

一种降维空域滤波矩阵的设计方法

梁国龙, 赵文彬, 付 进

(1. 哈尔滨工程大学水声技术重点实验室, 黑龙江哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨工程大学水声工程学院, 黑龙江哈尔滨 150001)

摘 要: 为解决降维滤波矩阵设计存在的维数与滤波性能之间的矛盾, 提出了一种结合 K-L 变换 (Karhunen-Loeve Transform) 降维空域滤波矩阵的设计方法. 该文首先推导出了滤波矩阵较大特征值的数量取决于滤波矩阵通带带宽的规律, 并利用阻带衰减给出了区分大小特征值的门限, 进而通过向大特征值对应的特征向量矩阵投影的方法, 获得最终的降维空域滤波矩阵. 仿真实验证明, 由该方法获得的降维矩阵具有与降维前接近的空域滤波能力.

关键词: 空域滤波矩阵; 降维; K-L 变换; 方位估计

中图分类号: TN929.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)02-0417-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.02.021

Spatial Matrix Filter with Dimension Reduction Design

LIANG Guo-long, ZHAO Wen-bin, FU Jin

(1. Science and Technology on Underwater Acoustic Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China;

2. College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: The performance of spatial filter matrix degrades sharply in the presence of matrix dimension reduction. To solve the problem, a method using K-L (Karhunen - Loeve) Transform to reduce the matrix dimension is proposed. Theoretical derivation show the eigenvalues of the spatial - filter matrix and its conjugate transpose matrix product, has two characteristics. Firstly, there exists some eigenvalues that are much greater than the other eigenvalues. Secondly, the number of greater eigenvalues depends on the bandwidth of filter matrix pass - band. Based on those characteristics, K - L Transform was used to realize matrix dimension reduction through abandoning the eigenvectors corresponding to small eigenvalues. The proposed reduction dimension filter matrix has the advantage of orthogonality. Simulation results show the proposed reduction matrix and matrix with maximum dimension have similar filter capability.

Key words: special filter matrix; dimension reduction; K-L Transform; DOA estimation

1 引言

空域矩阵滤波器设计, 是一种新兴的降噪抗干扰的阵列信号预处理方法^[1-9], 与经典的波束域预处理手段相比, 它具有抗干扰能力强、设计灵活、针对小块拍数据有更强的稳健性等诸多优点; 降维是一种降低运算量、提高稳健性的阵列信号预处理方法^[10-12], 常应用于阵元数目较大或有长时间监测目标需求的工程领域中. 降维空域滤波矩阵的设计是对矩阵滤波与降维处理两种方法的整合, 希望能同时获得两种方法的优势, 现有的降维空域滤波矩阵设计方法, 如文献[13]和文献[14], 其降维核心步骤是用滤波矩阵与通带导向矢量的乘积去逼近一个小阵元数的导向矢量, 这样做虽然可以在完成滤波矩阵设计的同时实现降维, 但是却

以牺牲矩阵的空域滤波性能为代价, 本文提出了一种新的降维滤波矩阵的设计方法, 利用滤波矩阵特征值的分布特点有效地解决了上述问题. 经过理论推导和仿真研究, 文中揭示了滤波矩阵通带带宽与矩阵特征值之间的关系, 进而利用图像处理中常用的 K-L 变换, 给出了一种适用于空域滤波矩阵的降维设计方法, 该算法的降维能力取决于滤波矩阵通带带宽, 通带范围在全观测区间所占比例越小, 算法的降维能力越显著, 同时获得的降维滤波矩阵具有正交性, 可以有效的维持背景噪声特征. 仿真实验证明, 由该方法得到的低维矩阵能近乎完整的保留原矩阵的滤波能力; 后续定位算法的性能也没有因维数降低而产生明显变化.

