个高斯分布采用高阶无迹卡尔曼滤波算法进行估计. 数值仿真实验结果表明,提出的 HUT 机制与普通的无迹变换(Unscented Transform, UT)相比,具有更高的近似精度;提出的 GS-HUKF 与传统的 GSF 以及高斯和粒子滤波器(Gaussian Sum Particle Filter, GS-PF)相比,兼容了二者的优点,即具有计算复杂度低和估计精度高的特性.

关键词: 卡尔曼滤波; 无迹卡尔曼滤波; 高斯和; 非线性非高斯

中图分类号: TN713 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)02-0424-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.02.022

Gaussian Sum High Order Unscented Kalman Filtering Algorithm

WANG Lei¹, CHENG Xiang-hong², LI Shuang-xi¹

(1. School of Electrical and Electronic Engineering, Anhui Science and Technology University, Bengbu, Anhui 233100, China;

2. School of Instrument Science and Engineering, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract: A novel high order unscented transform (HUT) mechanism is proposed to improve the approximation accuracy of the nonlinear transformation. The HUT is adopted to select the Sigma points which can be used to approximate the posterior probability density of state variable by numerical integration. Thus the high order unscented Kalman filtering (HUKF) algorithm can be made up. Further, to solve the state estimation problem for nonlinear/non-Gaussian system, Gaussian sum high order unscented Kalman filter (GS-HUKF) is proposed by combining the HUKF and Gaussian sum filter (GSF). The basic idea of the GS-HUKF is that a cluster of Gaussian distribution is used to approximate the posterior probability density of state variable. At the mean time, each separated Gaussian distribution is estimated by HUKF. Numerical simulation results demonstrate that the proposed HUT has higher estimation precision than ordinary unscented transform (UT) method. The GS-HUKF has integrated advantages with respect to estimation accuracy and computational complexity and its performance is superior to the existing Gaussian sum filters.

Key words: Kalman filtering; unscented Kalman filter; Gaussian sum filter; nonlinear /non-Gaussian

1 引言

状态估计理论被广泛的应用于各领域,例如太空监测^[1]、无线通信^[2]、跟踪系统^[3]以及金融行业^[4]等. 当系统为线性、噪声统计特性服从高斯分布并完全已知时, Kalman 滤波器是最优的解决方案. 然而,随着人们对系统认识的不断深化,以及估计和控制任务要求

的日益提高,状态估计中非线性、非高斯的存在越来越成为不可回避的问题. 传统的扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)及其改进方法只能处理弱非线性系统及高斯噪声条件下的估计问题. 为此,人们提出了一系列以贝叶斯滤波理论为框架、基于数值积分近似的非线性状态估计方法,其中具有代表性的方法包括中心差分卡尔曼滤波(Central Difference Kalman Filter,

CDKF)^[5]、无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)^[6]、求积分卡尔曼滤波(Quadrature Kalman filter, QKF)^[7]、容积卡尔曼滤波(Cubature Kalman Filter, CKF)^[8]等.上述滤波器的共同特点是对状态的先验分布进行采样,通过对确定采样点进行独立处理和加权综合得到状态估计^[9,10].

EKF与确定采样型滤波算法均假设系统中噪声的统计特性是已知并服从高斯分布的,而在实际的非线性系统中,还存在着干扰信号统计特性不完全已知或不服从高斯分布的情况,例如在通讯、雷达、声纳、导航等领域,背景噪声往往非常复杂,存在非高斯的情况^[11].假设系统噪声服从高斯分布的非线性滤波器对这一类问题是难以进行准确估计的,在实际系统中的应用受到限制.高斯和滤波器(Gaussian Sum Filter, GSF)常常被用于处理非线性、非高斯问题,其主要思想是通过一簇均值与方差不同的高斯分布可以近似任何概率密度函数,且近似的误差能任意小^[12].基于蒙特卡罗方法的粒子滤波器(Particle Filter, PF)是另外一类能够用于处理非线性、非高斯滤波问题的方法,PF不受随机变量必须满足高斯分布的假设条件限制,需要的假设条件较少,但其计算复杂度太大,因此在实时性要求较高的一些应用例如导航、跟踪等领域中受到限制^[13].

普通的无迹变换(Unscented Transform, UT)对称采样策略能够保证高斯分布的近似精度达到泰勒级数展开式的三阶截断.为了进一步提高非线性变换的近似精度,Julier^[14]提出了利用三阶矩信息的偏度采样策略,能够对任意分布近似达到三阶精度,但该方法比较复杂,很少被使用.Ponomareva^[15]提出一种利用增广的办法来扩展传统的UT变换,可以捕获随机变量的4阶中心矩.Tenne^[16]提出了一种采用5个对称分布的Sigma点能够捕获一维随机变量8阶中心矩.本文首先对近似非线性变换概率密度分布高阶矩的方法进行研究,提出了高斯和高阶无迹卡尔曼滤波算法.

