基于剩余格语义的格值逻辑系统的程度化方法

左卫兵
(华北水利水电大学数学与信息科学学院,河南郑州 450046)

摘　要: 基于剩余格的赋值态理论,通过在剩余格全体赋值态集和全体公式集上分别建立概率测度,利用积分方法提出了剩余格语义上公式的概率真度,进而在剩余格语义上建立了概率逻辑度量空间,将计量逻辑学中近似推理方法推广到剩余格语义上,为剩余格语义的概率计量化提供了一种可行的方法.

关键词: 剩余格; 赋值态; 概率真度; 概率逻辑度量空间; 近似推理
中图分类号: O141.1, O153.1　**文献标识码:** A　**文章编号:** 0372-2112 (2017)08-1842-07
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn　**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.08.006

Graded Method of Lattice-Valued Logic System Based on Residuated Lattice Semantics

ZUO Wei-bing
(*College of Mathematics and Information Science*, *North China University of Water Resources and Electric Power*, *Zhengzhou*, *Henan* 450046, *China*)

Abstract: Based on evaluation state theory of residuated lattice and by defining probability measure in set of all evaluation states of residuated lattice and set of all formulate respectively, the probability truth degree of formula in residuated lattices semantics is introduced using the integral method, then the probability logic metric space is established in residuated lattices semantics, the approximate reasoning of quantitative logic methods have been entended to residuated lattices semantics, the feasible graded method of residuated lattices semantics is provided.

Key words: residuated lattice; evaluation state; probability truth degree; probability logic metric space; approximate reasoning.

1　引言

自 20 世纪 70 年代 Pavelka 关于命题逻辑中结论程度化的思想提出以后[1],关于逻辑结论的程度化问题吸引了众多学者的关注,并在结论程度化方法的研究方面取得了一系列的研究成果[2~18],其中文献[5]基于均匀概率的思想首先提出了命题逻辑系统中公式的真度概念和逻辑度量空间理论,逐步形成了计量逻辑学[8,9],为逻辑系统的程度化推理提供了新的方法,并引发了大量后续研究[10~18].

我们知道,经典逻辑、多值逻辑和模糊逻辑系统的赋值域均是线性格即链,链中任何元素均可比较大小(在偏序意义下),这样的逻辑系统自然有其优越性,但也表现出与现实中赋值存在不可比较性相悖的缺点.事实上,以格为赋值集的逻辑系统早已有之[9],文献[19]研究了基于格蕴涵代数的格值逻辑上的推理理论,文献[20]研究了一种剩余格值逻辑系统的完备性等.一个自然的想法是,如何将上述计量化的思想推广到格值逻辑,从而在格值逻辑中建立类似的真度理论.事实上,文献[21]在有限 Boole 代数为赋值格的格值逻辑上通过定义有限 Boole 代数中元素的“级”的方法,提出了基于有限 Boole 语义的经典命题逻辑中公式的真度的概念,从而尝试性地将计量化的思想引入到格值逻辑之中.然而值得注意的是,这种真度理论是基于有限赋值格而设计的,因而无法适用于一般的格值逻辑.文献[22~24]基于概率空间通过积分的方法分别在 Boole 代数赋值格、MV 代数赋值格和 MTL 代数赋值格上提出了格值逻辑计量化的新方法,为格值逻辑的计

收稿日期:2016-07-26;修回日期:2016-11-22;责任编辑:孙瑶
基金项目:河南省基础与前沿技术研究计划(No. 152300410112)

量化做了很好的尝试.

剩余格是由美国学者 Ward 和 Dilworth 于 1939 年为研究交换环的全体理想的格结构时首次引入的[25],它是子结构命题逻辑的语义代数[26]. 模糊逻辑的语义代数,如 MTL 代数、BL 代数、MV 代数、R_0 代数以及 Heyting 代数都是具有某种特殊代数结构的剩余格. 因此作为上述工作的继续,本文研究以剩余格为赋值格的命题逻辑系统的计量化. 通过在剩余格的全体赋值态集合上定义概率空间,利用积分方法定义了剩余格中元素的特征数,借助特征数的概念定义了剩余格语义上公式的概率真度;进一步在剩余格语义上建立概率逻辑度量空间,将计量逻辑学中近似推理方法推广到剩余格语义上,为剩余格语义的格值逻辑系统的概率计量化提供了一种可行的方法.

2　预备知识

定义 1[26]　剩余格是(2,2,2,2,0,0)型代数 $M=(M,\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow,0,1)$满足条件:

(M1)$(M,\wedge,\vee,0,1)$是有界格,

(M2)$(M,\otimes,1)$是交换的幺半群,

(M3)对任意的 $x,y,z\in M$,$x\otimes y\leqslant z$ 当且仅当 $x\leqslant y\rightarrow z$.

设 M 是剩余格,任给 $x,y\in M$,如果 M 满足$(x\rightarrow y)\vee(y\rightarrow x)=1$,则称 M 为 MTL 代数;可分的 MTL 代数称为 BL 代数;对合的 BL 代数称为 MV 代数. 幂等的剩余格称为 Heyting 代数. 任给 $x\in M$ 可定义$\neg x=x\rightarrow 0$. 如果 M 满足$\neg\neg x=x$ 和$((x\otimes y)\rightarrow 0)\vee((x\wedge y)\rightarrow(x\otimes y))=1$,则称 M 为 R_0 代数(即 NM 代数).