2 滤波矩阵降维原理

为了类比方便, 本节简单介绍文献[13]中涉及到

的滤波矩阵的降维思想. 首先给出非降维滤波矩阵设计方法^[6]:

$$\begin{aligned} \min_G \sum_p \|\mathbf{G}_{M \times M}^H \mathbf{a}_M(\theta_p) - \mathbf{a}_M(\theta_p)\|_F^2, \quad \theta_p \in \Theta_p \\ \text{s. t.} \quad \|\mathbf{G}_{M \times M}^H \mathbf{a}_M(\theta_s)\|_F \leq \delta, \quad \theta_s \in \Theta_s \\ \|\mathbf{G}_{M \times M}^H\|_F \leq \sigma \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)是典型的空域滤波矩阵 $\mathbf{G}_{M \times M}^H$ 的设计方法, 其中 $\|\cdot\|_F$ 表示欧式范数, $\mathbf{a}_M(\theta)$ 为阵元数目为 M 的阵列流型, 在本文模型中, θ 为与阵列法线方向夹角, Θ_p 为通带方位集合, Θ_s 为阻带方位集合, δ 为阻带衰减, σ 是用以控制噪声功率的矩阵欧式范数约束. 根据文献[13]对 \mathbf{G}^H 进行降维设计, 则式(1)变为:

$$\begin{aligned} \min_G \sum_p \|\mathbf{G}_{M \times N}^H \mathbf{a}_M(\theta_p) - \mathbf{a}_N(\theta_p)\|_F^2, \quad \theta_p \in \Theta_p \\ \text{s. t.} \quad \|\mathbf{G}_{M \times N}^H \mathbf{a}_M(\theta_s)\|_F \leq \delta, \quad \theta_s \in \Theta_s \\ \|\mathbf{G}_{M \times N}^H\|_F \leq \sigma \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $N \leq M$, $\mathbf{a}_N(\theta)$ 为阵元数目为 N 阵列流型. 由式(2)即可获得降维滤波矩阵 $\mathbf{G}_{M \times N}^H$. 当 N 较小时, 上式获得的降维矩阵对于阵列信号中噪声部分的空间特性将有较大破坏, 进而影响后续算法的性能, 所以通常需要对 $\mathbf{G}_{M \times N}^H$ 进行正交化处理^[14]:

$$\mathbf{B}^H = (\mathbf{G}_{M \times N}^H \mathbf{G}_{M \times N})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{M \times N}^H \quad (3)$$

\mathbf{B}^H 即为最终获得的降维滤波矩阵, 与许多经典约束形成降维的预处理方法类似, 式(3)算法存在的最大缺陷是维数的降低会导致滤波矩阵可利用的自由度减少, 进而使其空域滤波性能下降, 这种现象可以从后面的仿真和实验结果中清晰的看到. 本文则针对滤波矩阵维数与滤波性能存在的矛盾, 利用滤波矩阵特征值的特点, 提出了一种既可以极大程度降低矩阵维数, 又能够尽量保留原矩阵空域滤波性能的降维滤波矩阵设计方法.

3 特征值与通带带宽关系的研究

作为本文提出的降维滤波矩阵设计方法的数学支撑, 本节给出由滤波矩阵 \mathbf{G}^H 构成的新矩阵 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 的特征值与滤波矩阵通带带宽间的关系, 为了讨论方便, 先给出 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 特征值分布特点的证明.

设 $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H = \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H$, 其中 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ 为特征值构成的对角阵且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M]_{M \times M}$ 为特征值对应的特征向量组成的矩阵. 滤波矩阵的幅度响应可写作:

$$f(\mathbf{a}) = \frac{1}{M} \|\mathbf{G}^H \mathbf{a}\|_F^2 = \frac{1}{M} \mathbf{a}^H \mathbf{G}^H \mathbf{G} \mathbf{a} = \frac{1}{M} \mathbf{a}^H \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H \mathbf{a} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\theta) = \{a_i\}_{M \times 1} \frac{1}{2}$, 令 $\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{V}^H \mathbf{a} = [y_1, y_2, \dots,$

$y_M]^T$:

$$\begin{cases} f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \|y_i\|^2 \\ \|\mathbf{y}\|_F^2 = \mathbf{y}^H \mathbf{y} = \frac{1}{M} \mathbf{a}^H \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{a} = \sum_{i=1}^M \|y_i\|^2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

对于理想滤波矩阵, 其期望幅度响应可近似为:

$$f(\mathbf{y}) = \begin{cases} \approx 1, & \theta_p \in \Theta_p \\ \leq \delta^2/M, & \theta_s \in \Theta_s \end{cases} \quad (6)$$

其中 δ 为式(2)中的阻带衰减, 在大多数滤波矩阵的设计中, 阻带响应远小于通带响应, 即 $\frac{\delta^2}{M} \ll 1$.