2 高阶无迹卡尔曼滤波算法

2.1 高阶 UT 变换

事实上,所有的确定采样型滤波算法中,根据不同的采样策略选取的Sigma点与随机变量 \mathbf{x} 的统计特性相关,数值积分的目的是采用尽可能少的Sigma点近似随机变量 \mathbf{x} 中更多的高阶矩信息.由于多维高斯变量状态估计问题可以分解成单维高斯变量状态估计问题,因此,我们首先考虑 \mathbf{x} 服从一维高斯分布的情形.假设一维随机变量 \mathbf{x} 服从标准正态分布 $N(\mathbf{x}; 0, 1)$,则其概率密度函数为

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (1)$$

设任意非线性函数 $g(\mathbf{x})$,其期望可以表示成如下形式

$$E[g(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^m g(\sigma_i)\omega_i \quad (2)$$

其中 σ_i 和 ω_i 分别为Sigma点以及对应的权值.从上式可以看出,对非线性函数 $g(\mathbf{x})$ 在区间 $[-\infty \sim +\infty]$ 上的积分可以近似为有限个Sigma点集合 $\{\omega_i, \sigma_i\}$ 的加权和.由于 $g(\cdot)$ 为任意形式的非线性函数,因此,考虑根据随机变量 \mathbf{x} 的概率密度函数计算Sigma点.下面将概率密度函数 $p(\mathbf{x})$ 和它的导函数的极点作为Sigma点的情况进行分析, $p(\mathbf{x})$ 及其 i 阶导函数 $p^{(i)}(\mathbf{x})$ ($i \geq 0$)的极点求取如下:

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow \mathbf{x}e^{-x^2/2} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} p''(\mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow (\mathbf{x}^2 - 1)e^{-x^2/2} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = \pm 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p^{(3)}(\mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow (\mathbf{x}^3 - 3\mathbf{x})e^{-x^2/2} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = 0, \pm\sqrt{3} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p^{(4)}(\mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow (\mathbf{x}^4 - 6\mathbf{x}^2 + 3)e^{-x^2/2} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} p^{(5)}(\mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow (\mathbf{x}^5 - 10\mathbf{x}^3 + 15\mathbf{x})e^{-x^2/2} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = 0, \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{10}} \end{aligned} \quad (7)$$

由式(3)~(7)可以发现: $p(\mathbf{x})$ 函数自身有一个极点 $\mathbf{x} = 0$,如果将它作为Sigma点,与把非线性函数在 $\mathbf{x} = 0$ 处进行泰勒级数展开的EKF方法类似;一阶导函数 $p'(\mathbf{x})$ 有两个对称的极点 $\mathbf{x} = \pm 1$,与CKF滤波中一维高斯随机变量所选取的Sigma点相同;二阶导函数 $p''(\mathbf{x})$ 的极点 $\mathbf{x} = 0, \pm\sqrt{3}$,与UKF滤波中UT变换对称采样策略所得到的Sigma点一致.随机变量 \mathbf{x} 概率密度函数的三阶导函数 $p^{(3)}(\mathbf{x})$ 的极点为 $\mathbf{x} = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$,四阶导函数 $p^{(4)}(\mathbf{x})$ 的极点为 $\mathbf{x} = 0, \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{10}}$,将这些极点在—维标准正态分布概率密度函数上进行标注,如图1所示.从图1可以看出,每组极值点均以 $\mathbf{x} = 0$ 为中心对称分布,导函数的阶数越高,所获取的极值点越远离中心点.根据标准正态分布的统计特性,99.73%的点都分布

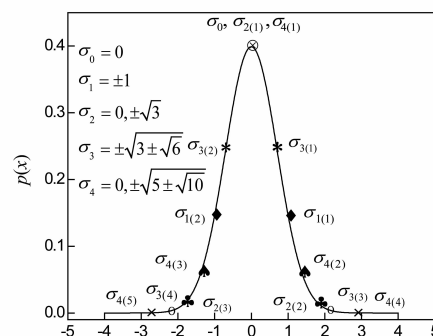


图1 单维标准正态分布概率密度函数及其导函数的极值点

在 $[-3, 3]$ 区间内,若某个极值点超出了这个范围,将它作为 Sigma 点所对应的权值将非常小,在计算积分的过程中可忽略.因此,对于极值点作为 Sigma 点的选择主要可根据计算复杂度和精度两个方面考虑,保证估计的准确性和实时性.下面介绍如何求得 Sigma 点对应的权值,首先介绍如下定理:

定理 1 假设一维随机变量 \mathbf{x} 服从标准正态分布,其概率密度函数 $f(\mathbf{x}) \sim N(0, \Omega^2)$, 则 \mathbf{x} 的 k 阶中心距满足

$$\Sigma_{\mathbf{x}}^k = \begin{cases} \Omega^k (k-1)(k-3)\cdots 3 \times 1, & k = 2, 4, \dots, 2L \\ 0, & k = 1, 3, \dots, 2L-1 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\Sigma_{\mathbf{x}}^k$ 表示变量 \mathbf{x} 的 k 阶中心矩.