命题 1[26]　设 M 是剩余格,任给 $x,y,z\in M$,则

(1) $x\leqslant y$ 当且仅当 $x\rightarrow y=1$;

(2) 若 $x\leqslant y$,则 $x\otimes z\leqslant y\otimes z$;

(3) 若 $x\leqslant y$,则 $y\rightarrow z\leqslant x\rightarrow z$,$z\rightarrow x\leqslant z\rightarrow y$;

(4) $x\rightarrow(y\rightarrow z)=(x\otimes y)\rightarrow z=y\rightarrow(x\rightarrow z)$;

(5) $x\vee y\leqslant(x\rightarrow y)\rightarrow y$,$y\leqslant x\rightarrow y$;

(6) $x\vee y\rightarrow y=x\rightarrow y=x\rightarrow x\wedge y$;

(7) $x\leqslant\neg\neg x$,$\neg\neg\neg x=\neg x$;

(8) $x\rightarrow y\leqslant\neg y\rightarrow\neg x\leqslant\neg\neg x\rightarrow\neg\neg y$;

(9) $\neg(x\otimes y)=x\rightarrow\neg y=y\rightarrow\neg x$;

(10) 规定 $d(x,y)=(x\rightarrow y)\wedge(y\rightarrow x)$,则 $d(x,y)=x\vee y\rightarrow x\wedge y$.

有关剩余格更详细的性质请参阅文献[26,27].

我们知道,全序剩余格都是 MTL 代数,$[0,1]$上的左连续三角模$\otimes$及其伴随$\rightarrow$都可使$([0,1],\min,\max,\otimes,\rightarrow,0,1)$成为 MTL 代数,称为标准 MTL 代数. 常见的几种左连续三角模:

$x\otimes_G y=x\wedge y$,$x\otimes_\Pi y=x\times y$,

$x\otimes_L y=(x+y-1)\vee 0$,

$$x\otimes_0 y=\begin{cases}x\wedge y, & x+y>1\\ 0, & x+y\leqslant 1\end{cases}$$

分别称为 Gödel 三角模、乘积三角模、Lukasiewicz 三角模和 R_0 三角模,与它们各自相伴随的蕴涵算子分别为:

$$x\rightarrow_G y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ y, & x>y\end{cases},\quad x\rightarrow_\Pi y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ \dfrac{y}{x}, & x>y\end{cases},$$

$x\rightarrow_L y=(1-x+y)\wedge 1$,

$$x\rightarrow_0 y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ (1-x)\vee y, & x>y\end{cases}$$

依次称为 Gödel 蕴涵算子、Goguen 蕴涵算子、Lukasiewicz 蕴涵算子与 R_0 蕴涵算子.

设 M 是剩余格,$[0,1]_{MV}$是标准 MV 代数,用 Θ 表示从 M 到$[0,1]_{MV}$的全体同态(赋值态)之集,即$\forall f\in\Theta$有$f(x\rightarrow y)=f(x)-f(y)$,$f(x\wedge y)=\min\{f(x),f(y)\}$,$f(1)=1$,$f(0)=0$,$x,y\in M$. 由文献[27]知,若 M 有极大 MV 滤子,则 $\Theta\neq\varnothing$. 本文以下部分假定剩余格 M 存在极大 MV 滤子. 由剩余格 M 上的赋值态都是 Bosbach 态,有如下性质.

命题 2　设 $f\in\Theta$,$x,y\in M$,则

(1) $f(\neg x)=1-f(x)$,$f(x)=f(\neg\neg x)$;

(2) 若 $x\leqslant y$,则 $f(x)\leqslant f(y)$;

(3) $f(x)+f(y)=f(x\wedge y)+f(x\vee y)$;

(4) $f(x\rightarrow y)=f(x\wedge y)-f(x)+1$;

(5) $f(x)+f(x\rightarrow y)=f(y)+f(y\rightarrow x)$;

(6) $f(x\otimes y)=1-f(x\rightarrow\neg y)$;

(7) $f(x)+f(y)=f(x\otimes y)+f(x\oplus y)$;

(8) $f((x\rightarrow y)\vee(y\rightarrow x))=1$.

设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$为原子公式集,$F(S)$是由 S 生成的$(\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow)$型自由代数,称 $F(S)$中的元为命题(或公式).

定义 2

(1) 设 M 是剩余格,则称$(\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow)$型同态 $v:F(S)\rightarrow M$ 为 $F(S)$的 M-赋值,即 $v(A\wedge B)=v(A)\wedge v(B)$,$v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)$,$v(A\otimes B)=v(A)\otimes v(B)$,$v(A\rightarrow B)=v(A)\rightarrow v(B)$,$A,B\in F(S)$.

$F(S)$的 M-赋值的全体之集记为 Ω.

(2) 设 $A\in F(S)$,若$\forall v\in\Omega$恒有 $v(A)=1$,则称 A 为 M-重言式;若$\forall v\in\Omega$恒有 $v(A)=0$,则称 A 为 M-矛盾式.

由 $F(S)$是由 S 生成的自由代数知 v 由它在 S 上的限制所完全决定.

3　剩余格语义中公式的概率真度

设(Θ,A,θ)是均匀概率测度空间,这里 A 是 Θ 上

的σ－代数，θ是Θ上的均匀概率测度. $\forall x\in M$，定义函数$x(f)=f(x)$，$f\in\Theta$，则函数x是(Θ,A,θ)上的可测函数，从而函数x是Θ上的θ－可积函数[27].