分析式(5), $f(\mathbf{y})$ 为矩阵 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 特征值的加权求和函数, 且权向量的范数为 1, 在 y 样本充分的条件下, $f(\mathbf{y})$ 的值域将包含 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 的所有特征值, 再结合式(6), 不难得到以下结论: $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 的特征值可近似的以 δ^2/M 为界划分为两个集合, 一个集合由可近似为 1 的较大特征值组成 $\{\lambda_i | \lambda_i \approx 1, i=1, \dots, b\}$, 另一个集合由远小于 1 的较小特征值组成 $\{\lambda_j | \lambda_j \leq \delta^2/M \leq 1, j=1, \dots, s\}$, 其中 $b+s=M$.

下面我们详细讨论较大特征值的数量 b 与通带带宽的关系. 构造由阵列流型组成的矩阵 $\mathbf{A} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{a}(\theta_m) \right\}_{M \times M}$, 其中, 要求 θ_m 满足文献[15]给出的关系:

$$\sin \theta_m = (M-2m+1)/M, m=1, \dots, M \quad (7)$$

根据文献[15], 有 $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H = \mathbf{I}_M$. 假定, 由上式获得的 $\{\theta_m\}_{M \times 1}$ 集合中, 属于通带 Θ_p 范围内的方位个数为 \bar{b} , 则在式(6)的近似下, 有:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= \|\mathbf{G}^H \mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^b \left\| \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_i) \right\|_F^2 \\ &\quad + \sum_{j=b+1}^M \left\| \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_j) \right\|_F^2 \\ &\approx \sum_{i=1}^{\bar{b}} 1 + \sum_{j=b+1}^M \xi_j \\ \xi_j &= \left\| \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_j) \right\|_F^2 \leq \delta^2/M \ll 1 \Rightarrow f(\mathbf{A}) \\ &\approx \sum_{i=1}^{\bar{b}} 1 = \bar{b} \end{aligned} \quad (8)$$

又由于:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= \|\mathbf{G}^H \mathbf{A}\|_F^2 \\ &= \text{trace}(\mathbf{A}^H \mathbf{G}^H \mathbf{G} \mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{A}^H \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H \mathbf{A}) \\ &= \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{A}^H \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H) \\ &= \sum_{k=1}^M \lambda_k = \sum_{i=1}^{\bar{b}} \lambda_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \approx \sum_{i=1}^{\bar{b}} 1 + \sum_{j=1}^s \lambda_j \\ \lambda_j &\leq \delta^2/M \ll 1 \Rightarrow f(\mathbf{A}) \approx \sum_{i=1}^{\bar{b}} \lambda_i = \bar{b} \end{aligned} \quad (9)$$

结合(8),有:

$$b \approx \bar{b} \quad (10)$$

从上式可以看出,较大特征值的数目 b 的大小与滤波矩阵通带范围内满足式(7)的 θ_m 的数目 \bar{b} 相等,(7)式中 $\sin\theta_m$ 的取值可近似的看作是在全空间 $(-1,1)$ 区间内、以 $\frac{2}{M}$ 为间隔的均匀分布,所以 \bar{b} 的大小将由通带 $\Theta_p = [\theta_1 \sim \theta_2]$ 边界角度的正弦值之差决定,即:

$$\frac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{2} \approx \frac{\bar{b}}{M} \Rightarrow \bar{b} \approx \left[\frac{M(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)}{2} \right] \quad (11)$$

其中 $[\cdot]$ 表示四舍五入取整. 结合式(10)有:

$$b \approx \left[\frac{M(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)}{2} \right] \quad (12)$$

在观测区间 $[-90^\circ \sim 90^\circ]$ 内, $\sin\theta$ 为单调增函数,所以可以认为通带范围越小, $(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$ 越小, b 的取值就越小,这为后面对滤波矩阵降维提供了理论依据. 需要补充说明的是,式(12)的获得虽然是在理想条件式(6)基础上,但对于实际滤波矩阵,在满足通带幅度响应远大于阻带、且通带内幅度响应波动较小的条件下,重复上述推导过程,可以获得相同的结果.