由于随机变量 \mathbf{x} 服从标准正态分布,选择的 Sigma 点利用权重来描述其出现的概率大小,因此,引入权重信息后的 Sigma 点也应该具有和随机变量 \mathbf{x} 相同的统计特性,二者的均值和高阶中心矩应该相同,即:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\sigma} \\ \Sigma_{\mathbf{x}}^k = \Sigma_{\sigma}^k, k = 1, 2, \dots, 2L \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}$ 为变量 \mathbf{x} 的均值, $\bar{\sigma}$ 为引入权重信息的 Sigma 点的均值; $\Sigma_{\mathbf{x}}^k$ 为变量 \mathbf{x} 的 k 阶中心矩, Σ_{σ}^k 为引入权重信息 Sigma 点的 k 阶中心矩. 引入权重信息 Sigma 点的均值和 k 阶中心矩可以表示如下:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \sum_{i=1}^m \omega_i \sigma_i \\ \Sigma_{\sigma}^k = \sum_{i=1}^m \omega_i (\sigma_i - \bar{\sigma})^k \end{cases}, k = 1, 2, \dots, 2L \quad (10)$$

其中 m 为 Sigma 点的个数. 由以上描述的 Sigma 点集合均以 $\mathbf{x} = 0$ 为中心对称分布,且对称分布的 Sigma 点具有相同的权值,为便于描述,只选取非负的 Sigma 点 σ_i ($i = 1, 2, \dots, \gamma, 2\gamma + 1 = m$), 根据式(9)、(10), 可得到

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{\gamma}^2 \\ \sigma_1^4 & \sigma_2^4 & \cdots & \sigma_{\gamma}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_1^{2L} & \sigma_2^{2L} & \cdots & \sigma_{\gamma}^{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ \cdots \\ \frac{1 \times 3 \times \cdots (2L-1)}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

将 Sigma 点代入式(11)进行计算,便能够得到相应的权值. 通过这种方式可以求得与随机变量 \mathbf{x} 高阶中心矩相匹配的 Sigma 点集合,利用获取的 Sigma 集合可以近似非线性变换后的高阶中心矩信息.

多维随机变量 Sigma 点集合 $S_i = \{\omega_i, \zeta_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$) 可以通过一维标准正态分布获取的 Sigma 点进行扩展得到. 假设 n 维随机变量 \mathbf{x} , 其均值为 $\bar{\mathbf{x}}$, 协方差为 \mathbf{P}_x , 可以根据如下形式进行求取:

$$\begin{cases} \zeta_0 = \bar{\mathbf{x}} \\ \zeta_i = \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{P}_x} \sigma_i, i = 1, \dots, \gamma n \\ \zeta_i = \bar{\mathbf{x}} - \sqrt{\mathbf{P}_x} \sigma_i, i = n+1, \dots, 2\gamma n \end{cases} \quad (12)$$

其中, ζ_i 表示多维随机变量第 i 个 Sigma 点, σ_i 为服从标准正态分布的一维随机变量第 i 个非负的 Sigma 点, 多维随机变量集合中各个 Sigma 点的权值 ω_i 与一维随机变量 Sigma 点权值相同.

HUT 变换利用高斯概率密度函数及其导函数的极值点作为 Sigma 点,再根据式(11)计算得到相应权值,便能够通过少量的 Sigma 点捕获随机变量经过非线性变换后的高阶统计特征信息,与 Ponomareva 和 Tenne 的方法相比,该方法避免了直接对非线性等式的求解.

2.2 高阶无迹卡尔曼滤波算法

将 HUT 变换应用到非线性贝叶斯滤波结构中,可以得到 HUKF 算法,步骤如下:

第一步 时间更新

(1) 设 k 时刻随机变量 \mathbf{x} 的先验概率密度函数 $p(\mathbf{x}_{k-1} | z_{k-1}) = N(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$ 已知,对 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 进行分解

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \mathbf{S}_{k-1|k-1}^T \quad (13)$$

(2) 通过 HUT 变换引入单维随机变量的 Sigma 点 σ_i ($i = 1, 2, \dots, m$)

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \sigma_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (14)$$

(3) 将引入 Sigma 点后的状态进行非线性传播

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* = f(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}, \boldsymbol{\mu}_{k-1}) \quad (15)$$

(4) 状态预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* \quad (16)$$

(5) 协方差阵预测

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} = & \mathbf{Q}_{k-1} + \sum_{i=1}^m \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ & \cdot (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \end{aligned} \quad (17)$$

第二步 量测更新

(1) 预测协方差分解

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T \quad (18)$$

(2) 通过 HUT 变换引入 Sigma 点 σ_i ($i = 1, 2, \dots, m$)

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \sigma_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (19)$$

(3) 将引入 Sigma 点后的状态进行非线性传播

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1} = h(\mathbf{X}_{i,k|k-1}, \boldsymbol{\mu}_k) \quad (20)$$

(4) 量测预测

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{Z}_{i,k|k-1} \quad (21)$$

(5) 预测新息协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z,k|k-1} = & \mathbf{R}_k + \sum_{i=1}^m \omega_i (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \\ & \cdot (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \end{aligned} \quad (22)$$

(6) 预测互协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{xz,klk-1} = \sum_{i=1}^m \omega_i (\mathbf{X}_{i,klk-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}) \cdot (\mathbf{Z}_{i,klk-1} - \hat{\mathbf{z}}_{klk-1})^T \quad (23)$$

(7) 计算增益

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{P}_{xz,klk-1} \mathbf{P}_{zz,klk-1}^{-1} \quad (24)$$

(8) 状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk} = \hat{\mathbf{x}}_{klk-1} + \mathbf{W}_k (z_k - \hat{\mathbf{z}}_{klk-1}) \quad (25)$$