定义 3 定义$\varphi:M\to[0,1]$如下

$$\varphi(x)=\int_\Theta x(f)\,\mathrm{d}\theta,x\in M \tag{1}$$

则称$\varphi(x)$为x的特征数.

注 1

(1)考虑菱形格M，即$M=\{0,a,b,1\}$，其中$\neg a=b$，$\neg b=a$，$\neg 0=1$，$\neg 1=0$，$a\vee b=1$，$a\wedge b=0$，则M是Boole代数，从而M是剩余格. 易证$\Theta=\{f_1,f_2\}$，其中$f_1(a)=f_2(b)=1$，$f_1(b)=f_2(a)=0$，$f_i(0)=0$，$f_i(1)=1$，$i=1,2$. 由θ是Θ上的均匀概率测度知，$\theta(f_1)=\theta(f_2)=\frac{1}{2}$，计算得$\varphi(1)=1$，$\varphi(0)=0$，$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{1}{2}$.

(2)设M是任一MTL代数，可知$\Theta=\{f|f:M\to[0,1]$是MV代数同态$\}$，从而对于MTL代数M中的元素x，本文定义的x的特征数与文献[24]中MTL代数语义下定义的x的特征数是相等的.

(3)设M是标准MTL代数，由于$\Theta=\{f\}$，其中$f(x)=x$，$x\in[0,1]$，从而$\forall x\in[0,1]$有$\varphi(x)=f(x)=x$. 说明特征数的概念是数的概念在剩余格的推广.

命题 3

(1) $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，$x\in M$；

(2) $\varphi(1)=1$，$\varphi(0)=0$；

(3) $\varphi(\neg x)=1-\varphi(x)$；

(4) 若$x\leqslant y$，则$\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$，$x,y\in M$；

(5) $\varphi(x\vee y)=\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x\wedge y)$；

(6) $\varphi(x\to y)=\varphi(x\wedge y)-\varphi(x)+1$；

(7) $\varphi(x)+\varphi(x\to y)=\varphi(y)+\varphi(y\to x)$；

(8) $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x\otimes y)+\varphi(x\oplus y)$；

(9) $\varphi((x\to y)\vee(y\to x))=1$.

证明 仅证(6)，其余类似可证.

设$a,b\in[0,1]_{\mathrm{MV}}$，则不难验证$a\to b=(1-a+b)\wedge 1=a\wedge b-a+1$. 所以$\forall x,y\in M$，$\forall f\in\Theta$，有

$$\begin{aligned}x\to y(f)&=f(x\to y)=f(x)\to f(y)\\&=f(x)\wedge f(y)-f(x)+1\\&=f(x\wedge y)-f(x)+1\\&=x\wedge y(f)-x(f)+1\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi(x\to y)&=\int_\Theta x\to y(f)\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_\Theta(x\wedge y-x+1)(f)\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_\Theta x\wedge y(f)\,\mathrm{d}\theta-\int_\Theta x(f)\,\mathrm{d}\theta+\int_\Theta 1\,\mathrm{d}\theta\\&=\varphi(x\wedge y)-\varphi(x)+1\end{aligned}$$

定义 4 $\forall A\in F(S)$，定义广义函数$\bar{A}:\Omega\to M$如下

$$\bar{A}(v)=v(A),v\in\Omega \tag{2}$$

设(Ω,F,μ)是概率测度空间，这里F满足：$\forall A\in F(S)$，$\varphi(\bar{A})$是可测函数，即$(\phi o\bar{A})^{-1}(B_{[0,1]})\subset F$，其中$B_{[0,1]}$是单位区间$[0,1]$上的Borel集合系. 则$\forall A\in F(S)$，函数$\varphi(\bar{A})$是$\mu$－可积的.

定义 5 $\forall A\in F(S)$，定义$\tau:F(S)\to[0,1]$如下

$$\tau(A)=\int_\Omega\varphi(\bar{A}(v))\,\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

称$\tau(A)$为公式A的概率真度，又简称为μ－真度.

注 2

(1) 当赋值格是注1(1)中的菱形格M，(Ω,F,μ)是均匀概率测度空间时，易得$\tau(p_1)=\frac{1}{2}$，$\tau(p_1\to p_2)=\frac{3}{4}$.

(2) 当赋值格M是Boole代数、MV代数或MTL代数时，此定义即为文献[21－24]中公式的概率真度的定义；当赋值格M是标准MV代数时，由注1(3)知

$$\tau(A)=\int_\Omega\varphi(\bar{A}(v))\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\bar{A}(v)\,\mathrm{d}\mu \tag{4}$$

为多值逻辑系统中公式的概率真度[28].

定理 1 设$A,B\in F(S)$，则

(1) $0\leqslant\tau(A)\leqslant 1$；

(2) 若$\vdash A\to B$，则$\tau(A)\leqslant\tau(B)$；

(3) 若$A\approx B$，则$\tau(A)=\tau(B)$；

(4) $\tau(\neg A)=1-\tau(A)$.

定理 2 设$A,B\in F(S)$，则

(1) $\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$；

(2) $\tau(A\to B)=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1$；

(3) $\tau(A)+\tau(A\to B)=\tau(B)+\tau(B\to A)$；

(4) $\tau(A)+\tau(B)=\tau(A\otimes B)+\tau(A\oplus B)$.