下面分析矩阵 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 的特征值分布规律. $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 与 $\mathbf{G} \mathbf{G}^H$ 的秩相等,二者的零特征值数量相等,又由于 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 与 $\mathbf{G} \mathbf{G}^H$ 具有相同非零特征值^[16],所以 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 的特征值也可以以 δ^2/M 为界,分为较大特征值集合与较小特征值集合,且较大特征值数量满足式(12). 即:

$$\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{U}_b \Lambda_b \mathbf{U}_b^H + \mathbf{U}_s \Lambda_s \mathbf{U}_s^H = \sum_{i=1}^b \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sum_{j=1}^s \lambda_j \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^H \quad (13)$$

其中 $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_k\}_{M \times M} = [\mathbf{U}_b, \mathbf{U}_s]$, $\Lambda_b = \text{diag}\{\lambda_i\}$ 和 $\mathbf{U}_b = \{\mathbf{u}_i\}_{M \times b}$ 分别为较大特征值和其对应的特征向量矩阵, $\Lambda_s = \text{diag}\{\lambda_j\}$ 和 $\mathbf{U}_s = \{\mathbf{u}_j\}_{M \times s}$ 分别为较小特征值和其对应的特征向量矩阵,并且有 $\lambda_j \ll \lambda_i$ 、较大特征值数量取决于通带带宽.

为了验证以上结论,给出下面仿真结果. 图1~图3是在不同通带宽度条件下,由式(1)设计的滤波矩阵 \mathbf{G}^H 的空域幅度响应和 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 特征值分布的仿真结果,仿真条件:阵元数目 $M=20$ 的半波长间距均匀线列阵,以法线方向为通带范围中心,且定义此方向为 0° ; 通带宽度以 10° 为间隔从 10° 变化至 170° ; $\delta=0.14$ 为 -30dB 旁瓣响应设计参数,仿真结果如下:

从图1给出的滤波矩阵的空域幅度响应可以看出,各空域滤波器均满足仿真条件中给出的滤波器设计要求;图2给出了不同通带宽度条件下, λ_s 集合内的最大值与 λ_b 集合内的最小值的比较,从仿真结果可以看出,较小特征值集合内的最大值远小于较大特征值集合中的最小值,这说明在低旁瓣设计条件下, $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 的特征值

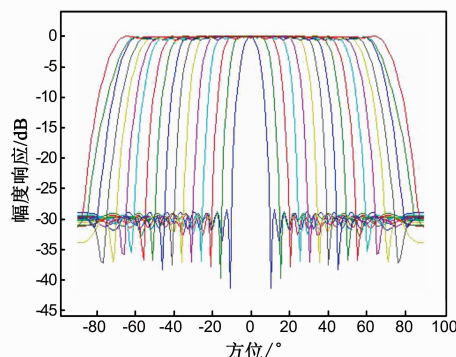


图1 不同通带宽度的滤波矩阵空域幅度响应

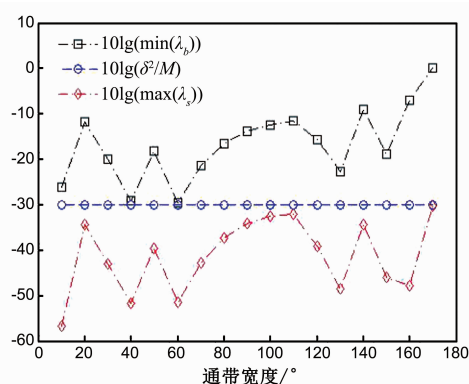


图2 不同通带宽度条件下 λ_s 最大值与 λ_b 最小值

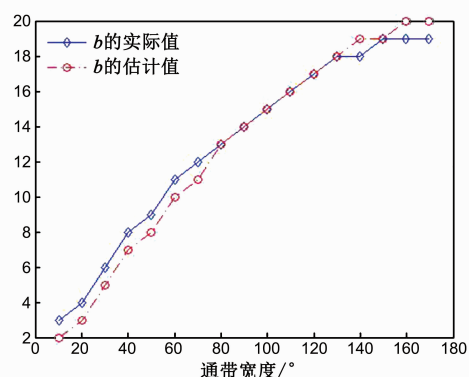


图3 不同通带宽度条件下 λ_b 集合中元素个数

可以以 δ^2/M 为界,分为较大特征值集合与较小特征值集合,并且较大特征值集合中的元素远大于较小特征值集合中的元素;图3给出了 $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ 较大特征值集合 λ_b 中的元素实际数量和由式(12)得到的近似结果,可以看到两者近乎吻合,而且确实存在通带范围越小,较大特征值的数量越少的规律,这为接下来给出的矩阵降维方法提供了理论依据.