(9) 协方差估计

$$\mathbf{P}_{klk} = \mathbf{P}_{klk-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{P}_{zz,klk-1} \mathbf{W}_k^T \quad (26)$$

3 高斯和-高阶无迹卡尔曼滤波算法

3.1 高斯和定理

将上述 HUKF 算法与高斯和滤波相结合,形成能够用于处理非线性、非高斯问题的高斯和高阶无迹卡尔曼滤波算法。

定理 2 对于某概率密度函数 $P(\mathbf{x})$,其近似表达 $P_m(\mathbf{x})$ 可以表示成如下形式

$$P_m(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^m \rho_i N(\mathbf{x}; u_i, \Sigma_i) \quad (27)$$

其中 m 为高斯分量的个数; ρ_i 为第 i 个高斯分量对应的权重; $N(\mathbf{x}; u_i, \Sigma_i)$ 为高斯概率密度函数,均值为 u_i ,协方差为 Σ_i . 文献[17]中对高斯和定理进行了详细论述,并指出随着高斯分量数目的不断增加,高斯混合结果能近似任意的非线性概率密度函数。

为了合理的选择高斯混合参数,例如权重 ρ_i 、均值 u_i 和协方差 Σ_i ,设近似的概率密度函数 $P_m(\mathbf{x})$ 与真实的非高斯概率密度函数 $P(\mathbf{x})$ 的 L^n 范数为

$$\|P - P_m\|^n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| P(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \rho_i N(\mathbf{x} - u_i, \Sigma_i) \right|^n d\mathbf{x} \quad (28)$$

要使概率密度函数 $P_m(\mathbf{x})$ 得到最优的近似效果,选择合理的参数使范数最小即可,一般选择 $n=2$ ^[18].

3.2 高斯和确定采样型滤波

根据高斯和定理,任何非高斯状态分布都可以通过若干个高斯分布以加权的形式近似表示,且近似的误差可任意小.因此,对于过程噪声和量测噪声为加性非高斯噪声的系统,可以将非高斯分布表示成高斯概率密度叠加和的形式,再利用非线性贝叶斯滤波理论得到高斯和确定采样型滤波算法,该算法步骤如下:

(1) **初始化** 设 k 时刻加性过程噪声为 \mathbf{w}_k ,量测噪声为 \mathbf{v}_k ,由高斯和定理,先验噪声概率密度可以分别由如下形式表示

$$\begin{aligned} P(\mathbf{w}_k) &\approx \sum_{i=1}^{I_k} \beta_{ki} p_i(\mathbf{w}_k) \\ &= \sum_{i=1}^{I_k} \beta_{ki} N(\mathbf{w}_k; \bar{\mathbf{w}}_{ki}, \mathbf{Q}_{ki}) \end{aligned} \quad (29)$$

$$P(\mathbf{v}_k) \approx \sum_{j=1}^{J_k} \mu_{kj} p_j(\mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{J_k} \mu_{kj} N(\mathbf{v}_k; \bar{\mathbf{v}}_{kj}, \mathbf{R}_{kj}) \quad (30)$$

其中, I_k 和 J_k 分别为近似过程噪声与量测噪声所用高斯分量的个数; β_{ki} 和 μ_{kj} 分别为各高斯分量的权值,并满足 $\sum_{i=1}^{I_k} \beta_{ki} = 1$ 和 $\sum_{j=1}^{J_k} \mu_{kj} = 1$. 初始时刻的先验状态概率密度也可表示为高斯和的形式

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_0) &\approx \sum_{\tau=1}^{T_0} \alpha_{0\tau} p_{\tau}(\mathbf{x}_0) \\ &= \sum_{\tau=1}^{T_0} \alpha_{0\tau} N(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_{0\tau}, \mathbf{P}_{0\tau}) \end{aligned} \quad (31)$$

其中, T_0 为近似先验状态概率密度所采用高斯分量个数, $\alpha_{0\tau}$ 为各高斯分量对应的权值,满足 $\sum_{\tau=1}^{T_0} \alpha_{0\tau} = 1$. 同样,高斯和确定采样型滤波包括时间更新和量测更新两个过程,在每一次估计过程中,二者交替进行。

(2) **时间更新** 设 $k-1$ 时刻的后验概率密度 $P(\mathbf{x}_{k-1} | z_{1:k-1})$ 已知,并由高斯和定理表示为如下形式

$$P(\mathbf{x}_{k-1} | z_{1:k-1}) = \sum_{\tau=1}^{T_{k-1}} \alpha_{(k-1)k-1,\tau} N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{x}_{(k-1)k-1,\tau}, \mathbf{P}_{(k-1)k-1,\tau}) \quad (32)$$

根据式(29)中的过程噪声,可以得到 k 时刻的状态一步转移概率密度 $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$

$$P(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{I_k} \beta_{ki} N(\mathbf{x}_k; f(\mathbf{x}_{k-1}) + \bar{\mathbf{w}}_{ki}, \mathbf{Q}_{ki}) \quad (33)$$