在剩余格语义中有相应于多值逻辑中程度化的MP规则、HS规则和交推理规则.

定理 3 设$A,B,C\in F(S)$，$\alpha,\beta\in[0,1]$则

(1) 若$\tau(A)\geqslant\alpha$，$\tau(A\to B)\geqslant\beta$，则$\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$，即$\tau(B)\geqslant\tau(A)\otimes_L\tau(A\to B)$，也即$\tau(A\to B)\leqslant\tau(A)\to_L\tau(B)$；

(2) 若$\tau(A\to B)\geqslant\alpha$，$\tau(B\to C)\geqslant\beta$，则$\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$，即$\tau(A\to C)\geqslant\tau(A\to B)\otimes_L\tau(B\to C)$；

(3)若$\tau(A\to B)\geqslant\alpha$，$\tau(A\to C)\geqslant\beta$，则$\tau(A\to B\wedge C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

证明

(1)由定理2(2)得$\tau(A)+\tau(A\to B)-1=\tau(A\wedge B)\leqslant\tau(B)$，即$\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$；

(2)在剩余格M中下式成立，$\forall a,b,c\in M$，$(b\to c)\to((a\to b)\to(a\to c))=1$. 则$\forall v\in\Omega$有$(B\to C)\to((A$

$\to B)\to(A\to C))(v)=1$ 成立,从而,有 $\tau((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))=1$,又 $\tau(B\to C)\geqslant\beta$,由本定理的(1)得 $\tau((A\to B)\to(A\to C))\geqslant 1+\beta-1=\beta$. 再利用一次本定理的(1)和 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha$,得 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(3)由定理2的(2)得

$$\begin{aligned}\tau(A\to B\wedge C)&=\tau(A\wedge B\wedge C)-\tau(A)+1\\&=\tau(A\wedge B)+\tau(A\wedge C)-\tau(A\wedge(B\vee C))-\tau(A)+1\\&\geqslant\tau(A\wedge B)+\tau(A\wedge C)-2\tau(A)+1\\&\geqslant\tau(A\to B)+\tau(A\to C)-1\\&\geqslant\alpha+\beta-1.\end{aligned}$$

推论 1

(1) 若 $\tau(A)=\tau(A\to B)=1$,则 $\tau(B)=1$.

(2) 若 $\tau(A\to B)=\tau(B\to C)=1$,则 $\tau(A\to C)=1$.

(3) 若 $\tau(A\to B)=\tau(A\to C)=1$,则 $\tau(A\to B\wedge C)=1$.

4　剩余格语义上公式间的概率相似度

基于上述剩余格语义中的概率真度的概念和性质,下面引入公式间的概率相似度.

定义 6　设 $A,B\in F(S)$,定义 $\xi_1:F(S)\times F(S)\to[0,1]$如下

$$\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))\qquad(5)$$

则称 $\xi_1(A,B)$为公式 A 与 B 之间的第一种概率相似度,简称 ξ_1-相似度.

定理 4　$\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1=1-\tau(A\vee B)+\tau(A\wedge B)$,$A,B\in F(S)$.

证明

$\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-\tau((A\to B)\vee(B\to A))$. 由命题3的(9)及定义5可推得 $\tau((A\to B)\vee(B\to A))=1$. 所以 $\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A))-1$.

由定理2(2)得 $\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1=\tau(A\vee B)-\tau(A)+1+\tau(A\wedge B)-\tau(B)+1-1=2\tau(A\wedge B)-\tau(A)-\tau(B)+1=1-\tau(A\vee B)+\tau(A\wedge B)$.

定理 5　设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A,A)=1$,$\xi_1(A,B)=\xi_1(B,A)$,$\xi_1(\neg A,\neg B)\geqslant\xi_1(A,B)$;

(2) $\xi_1(A,B)=1$ 当且仅当 $B\approx A$;

(3)$\xi_1(A\vee B,A\wedge B)=\xi_1(A\to B,B\to A)=\xi_1(A,B)$;

(4) $\xi_1(A,C)\geqslant\xi_1(A,B)\otimes_L\xi_1(B,C)$.

证明　(1)、(2)易证,略去.

(3)$\xi_1(A\vee B,A\wedge B)=1-\tau((A\vee B)\vee(A\wedge B))+\tau((A\vee B)\wedge(A\wedge B))=1-\tau(A\vee B)+\tau(A\wedge B)=\xi_1(A,B)$,

$\xi_1(A\to B,B\to A)=1-\tau((A\to B)\vee(B-A))+\tau((A\to B)\wedge(B\to A))=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))=\xi_1(A,B)$;

(4) 由定理4及定理3的(2),得 $\xi_1(A,C)=\tau(A\to C)+\tau(C\to A)-1\geqslant[\tau(A\to B)+\tau(B\to C)-1]+[\tau(C\to B)+\tau(B\to A)-1]-1=[\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1]+[\tau(B\to C)+\tau(C\to B)-1]-1=\xi_1(A,B)+\xi_1(B,C)-1$,即 $\xi_1(A,C)\geqslant\xi_1(A,B)\otimes_L\xi_1(B,C)$.