4 K-L 变换法滤波矩阵降维

K-L 变换是一种用于数字图像处理的压缩编码手

段,通过将原始数据与其协方差矩阵的特征向量矩阵作乘积的方法,获得原始数据最小均方误差意义下的最佳去相关变换,并可以通过舍弃变换矩阵中,较小特征值对应的特征向量达到对原数据降维的目的,较大特征值数目越少,说明原数据中相关部分越多^[17]. 由前面的分析可以知道,对于带通滤波矩阵 \mathbf{G}^H ,其通带范围较小, $\mathbf{G}^H\mathbf{G}$ 的较大特征值很少,所以很适合运用 K-L 变换进行降维. 依据 K-L 变换的降维原理,降维后得到的新滤波矩阵 $\bar{\mathbf{G}}^H$ 为:

$$\bar{\mathbf{G}}_{b \times M}^H = \mathbf{U}_b^H \mathbf{G}^H \quad (14)$$

综合 K-L 变换的特性和滤波矩阵 $\mathbf{G}^H\mathbf{G}$ 特征值分布的特点,由式(14)获得降维滤波矩阵设计,将具有如下优点.

4.1 范数近似不变性

为了保证滤波矩阵对白噪声的收敛性,在设计滤波矩阵时,经常需要限制矩阵的欧式范数,由于 K-L 变换是最小均方误差准则下的变换,且 $\mathbf{G}^H\mathbf{G}$ 较大特征值远大于较小特征值,所以由式(14)得到的降维矩阵将具有与原矩阵近似的矩阵范数,这意味着对滤波矩阵本身的范数的限定,并不会因降维设计而失效. 证明如下:

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{G}}^H\|_F^2 &= \text{trace}(\bar{\mathbf{G}}^H\bar{\mathbf{G}}) = \sum_{i=1}^b \mathbf{U}_i^H \mathbf{G}^H \mathbf{G} \mathbf{U}_i \\ &= \sum_{i=1}^b \lambda_i \mathbf{U}_i^H \mathbf{U}_i = \sum_{i=1}^b \lambda_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}^H\|_F^2 &= \text{trace}(\mathbf{G}^H\mathbf{G}) = \sum_{k=1}^M \lambda_k \\ &= \sum_{i=1}^b \lambda_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \end{aligned} \quad (16)$$

由于 $\lambda_j \leq \lambda_i$, 所以:

$$\Rightarrow \|\mathbf{G}\|_F^2 \approx \|\bar{\mathbf{G}}\|_F^2 \quad (17)$$

4.2 矩阵正交性

基于 K-L 变换的特点,降维后的滤波矩阵具有正交性:

$$\bar{\mathbf{G}}^H\bar{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}\mathbf{U}_b)^H (\mathbf{G}\mathbf{U}_b) = \mathbf{U}_b^H \mathbf{G}^H \mathbf{G} \mathbf{U}_b = \mathbf{I}_b \quad (18)$$

上式与式(3)比较可以看出,式(3)的正交化过程需要逆运算,当阻带衰减较大时,由式(2)得到 $\mathbf{G}_{M \times N}^H$ 的行列式值极小,会严重影响经式(3)正交化处理后的滤波矩阵的性能,而由式(18)可以看出, $\bar{\mathbf{G}}^H$ 的正交性是由特征分解保证的,避免了正交化步骤对滤波矩阵带来的影响.