利用贝叶斯递推公式,可以求得 k 时刻 \mathbf{x}_k 的状态概率密度估计

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_k | z_{1:k-1}) &= \int P(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) P(\mathbf{x}_{k-1} | z_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &= \sum_{\tau=1}^{T_{k-1}} \sum_{i=1}^{I_k} \alpha_{(k-1)k-1,\tau} \beta_{ki} \times \int N(\mathbf{x}_k; f(\mathbf{x}_{k-1}) \\ &\quad + \bar{\mathbf{w}}_{ki}, \mathbf{Q}_{ki}) N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)k-1,\tau}, \mathbf{P}_{(k-1)k-1,\tau}) d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (34)$$

式中,等号右边的积分项可以利用高斯确定采样型滤波中的时间更新步骤近似求得,从而得到概率密度函数 $P(\mathbf{x}_k | z_{1:k-1})$

$$P(\mathbf{x}_k | z_{1:k-1}) = \sum_{r=1}^{T_k, I_k} \alpha_{(klk-1)r} N(\mathbf{x}_{klk-1}; \hat{\mathbf{x}}_{(klk-1)r}, \mathbf{P}_{(klk-1)r}) \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_{(klk-1)r} &= \alpha_{(klk-1)\tau} \beta_{ki} \\ \hat{\mathbf{x}}_{(klk-1)r} &= \bar{\mathbf{w}}_{ki} + \sum_{\lambda=1}^m \omega_{\lambda} \mathbf{X}_{(klk-1)\tau}^* \\ \mathbf{P}_{(klk-1)r} &= \mathbf{Q}_{ki} + \sum_{\lambda=1}^m \omega_{\lambda} (\mathbf{X}_{(klk-1)\tau}^* - \hat{\mathbf{x}}_{(klk-1)r} - \bar{\mathbf{w}}_{ki}) \\ &\quad \cdot (\mathbf{X}_{(klk-1)\tau}^* - \hat{\mathbf{x}}_{(klk-1)r} - \bar{\mathbf{w}}_{ki})^T \\ \mathbf{X}_{(klk-1)r}^* &= f(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)k-1,\tau}) + \sqrt{\mathbf{P}_{(k-1)k-1,\tau}} \boldsymbol{\sigma}_{\lambda} \end{aligned}$$

至此,时间更新结束,从式(35)可以看出状态一步预测概率密度 $P(\mathbf{x}_k | z_{1:k-1})$ 被 $T_{k-1} I_k$ 项高斯分量表示.

(3) 量测更新根据式(30)所示的非高斯量测噪声形式,代入量测非线性方程中,得到似然概率密度 $P(z_k | \mathbf{x}_k)$

$$P(z_k | \mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^{J_k} \mu_{kj} N(z_k | h(\mathbf{x}_{klk-1}) + \bar{v}_{kj}, R_{kj}) \quad (36)$$

当 k 时刻的量测量 z_k 到来后,则可以利用高斯确定采样型滤波中的量测更新步骤将后验概率密度 $P(\mathbf{x}_k | z_{1:k})$ 表示为高斯和形式

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_k | z_{1:k}) &\approx \sum_{r=1}^{T_{k-1} I_k} \sum_{j=1}^{J_k} \alpha_{\langle klk \rangle r} N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{\langle klk \rangle r}, \mathbf{P}_{\langle klk \rangle r}) \\ &= \sum_{r=1}^{T_{k-1} I_k} \alpha_{\langle klk \rangle r} N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{\langle klk \rangle r}, \mathbf{P}_{\langle klk \rangle r}) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{其中 } \alpha_{\langle klk \rangle r} = \frac{\alpha_{\langle klk-1 \rangle r} \Omega_{k\tau ij} \mu_{kj}}{\sum_{j=1}^{J_k} \sum_{r=1}^{T_{k-1} I_k} \alpha_{\langle klk-1 \rangle r} \Omega_{k\tau ij} \mu_{kj}}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{\langle klk \rangle r} = \hat{\mathbf{x}}_{\langle klk-1 \rangle r} + K_{k,\tau ij} (z_k - \hat{z}_{\langle klk-1 \rangle r})$$

$$\mathbf{P}_{\langle klk \rangle r} = \mathbf{P}_{\langle klk-1 \rangle r} - K_{k,\tau i} \mathbf{P}_{z,\tau i} K_{k,\tau i}^T$$

$$\text{其中 } K_{k,\tau ij} = \mathbf{P}_{z,\tau ij} \mathbf{P}_{z,\tau ij}^{-1}$$

$$\mathbf{P}_{z,\tau ij} = \sum_{\lambda=1}^m \omega_{\lambda} (X_{\lambda \langle klk-1 \rangle \tau} - \hat{\mathbf{x}}_{\langle klk-1 \rangle r}) (Z_{\lambda \langle klk-1 \rangle \tau} - \hat{z}_{\langle klk-1 \rangle r} - \bar{v}_{kj})^T$$

$$\mathbf{P}_{z,\tau ij} = R_{kj} + \sum_{\lambda=1}^m \omega_{\lambda} (Z_{\lambda \langle klk-1 \rangle \tau} - \hat{z}_{\langle klk-1 \rangle r} - \bar{v}_{kj}) (Z_{\lambda \langle klk-1 \rangle \tau} - \hat{z}_{\langle klk-1 \rangle r} - \bar{v}_{kj})^T$$

$$\hat{z}_{\langle klk-1 \rangle r} = \bar{v}_{kj} + \sum_{\lambda=1}^m \omega_{\lambda} Z_{\lambda \langle klk-1 \rangle \tau}$$

$$Z_{\lambda \langle klk-1 \rangle \tau} = h(X_{\lambda \langle klk-1 \rangle \tau})$$

$$X_{\lambda \langle klk-1 \rangle \tau} = \hat{\mathbf{x}}_{\langle klk-1 \rangle r} + \sqrt{\mathbf{P}_{\langle klk-1 \rangle r}} \sigma_{\lambda}$$

$$\Omega_{k\tau i} = N(z_k; \hat{z}_{\langle klk-1 \rangle r}, \mathbf{P}_{z,\tau i})$$