推论 2　设 $A,B\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A\vee B,A)=\tau(B\to A)$,$\xi_1(A\wedge B,A)=\tau(A\to B)$;

(2) $\xi_1(A\to B,B)=\tau(A\vee B)$,$\xi_1(A\to B,A)\geqslant\tau(A\wedge B)$;

(3) $\xi_1(A\to B,A\wedge B)=\tau(A)$,$\xi_1(A\to B,A\vee B)\geqslant\tau(B)$.

推论 3　设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1) $\xi_1(A\vee C,B\vee C)\geqslant\xi_1(A,B)$,$\xi_1(A\wedge C,B\wedge C)\geqslant\xi_1(A,B)$;

(2) $\xi_1(A\to C,B\to C)\geqslant\xi_1(A,B)$,$\xi_1(C\to A,C\to B)\geqslant\xi_1(A,B)$;

(3) $\xi_1(A\otimes C,B\otimes C)\geqslant\xi_1(A,B)$.

推论 4　设 $A,B,C,D\in F(S)$,则

(1) $\xi_1(A\wedge C,B\wedge D)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$;

(2) $\xi_1(A\vee C,B\vee D)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$;

(3) $\xi_1(A\to C,B\to D)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$;

(4) $\xi_1(A\otimes C,B\otimes D)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$.

事实上,我们还可以定义如下两个形式简单的概率相似度.

定义 7　设 $A,B\in F(S)$,定义

$$\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)\qquad(6)$$

$$\xi_3(A,B)=(\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A))\qquad(7)$$

称 $\xi_i(A,B)$为公式 A 与 B 之间的第 i 种概率相似度,简称为 ξ_i-相似度,$i=2,3$.

定理 6　设 $A,B,C\in F(S)$,$i=2,3$,则

(1) $\xi_i(A,A)=1$,$\xi_i(A,B)=\xi_i(B,A)$;

(2) $\xi_2(A,B)=1$ 当且仅当 $A\approx B$;若 $A\approx B$,则 $\xi_3(A,B)=1$,但反之不成立;

(3) $\xi_2(\neg A,\neg B)\geqslant\xi_2(A,B)$,$\xi_3(A,B)=\xi_3(\neg A,\neg B)$;

(4) $\xi_i(A,C)\geqslant\xi_i(A,B)\otimes_L\xi_i(B,C)$.

证明　(1)(2)和(3)由定义7易证.

(4) 对于 ξ_2,由定理3的(2)知,$\tau(A\to C)\geqslant\tau(A\to B)\otimes_L\tau(B\to C)$及 $\tau(C\to A)\geqslant\tau(C\to B)\otimes_L\tau(B\to A)=\tau(B\to A)\otimes_L\tau(C\to B)$,再由 MV 代数的基本性质得

$\xi_2(A,C)=\tau(A\to C)\wedge\tau(C\to A)\geqslant(\tau(A\to B)\otimes_L\tau(B\to C))\wedge(\tau(B\to A)\otimes_L\tau(C\to B))=(\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A))\otimes_L(\tau(B\to C)\wedge\tau(C\to B))=\xi_2(A,B)\otimes_L\xi_2(B,C)$.

对于ξ_3，由MV代数的基本性质知$\tau(A)\to_L\tau(C)\geqslant(\tau(A)\to_L\tau(B))\otimes_L(\tau(B)\to_L\tau(C))$及$\tau(C)\to_L\tau(A)\geqslant(\tau(C)\to_L\tau(B))\otimes_L(\tau(B)\to_L\tau(A))=(\tau(B)\to_L\tau(A))\otimes_L(\tau(C)\to_L\tau(B))$，所以$\xi_3(A,C)=(\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A))\geqslant((\tau(A)\to_L\tau(B))\otimes_L(\tau(B)\to_L\tau(C)))\wedge((\tau(B)\to_L\tau(A))\otimes_L(\tau(C)\to_L\tau(B)))=((\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A)))\otimes_L((\tau(B)\to_L\tau(C))\wedge(\tau(C)\to_L\tau(B)))=\xi_3(A,B)\otimes_L\xi_3(B,C)$.

以上三种概率相似度如下关系.

定理 7 设$A,B\in F(S)$，则$\xi_1(A,B)\leqslant\xi_2(A,B)\leqslant\xi_3(A,B)$.

证明 由定理4知，$\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1\leqslant\tau(A\to B)$，又$\xi_1(A,B)\leqslant\tau(B\to A)$，从而$\xi_1(A,B)\leqslant\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)=\xi_2(A,B)$.

由定理3的(1)知，$\tau(A\to B)\leqslant\tau(A)\to_L\tau(B)$，同样$\tau(B\to A)\leqslant\tau(B)\to_L\tau(A)$. 所以，$\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)\leqslant(\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A))=\xi_{3.}(A,B)$.

更进一步有：

定理 8 设$A,B\in F(S)$，则$\xi_2(A,B)=\dfrac{1}{2}(\xi_1(A,B)+\xi_3(A,B))$.

证明 由定理4及定理2的(2)，利用$\alpha\wedge\beta=\dfrac{1}{2}((\alpha+\beta)-|\alpha-\beta|)$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}2\xi_2(A,B)&=2\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)\\&=(\tau(A\to B)+\tau(B\to A))-|\tau(A\to B)\\&\quad-\tau(B\to A)|\\&=(\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1)+1-|(\tau(A\wedge B)\\&\quad-\tau(A)+1)-(\tau(A\wedge B)-\tau(B)+1|\\&=\xi_1(A,B)+1-|\tau(A)-\tau(B)|\\&=\xi_1(A,B)+\xi_3(A,B).\end{aligned}$$

最后一步用到了$\xi_3(A,B)=(\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A))=(1-\tau(A)+\tau(B))\wedge(1-\tau(B)+\tau(A))=1-|\tau(A)-\tau(B)|$. 定理得证.