4.3 滤波能力近似不变性

K-L 变换在图像压缩中能够较好保留原始数据的信息,但对于在波束形成领域,经 K-L 变换后得到的预处理器是否依然能够保留原有的空间滤波能力,需要更有力的说明,对此本文给出如下证明:

$\mathbf{G}^H\mathbf{G}$ 特征向量矩阵为 \mathbf{U} 满足:

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}^H \\ \mathbf{G}^H\mathbf{G}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \Rightarrow \mathbf{G}\mathbf{u}_k = \lambda_k (\mathbf{G}^H)^+ \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (19)$$

其中 $(\cdot)^+$ 为求广义逆矩阵运算. 对于滤波矩阵的幅度响应 $f(A)$ 有:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) &= \frac{1}{M} \|\mathbf{G}^H \mathbf{a}\|_F^2 = \frac{1}{M} \mathbf{a}^H \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{a}^H \mathbf{G} \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{G}^H \mathbf{a} = \frac{1}{M} \mathbf{a}^H \mathbf{G} \sum_{k=1}^M \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H \mathbf{G}^H \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{a}^H \mathbf{G} \sum_{i=1}^b \mathbf{u}_i (\lambda_i (\mathbf{G}^H)^+ \mathbf{u}_i)^H \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^b \lambda_i \mathbf{a}^H \mathbf{G} \mathbf{u}_i \mathbf{U}_i^H \mathbf{G}^H \mathbf{a} \\ &\quad + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^s \lambda_j \mathbf{a}^H \mathbf{G} \mathbf{u}_j \mathbf{U}_j^H \mathbf{G}^H \mathbf{a} \end{aligned} \quad (20)$$

当 $\lambda_j \ll \lambda_i$ 时,忽略上式等号右边第二项:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) &\approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^b \lambda_i \mathbf{a}^H \mathbf{G} \mathbf{u}_i \mathbf{U}_i^H \mathbf{G}^H \mathbf{a} = \frac{1}{M} \|(\mathbf{G}\mathbf{U}_b)^H \mathbf{a}\|_F^2 \\ &= \frac{1}{M} \|\bar{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}\|_F^2 \end{aligned} \quad (21)$$

上式的推导说明,鉴于 $\mathbf{G}^H\mathbf{G}$ 特征值分布的特点,经 K-L 变换降维后得到的新滤波矩阵,可以极大的保留原滤波矩阵的空域滤波能力.

至此我们可以归纳出本文所提出降维滤波矩阵设计的步骤:

(a) 利用滤波矩阵设计方法,根据设计指标,获得滤波矩阵 \mathbf{G}^H .

(b) 对矩阵 $\mathbf{G}^H\mathbf{G}$ 进行特征分解,并挑选大于 δ^2/M 的特征值对应的特征向量组成变换矩阵 \mathbf{U}_b .

(c) 由式(14)获得降维滤波矩阵.

在设计带通空域滤波器的情况下,由上面步骤获得的降维滤波矩阵 $\bar{\mathbf{G}}^H$ 具有降维效果显著、各列正交的优点,并能较好的保留降维前矩阵的空域滤波特性;从计算量的角度看,上面的步骤虽然需要额外的特征分解运算,但是降维滤波矩阵作为一种预处理手段, $\bar{\mathbf{G}}^H$ 可以在实际应用之前预先获得,在应用背景不变时 $\bar{\mathbf{G}}^H$ 也将保持不变,没有时时更新的必要,而在应用过程中,随着处理数据的逐渐增加,由降维带来的运算量节约的收益会逐渐提高. 值得一提的是,从上两节降维方法的推导过程可以看到,由于滤波矩阵特征值的分布规律仅与阻带衰减和通带带宽有关,所以虽然本文的降维方法是在式(1)的基础上给出,但适用于大多数采用式(4)作为滤波矩阵空域幅度响应的降维滤波矩阵设计.

5 仿真研究

5.1 K-L 变换降维法滤波矩阵性能仿真

由式(1)、式(3)和式(14)得出的滤波矩阵分别定

义为 G_1 、 G_2 和 G_3 , 仿真条件: 考虑一个由 20 个各向同性的、半波长间距阵元组成的均匀线列阵, 设计如下滤波矩阵, 通带为 $[-10^\circ, 10^\circ]$, 阻带为 $[-90^\circ - 15^\circ] \cup [15^\circ, 90^\circ]$, 对于 G_1 矩阵约束范数 $\sigma_1 = 2$, 对于 G_2 矩阵约束范数 $\sigma_2 = 0.9$, 由于 G_3 可由 G_1 获得, 所以 $\sigma_3 = \sigma_1$. 图 4(a) 给出了阻带衰减为 -20dB 时三个滤波矩阵的空域幅度响应, 图 4(b) 给出了阻带衰减为 -30dB 时三个滤波矩阵的空域幅度响应.