最后,基于最小方差估计准则的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{klk}$ 及其协方差 \mathbf{P}_{klk} 可以由各个高斯分量中的状态估计和协方差进行加权求和得到

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk} = \sum_{r=1}^{T_{k-1} I_k} \sum_{j=1}^{J_k} \alpha_{\langle klk \rangle r} \hat{\mathbf{x}}_{\langle klk \rangle r} \quad (38)$$

$$\mathbf{P}_{klk} = \sum_{r=1}^{T_{k-1} I_k} \sum_{j=1}^{J_k} \alpha_{\langle klk \rangle r} \mathbf{P}_{\langle klk \rangle r} \quad (39)$$

由以上步骤可以看出,高斯分量的数目在时间更新阶段由 T_{k-1} 项增长到 $T_{k-1} I_k$ 项,量测更新过程又增加到 $T_{k-1} I_k J_k$ 项.随着算法运行时间的推移,高斯分量的数目会越来越多,导致算法实时性降低.因此,有必要对减少高斯分量数目的方法进行研究.事实上,在利用高斯和定理进行近似的过程中,某些高斯分量的权重,例如式(35)中的 $\alpha_{\langle klk-1 \rangle r}$,式(37)中的 $\alpha_{\langle klk \rangle r}$ 与其它分量的权重相比非常小,对最终状态估计的结果影响甚微.因此,可以采用权重阈值比较的方法直接去掉权重非常小的高斯分量或将它们进行合并,减小由于对不必要分量

计算而引起的实时性降低问题^[19,20].

4 仿真实验

下面通过用两个仿真实例分别对 HUT 机制和 GS-HUKF 算法进行验证.

(1) 实例 1: 小球碰壁反弹模型

小球碰壁反弹模型具有很强的非线性,在文献[6]、[16]中作为范例验证 UT 变换的性能,对该模型描述如下:某弹性小球以初始速度 $v_0 = -1 \text{ m/s}$ 撞向某一障碍物,碰撞到障碍物之后发生弹性形变,以相反的速度离开障碍物.记撞击时刻为 0 时刻,撞击点为原点,忽略除小球所受外力.小球与障碍物的距离 y 可以表示为初始距离 x 与时间 t 的函数

$$y = g(x, t) = |x + v_0 t| \quad (40)$$

设小球离障碍物的初始距离 x 服从标准正态分布,通过理论分析,随着时间变化的距离均值及其方差可以通过下面的表达式计算:

$$\begin{aligned} \bar{y} = E(Y) &= \int_{-\infty}^{v_0 t} (v_0 t - z) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{v_0 t}^{+\infty} (z - v_0 t) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= v_0 t \times \text{erf}\left(\frac{v_0 t}{\sqrt{2P_x}}\right) + \sqrt{\frac{2P_x}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v_0 t}{P_x}\right)^2} \end{aligned} \quad (41)$$

$$P_y = E\{(Y - \bar{y})^2\} = P_x + (v_0 t)^2 - \bar{y}^2 \quad (42)$$

采用普通的 UT 变换和 HUT 变换所得到的 Sigma 点进行近似,对小球离障碍物的距离均值 \bar{y} 及其方差 P_y 进行估计, HUT 变换所选用的 Sigma 点如表 1 所示.

表 1 HUT 变换采样点

HUT 变换	Sigma 点	权值	点数
4 阶 HUT	$\sigma_1 = 1.7321$	$\omega_0 = 0.6667 \quad \omega_1 = 0.1667$	3
8 阶 HUT	$\sigma_1 = 1.3556$ $\sigma_2 = 2.8570$	$\omega_0 = 0.5333 \quad \omega_1 = 0.2221$ $\omega_2 = 0.0113$	5
20 阶 HUT	$\sigma_1 = 0.9289$ $\sigma_2 = 1.8760$ $\sigma_3 = 2.8651$ $\sigma_4 = 3.9362$ $\sigma_5 = 5.1880$	$\omega_0 = 0.3694$ $\omega_1 = 0.2422$ $\omega_2 = 0.0661$ $\omega_3 = 0.0067$ $\omega_4 = 1.9567e-4$ $\omega_5 = 8.128e-7$	11

从表 1 可以看出,所选用的 Sigma 点均呈对称分布,其中 4 阶中心矩匹配 HUT 所采用的 Sigma 点、权值与普通的 UT 变换完全相同,它们最高可以捕获非线性变换后变量的前 4 阶中心矩;8 阶中心矩匹配 HUT 变换包括 5 个 Sigma 点,最高可以捕获非线性变换后的前 8 阶中心矩;20 阶中心矩匹配 HUT 变换包括 11 个 Sigma 点,最高可以捕获非线性变换后的前 20 阶中心矩.