5 剩余格语义上的概率逻辑度量空间

基于上述三种概率相似度，由定理5和定理6知$1-\xi_i(A,B)$是$F(S)$上的伪度量，从而可自然地在$F(S)$上引入逻辑伪度量.

定义 8 定义$\rho_i:F(S)\times F(S)\to[0,1]$如下

$$\rho_i(A,B)=1-\xi_i(A,B),\ i=1,2,3 \qquad (8)$$

称$(F(S),\rho_i)$是剩余格语义上的第i种概率逻辑度量空间，简称ρ_i-度量空间.

定理 9 设$A,B,C\in F(S)$，$i=1,2,3$，则

(1) $\rho_i(A,A)=0,0\leqslant\rho_i(A,B)\leqslant1$;

(2) $\rho_i(A,B)=\rho_i(B,A)$;

(3) $\rho_i(\neg A,\neg B)\leqslant\rho_i(A,B)$;

(4) $\rho_i(A,C)\leqslant\rho_i(A,B)+\rho_i(B,C)$;

(5) $\rho_1(A,B)=\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)=2-\tau(A\to B)-\tau(B\to A)$;

(6) $\rho_3(A,B)=\tau(A)\vee\tau(B)-\tau(A)\wedge\tau(B)=|\tau(A)-\tau(B)|$;

(7) $\rho_3(A,B)\leqslant\rho_2(A,B)\leqslant\rho_1(A,B)$;

(8) $\rho_2(A,B)=\dfrac{1}{2}(\rho_1(A,B)+\rho_3(A,B))$.

下面我们讨论逻辑运算$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\to$，$\otimes$等在随机逻辑度量空间$(F(S),\rho_i)$上的一致连续性.

定理 10 随机逻辑度量空间$(F(S),\rho_1)$上运算$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\to$，$\otimes$都是一致连续的.

证明 设$A,B,C,D\in F(S)$，由定义8，定理9和推论4得：$\rho_1(\neg A,\neg B)\leqslant\rho_1(A,B)$，$\rho_1(A\vee C,B\vee D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho(C,D)$，$\rho_1(A\wedge C,B\wedge D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho(C,D)$，$\rho_1(A\to C,B\to D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho(C,D)$，$\rho_1(A\otimes C,B\otimes D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho(C,D)$.

所以，若$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n,A)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(B_n,B)=0$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(\neg A_n,\neg A)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\vee B_n,A\vee B)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\wedge B_n,A\wedge B)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\to B_n,A\to B)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\otimes B_n,A\otimes B)=0$. 即运算$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\to$，$\otimes$关于$\rho_1$都是一致连续的.

定理 11 在$F(S)$上ρ_1与ρ_2是等价的伪度量.

证明 因为$\forall A,B\in F(S)$，$\rho_2(A,B)\leqslant\rho_1(A,B)$，为证明$\rho_1$与$\rho_2$是$F(S)$上等价的伪度量，只需证当$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_2(A_n,B_n)=0$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n,B_n)=0$. 事实上，由定理9的(7)知$\rho_3(A_n,B_n)\leqslant\rho_2(A_n,B_n)$，则若$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_2(A_n,B_n)=0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_3(A_n,B_n)=0$. 又由定理9的(8)知$\rho_1(A_n,B_n)=2\rho_2(A_n,B_n)-\rho_3(A_n,B_n)$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n,B_n)=0$. 即$\rho_1$与$\rho_2$是$F(S)$上等价的伪度量.

推论 5 伪度量空间$(F(S),\rho_2)$上运算$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\to$，$\otimes$都是一致连续的.

定理 12 伪度量空间$(F(S),\rho_3)$上运算$\neg$是一致连续的，但$\vee$，$\wedge$，$\to$，$\otimes$关于ρ_3未必连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$，若$\rho_3(A,B)<\varepsilon$，则$\rho_3(\neg A,\neg B)=\rho_3(A,B)<\varepsilon$，即运算$\neg$关于$\rho_3$是一致连续的.

仅举例说明$\vee$，$\wedge$，$\to$，$\otimes$关于ρ_3不连续的. 设$M=[0,1]_{\mathrm{MV}}$，μ是均匀概率测度，令$A=q_1$，$B=q_2$，$C=D=q_3$，可见$\rho_3(A,C)=\rho_3(B,D)=0<\varepsilon$，但$\rho_3(A\vee B,C\vee D)=\rho_3(q_1\vee q_2,q_3)>0$，$\rho_3(A\wedge B,C\wedge D)=\rho_3(q_1\wedge q_2,q_3)>0$，$\rho_3(A\to B,C\to D)=\rho_3(q_1\to q_2,1_L)>0$，即$\vee$，$\wedge$，$\to$关于$\rho_3$不连续；又令$A=q_1$，$B=q_2$，$C=q_3$，$D=$

$\neg q_3$,有 $\rho_3(A,C)=\rho_3(B,D)=0<\varepsilon$,但 $\rho_3(A\otimes B,C\otimes D)=\rho_3=(q_1\otimes q_2,0_L)>0$,即 $\vee,\wedge,\to,\otimes$ 关于 ρ_3 不连续.