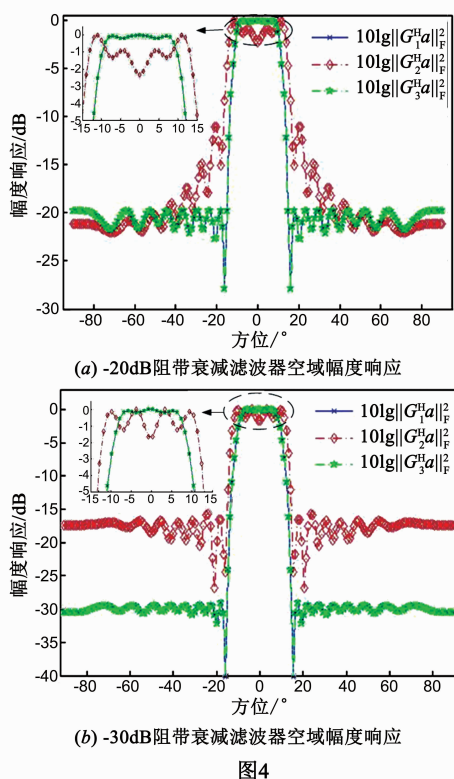


图4

从仿真结果可以看到由式(3)获得的降维滤波矩阵 G_2 与未降维处理的滤波矩阵 G_1 相比, 性能明显下降, 具体表现为通带存在较大波动、过渡带展宽, 当阻带衰减要求较大时, 阻带响应抬高, 甚至无法达到设计要求, 如图 4(b); 本文设计的降维滤波矩阵 G_3 则在降维的同时, 近乎完整的保留了降维前滤波矩阵 G_1 的性能, 与 G_2 相比, G_3 的空域幅度响应具有更平坦的通带, 更陡峭的过渡带和更符合设计要求的阻带衰减.

对此仿真, 还需要做出以下补充说明:

(a) 滤波矩阵 G_3 的维数是依据上节给出的方法获得, 在本例中 G_3 的大小为 20×4 ; 为了与之比较, G_2 也选取同样的维数.

(b) 比较 4(a) 与 4(b) 可以看到, 对于 G_2 的空域幅度响应, 在 -30dB 衰减指标下得到的阻带部分, 没有 -20dB 衰减指标下得到的阻带衰减低, 这是因为随着阻带衰减的降低, 滤波矩阵行列式的值

急剧下降, 致使式(3)在求解矩阵的广义逆时误差增大.

(c) 在设计滤波矩阵 G_2 时, 其矩阵约束范数 $\sigma_2 = 0.9$ 不同于 σ_1, σ_3 , 这是传统的矩阵降维算法的设计需要, 如果 σ_2 调大为与 G_1, G_3 的设计标准相同, 会导致阻带衰减远达不到设计要求; 若 σ_2 调小, G_2 的空域幅度响应变化不大, 仍存在上述仿真的结论. 本文中参数 σ_2 的设定, 是经过多次仿真实验、在满足设计要求的前提下, 选择的具有代表性的仿真结果.

5.2 矩阵滤波后的方位估计

本文以 MUSIC 算法为例, 验证不同的降维滤波矩阵在目标方位估计中的性能差异. 文献[6]中给出了经过滤波矩阵处理后的 MUSIC 算法方位估计公式:

$$P(\theta) = \frac{\mathbf{c}^H(\theta)\mathbf{c}(\theta)}{\mathbf{c}^H(\theta)\mathbf{E}_v\mathbf{E}_v^H\mathbf{c}(\theta)} \quad (22)$$

式中 $\mathbf{c}(\theta) = \bar{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\theta)$ 为经矩阵滤波后的阵列流型; \mathbf{E}_v 为阵列接收数据协方差矩阵特征分解后, 由小特征值对应的特征向量构成的矩阵.