将普通的 UT、8 阶 HUT 以及 20 阶 HUT 得到的 Sigma 点分别用于对弹性小球离障碍物的距离均值 \bar{y} 以及

方差 P_y 进行近似. 近似得到的仿真结果如图 2 ~ 图 5 所示, 其中图 2 为小球离障碍物距离的估计曲线, 图 3 为

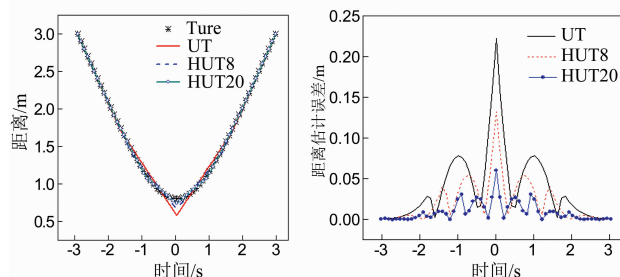


图2 距离估计曲线

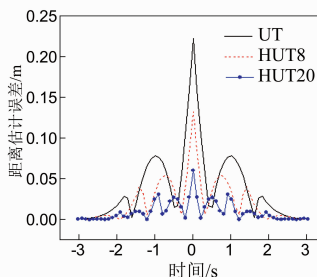


图3 距离估计误差曲线

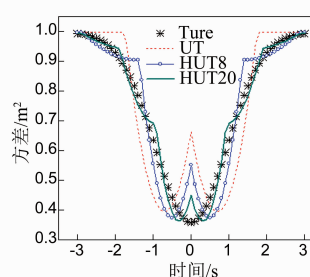


图4 方差估计曲线

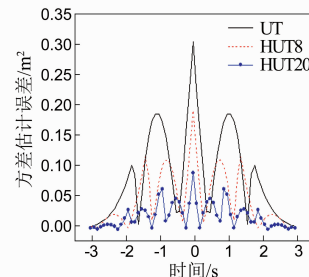


图5 方差估计误差曲线

从图 2 ~ 图 5 可以看出, 通过普通 UT、8 阶 HUT 以及 20 阶 HUT 得到的 Sigma 点均能够近似出真实的距离均值与方差的变化, 20 阶 HUT 近似的结果精度最优, 8 阶 HUT 次之, 普通的 UT 精度相对较低. 由此可以看出, 矩匹配的阶数越高, 得到非线性变换估计结果的精度也相对较高. 然而, 随着 Sigma 点数的增多, 计算复杂度也会随之增加. 因此, 如何合理的选用 Sigma 点, 还需要根据实际的系统与需求确定.

(2) 实例 2: 单变量非平稳增长模型

利用单变量非平稳增长模型 (Univariate Nonstationary Growth Model, UNGM) 验证 GS-HUKF 算法的性能, 很多文献都对该模型进行了研究^[21], 其形式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = 0.5\mathbf{x}_{k-1} + 25 \frac{\mathbf{x}_{k-1}}{1 + \mathbf{x}_{k-1}^2} + 8\cos(1.2(k-1)) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \frac{\mathbf{x}_k^2}{20} + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (43)$$

$k = 1, \dots, N$

其中, 假设过程噪声服从 Gamma 分布, $\mathbf{w}_k \sim \Gamma(3, 2)$; 量测噪声 \mathbf{v}_k 为服从标准正态分布的高斯白噪声. 产生的参考数据初值 $\mathbf{x}_0 = 0.1$, 数据长度 $N = 100$.

每次运行的初值 \mathbf{x}_0 从区间 $[0, 1]$ 中随机抽取, 根据量测数据 \mathbf{z}_k 序列对状态 \mathbf{x}_k 进行估计, 利用均方根误差对估计的结果进行评估

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n|n})^2 \quad (44)$$

将高斯和确定采样型滤波算法包括 GS-HUKF、高斯和无迹卡尔曼滤波 (Gaussian Sum Unscented Kalman Filter, GS-UKF) 与高斯和求积卡尔曼滤波 (Gaussian Sum Quadrature Kalman filter, GS-QKF) 进行了比较, 由于粒子滤波估计精度较高, 因此, 也将 GS-PF 进行仿真, 作为估计精度的参考. 运行 50 次蒙特卡罗仿真的均方根误差曲线如图 6 所示. GS-HUKF 中所选用的 Sigma 点按表 1 进行选取. GS-QKF 算法中, QKF 中选用的采样点数为 3 个. GS-PF 中选用的是基于序贯重要性采样 (Sequential Importance Resampling, SIR) 的粒子滤波算

距离的估计误差; 图 4 为小球离障碍物距离协方差的估计曲线, 图 5 为协方差的估计误差.

法, 其中粒子个数为 300.

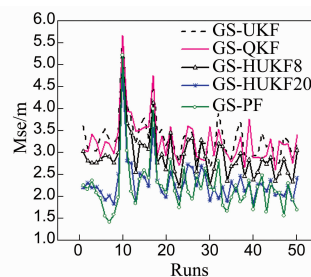


图6 运行50次蒙特卡罗仿真的均方根误差曲线

由图 6 中曲线可以看出, GS-UKF 与 GS-QKF 估计误差较大, 两种算法估计结果相近, 这是由于 Sigma 点个数为 3 的 QKF 与普通对称采样策略 UKF 具有相同的估计精度水平. 但是 QKF 受限于“维数诅咒”问题, 在高维系统中的应用比较困难. 在所有的算法中, GS-PF 和 GS-HUKF20 跟踪精度较高, 优于 GS-UKF、GS-QKF 和 GS-HUKF8. 表 2 统计了所有以上滤波算法运行 50 次蒙特卡罗仿真得到的均方根误差、误差方差以及运行时间.