下面初步研究剩余格语义中理论的发散度及近似推理理论.

定义 9　设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论,即 $\Gamma\subset F(S)$,令

$$\operatorname{div}_i(\Gamma)=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\} \tag{7}$$

称 $\operatorname{div}_i(\Gamma)$ 为理论 Γ 的第 i 种概率发散度,简称 i-发散度($i=1,2,3$).

定理 13　设 $\Gamma\subset F(S)$,则 $\operatorname{div}_1(\Gamma)=\operatorname{div}_2(\Gamma)=\operatorname{div}_3(\Gamma)=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}$.

证明　设 $T=\{A\mid\tau(A)=1\}$,对于 $\Gamma\subset F(S)$,若 $A\in T$ 则 $A\in D(\Gamma)$,从而 $\operatorname{div}_i(\Gamma)=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\}=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}$. 所以,由定理 9 得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_1(\Gamma)&=\sup\{\rho_1(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{1-\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}\\&=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_3(\Gamma)&=\sup\{\rho_3(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{\tau(A)-\tau(B)\mid\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{1-\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}\\&=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}\end{aligned}$$

即 $\operatorname{div}_1(\Gamma)=\operatorname{div}_3(\Gamma)=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}$.

再由定理 9(8)利用两边夹定理可得结论成立.

可见在三个$(F(S),\rho_i)$上有相同的理论发散度,统一表示为 $\operatorname{div}(\Gamma)$. 若 $\operatorname{div}(\Gamma)=1$,称 Γ 是全发散的.

定义 10　设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论,即 $\Gamma\subset F(S)$,$B\subset F(S)$,$\varepsilon>0$.

(1) 如果 $\rho(B,D(\Gamma))=\inf\{\rho_1(A,B)\mid A\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 $I-$型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.

(2) 如果 $1-\sup\{\tau(A\to B)\mid A\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$ 则称 B 为 Γ 的 II－型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(3) 如果 $\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma))\mid\Sigma\subset F(S),\ \Sigma\vdash B\}\mid<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 III－型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$. 这里 H 是 $P(F(S))-\{\varnothing\}$ 上的 Hausdroff 距离.

定理 14　设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论,$A\in F(S)$,$\varepsilon>0$ 则

(1) $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$ 当且仅当 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$;

(2) 若 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$,则 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$,$A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

证明

(1)(必要性) 设 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$,由定义 10 的(1)可知存在 $C\in D(\Gamma)$ 使得 $\rho_1(A,C)<\varepsilon$,则 $\rho_1(A,C)=2-\tau(A\to C)-\tau(C\to A)\geqslant 1-\tau(C\to A)$, 所以 $1-\sup\{\tau(B\to A)\mid B\in D(\Gamma)\}\leqslant 1-\tau(C\to A)<\varepsilon$,因此 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(充分性) $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$,则存在 $C\in D(\Gamma)$ 使得 $1-\tau(C\to A)<\varepsilon$,由 $C\to(C\vee A)$ 为 $M-$重言式及 MP 规则可知 $C\vee A\in D(\Sigma)$ 又 $\rho_1(A,C\vee A)=1-\tau(C\to A)$,所以 $\rho(A,D(\Gamma))\leqslant\rho_1(A,C\vee A)=1-\tau(C\to A)<\varepsilon$,因此 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.

(2) 若 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$ 则存在 $\Sigma_0\subset F(S)$ 使得 $\Sigma_0\vdash A$ 且 $H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\varepsilon$,这时 $A\in D(\Sigma_0)$,所以 $\rho(A,D(\Gamma))\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\varepsilon$,即 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$. 由(1)知后者也成立.

6　结束语

本文基于剩余格的赋值态理论利用测度论和积分方法提出了以剩余格为赋值格的命题逻辑中公式的概率真度,研究了剩余格语义上的计量逻辑学的有关性质,建立了剩余格语义上的概率计量模型,目前非可换逻辑及其代数结构成为逻辑学研究的一个新的热点,如何将概率计量方法应用到非可换逻辑及其代数为赋值格的格值逻辑上是我们下一步研究的重点.

参考文献

[1] PAVELKA J. On fuzzy logic I:Many-valued rules of inference;II:Enriched residuated lattice and semanties of propositional calculi;III:Semantical completeness of some many-valued propositional calculi [J]. Zeitschrf Math Logik und Grundlagen der Math,1979,25:45 - 52;119 - 134;447 - 464.

[2] ADAMS E W. A Primer of Probability Logic [M]. Stanford:CSLI Publication,1998.

[3] YING M S. A logic for approximate reasoning [J]. Journal of Symbolic Logic,1994,59(3):830 - 837.

[4] DUBOIS D,PRADE H. Possibility theory and multiple-valued logics [J]. Ann Math Artif Intell,2001,32(1):35 - 66.

[5] WANG G J,FU L,SONG J S. Theory of truth degrees of propositions in two valued logic [J]. Science in China Series A Mathematics,2002,45(9):1106 - 1116.

[6] WANG G J,LEUNG Y. Integrated semantics and logic metric spaces[J]. Fuzzy Sets & Systems,2003,136(1):71 - 91.

[7] ZHOU H J,WANG G J,ZHOU W. Consistency degrees of theories and methods of graded reasoning in n-valued R_0 logic (NM-logic) [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2006,43(2):117 - 132.

[8] WANG G J,ZHOU H J. Quantitative logic [J]. Information Sciences,2009,179(3):226 - 247.

[9] ZHOU H J. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle [M]. Beijing:Science Press,Oxford:Alpha

Science International Limited,2009.

[10] 张东晓,李立峰. 二值命题逻辑公式的语构程度化方法[J]. 电子学报,2008,36(2):320 – 325.
ZHANG Dong-xiao, LI Li-feng. Syntactic graded method of two-valued propositional logic formulas [J]. Acta Electronica Sinica,2008,36(2):325 – 330. (in Chinese)

[11] 罗敏霞,姚宁. L∗系统中公式的语构程度化方法[J]. 电子学报,2011,39(2):424 – 428.
LUO Min-xia, YAO Ning. Syntactic graded method of formulas in the system L∗ [J]. Acta Electronica Sinica, 2011,39(2):424 – 428. (in Chinese)

[12] ZHOU H J, WANG G J. Borel probabilistic and quantitative logic [J]. Science China Information Sciences, 2011, 54(9):1843 – 1854.

[13] 王国俊. 一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用[J]. 中国科学:信息科学,2012,42(5):648 – 662.
WANG Guo-jun. Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application [J]. Science China: Information Sciences, 2012, 42 (5): 648 – 662. (in Chinese)

[14] WANG G J. A unified integrated method for evalu-ating goodness of propositions in several propositional logic systems and its applications [J]. Chinese Journal of Electronics, 2012, 21(2):195 – 201.

[15] 时慧娴,王国俊. 多值模态逻辑的计量化方法[J]. 软件学报,2012,23(12):3074 – 3087.
SHI Hui-xian, WANG Guo-jun. Quantitative method for multi-value modal logics [J]. Journal of Software, 2012, 23(12):3074 – 3087. (in Chinese)

[16] 周红军,等. Lukasiewicz 命题逻辑中命题的 Choquet 积分真度理论[J]. 电子学报,2013,23(3):557 – 563.
ZHOU Hong-jun, et al. Theory of Choquet integral truth degrees of propositions in Lukasiewicz propositional logic [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 23(3):557 – 563. (in Chinese)

[17] 折延宏,贺晓丽. 粗糙逻辑中公式的 Borel 型概率粗糙真度[J]. 软件学报,2014,25(5):970 – 983.
SHE Yan-hong, HE Xiao-li. Borel probabilistic rough truth degree of formulae in rough logic [J]. Journal of Software, 2014, 25(5):970 – 983. (in Chinese)

[18] 吴洪博. Lukasiewicz 命题逻辑中公式的 Γ-真度理论和极限定理[J]. 中国科学:信息科学,2014,44(12):1542 – 1559.
WU Hong-bo. The theory of Γ-truth degrees of formulas and limit theorem in Łukasiewicz propositional logic [J]. Science China: Information Sciences, 2014, 44 (12): 1542 – 1559. (in Chinese)

[19] XU Y, RUAN D, QIN K Y, et al. Lattice-Valued Logic [M]. Berlin Heidelberg: Springer-verlag, 2003.

[20] 裴道武. 强正则剩余格值逻辑系统 L^N 及其完备性[J]. 数学学报,2002,45(4):745 – 752.
PEI Dao-wu. A logic system based on strong regular residuated lattices and its completeness [J]. Acta Mathematica Sinica, 2002, 45(4):745 – 752. (in Chinese)

[21] 傅丽,宋建社. 经典命题逻辑的 Boole 语义理论[J]. 模糊系统与数学,2007,21(2):46 – 52.
FU Li, SONG Jian-she. Theory of Boolean semantics of classical propositional logic [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(2):46 – 52. (in Chinese)

[22] 左卫兵. Boole 语义的程度化方法[J]. 电子学报,2012,40(3):441 – 447.
ZUO Wei-bing. Graded method of Boolean semantics [J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(3):441 – 447. (in Chinese)

[23] 左卫兵. 基于 MV 代数语义的格值逻辑的程度化方法[J]. 电子学报,2013,41(10):2035 – 2040.
ZUO Wei-bing. Graded method of lattice-valued logic based on MV-algebra semantics [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10):2035 – 2040. (in Chinese)

[24] 左卫兵. MTL 代数语义上逻辑公式的概率真度[J]. 电子学报,2015,43(2):293 – 298.
ZUO Wei-bing. Probability truth degrees of formulas in MTL-algebras semantics [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(2):293 – 298. (in Chinese)

[25] WARD M, et al. Residuated lattices [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1939, 45 (3): 335 – 354.

[26] GALATOS N, JEPSEN P, et al. Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics [M]. Amsterdam: Elsevier, 2007.

[27] 周红军. 概率计量逻辑及其应用[M]. 北京:科学出版社,2015.

[28] 左卫兵. 多值逻辑系统中公式的 μ – 真度理论[J]. 系统科学与数学,2011,31(7):879 – 892.
ZUO Wei-bing. μ – truth degree of formula in many-valued propositional logic [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2011, 31 (7): 879 – 892. (in Chinese)

作者简介

左卫兵 男,1976 年 3 月出生,河南内黄人. 现为华北水利水电大学数学与信息科学学院教授、硕士生导师. 研究方向为不确定性推理、非经典数理逻辑.
E-mail:zuoweibing@ ncwu. edu. cn