表 2 运行 50 蒙特卡罗仿真统计结果

算法	均值	方差	运行时间 (s)
GS-UKF	3.2987	0.2331	1.48
GS-QKF	3.2835	0.2317	1.50
GS-HUKF8	2.8951	0.2469	1.69
GS-HUKF20	2.3100	0.2265	2.55
GS-PF	2.2271	0.2446	38.18

由表 2 可以看出, 根据算法运行的时间对算法的计算复杂度进行评估, 结合估计精度表现, 可以得出如下结论: GS-HUKF 计算复杂度高于 GS-UKF, 但处于同一个量级, 而其估计精度比 GS-UKF 有大幅提高; GS-PF 的估计精度与 GS-HUKF20 估计精度相当, 但是其运行时间远远高于 GS-HUKF. 由此可以看出, GS-HUKF 是一种能够较好兼顾计算复杂度和估计精度的非线性、非高斯滤波算法.

5 结论

本文对基于数值积分的采样点确定方法进行了研

究,提出了 HUT 方法,通过该方法产生的 Sigma 点可近似随机变量非线性变换后概率密度分布的高阶矩,与普通 UT 相比,HUT 近似精度更高,将其应用到非线性贝叶斯滤波理论框架,得到了 HUKF 算法.进一步的,将 HUKF 与高斯和滤波理论相结合,得到一类能够用于处理非线性、非高斯问题的 GS-HUKF 算法,通过数值仿真对提出的算法进行了验证,与现有的高斯和算法相比,GS-HUKF 能够较好兼顾计算复杂度和估计精度,证明了其优越性.

参考文献

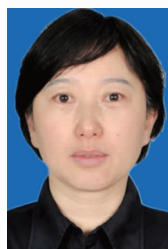
- [1] Pei H L, Sanjeev A, Tharaka A L, Thushara D A. A Gaussian-Sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(2): 1161 – 1176.
- [2] Lim, K P. Ranking market efficiency for stock markets: A nonlinear perspective [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2007, 376(10): 445 – 454.
- [3] Zhang H, Feng G, Han C. Linear estimation for random delay systems [J]. Systems and Control Letters, 2011, 60(7): 450 – 459.
- [4] Li W, Jia Y. Distributed consensus filtering for discrete-time nonlinear systems with non-Gaussian noise [J]. Signal Processing, 2012, 92(10): 2464 – 2470.
- [5] Schei T S. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms [J]. Automatica, 1997, 33(11): 2053 – 2058.
- [6] Julier S J, et al. A new approach for filtering nonlinear systems [A]. Proceedings of the American Control Conference [C]. Seattle: IEEE, 1995. 1628 – 1632.
- [7] Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss – Hermite quadrature [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 953 – 977.
- [8] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature kalman filters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254 – 1269.
- [9] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 910 – 927.
- [10] Brunke S, Campbell M. Square root sigma point filtering for real-time, nonlinear estimation [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, 27(2): 314 – 317.
- [11] Li W, Jia Y. Distributed consensus filtering for discrete-time nonlinear systems with non-Gaussian noise [J]. Signal Processing, 2012, 92(10): 2464 – 2470.
- [12] Alspach D L, Sorenson H W. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1972, 17(4): 439 – 448.
- [13] M Sanjeev Arulampalam, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(2): 174 – 188.
- [14] Julier S J, et al. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401 – 422.
- [15] Ponomareva K, Date P, Wang Z. A new unscented Kalman filter with higher order moment-matching [A]. Proceedings of Mathematical Theory of Networks and Systems [C]. Budapest: Eötvös Loránd University (ELTE), 2010. 1609 – 1613.
- [16] Tenne D, Singh T. The higher order unscented filter [A]. Proceedings of the IEEE American Control Conference [C]. New York: IEEE, 2003. 2441 – 2446.
- [17] Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss – Hermite quadrature [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 953 – 977.
- [18] Caputi M, Moose R L. A modified Gaussian sum approach to estimation of non-Gaussian signals [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 29(2): 446 – 451.
- [19] Clark J M C, Kountouriotis P A, Vinter R B. A Gaussian mixture filter for range-only tracking [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(3): 602 – 613.
- [20] Horwood J T, Poore A B. Adaptive Gaussian sum filters for space surveillance [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(8): 1777 – 1790.
- [21] Wu Y, Hu D, Wu M, et al. A numerical-integration perspective on Gaussian filters [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(8): 2910 – 2921.

作者简介



王 磊(通信作者) 男,1984 年出生,博士、讲师,研究方向为非线性滤波理论与方法、多传感器信息融合技术。

E-mail: frank_408@163.com



程向红 女,1963 年出生,博士、教授,研究方向为惯性导航技术、组合导航系统理论与方法。

E-mail: xhcheng@seu.edu.cn