5.2.1 降维滤波矩阵下 MUSIC 算法的分辨力和定位精度

在 5.1 中的仿真条件基础上, 假设两个等功率不相关的窄带信号分别从 0° 和 6° 入射到基阵, 背景噪声为与信号不相关的高斯分布的空间白噪声, 在信噪比 SNR 分别为 0dB 和 -17dB 的背景下, 应用 5.1 中 -20dB 阻带衰减条件得到的滤波矩阵, 对接收数据进行滤波处理, 并利用式(22)做方位估计, 仿真结果如下:

图 5(a) ~ (b) 给出了经过 $G_1 \sim G_3$ 滤波后的 MUSIC 算法的方位谱, 可以看出, 无论在低信噪比或高信噪比条件下, 经由 G_3 滤波处理的数据的方位谱与经由 G_1 处理的结果都近似相同, 均能够给出较为准确的方位估计结果, 且能够区分出邻近的双目标; 经由 G_2 滤波的数据得到的方位谱, 在较高信噪比下可以分辨出双目标, 但当信噪比较低时, 受滤波器性能的限制, 其方位谱已无法分辨两个邻近目标.

图 5(c) 和 5(d) 给出在前面的仿真条件下, 信噪比变化时, 快拍数为 1000、试验次数为 500 的蒙特卡洛实验获得的分辨概率曲线和均方根误差曲线, 可以看到, 在较低信噪比时, 利用 G_3 滤波后的数据进行的方位估计时, 其目标分辨、方位估计能力均与经 G_1 滤波后的数据处理结果近乎重合, 且均优于 G_2 滤波后的处理结果, 这说明在降至维数相同的条件下, 本文提出的降维滤波矩阵设计方法, 较完整的保留了原矩阵的空域滤波能力.

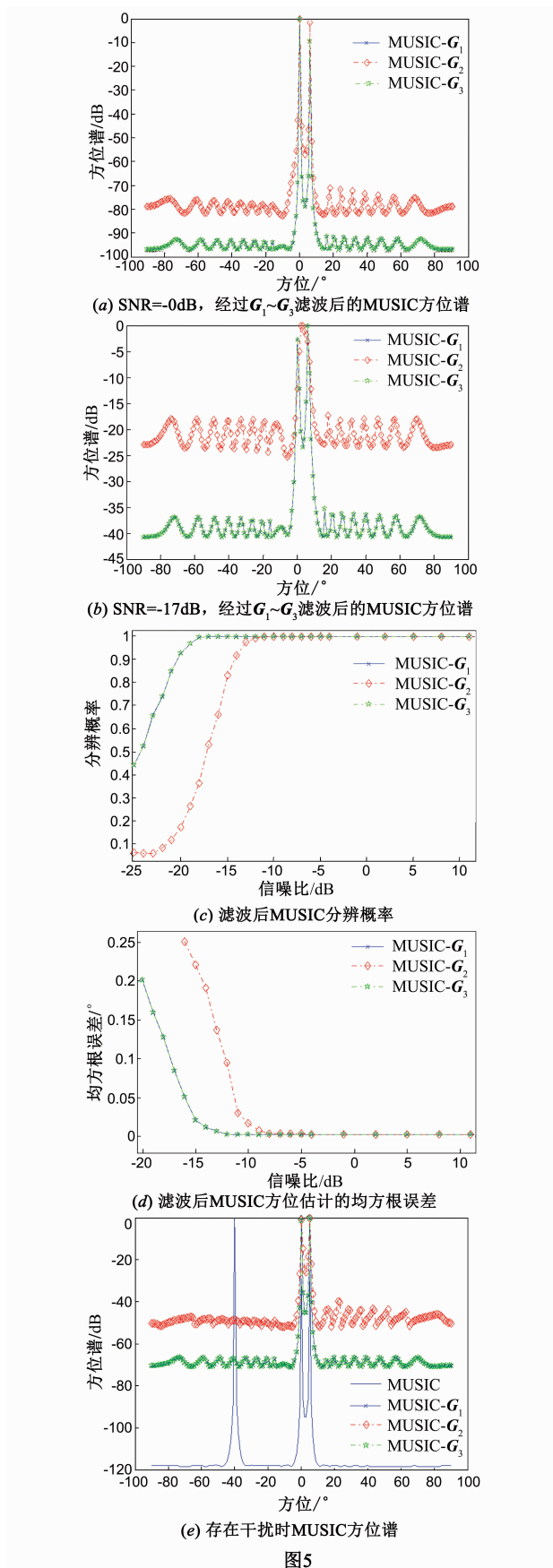


图5

5.2.2 降维滤波矩阵阻带内干扰抑制能力

为考察降维滤波矩阵对阻带内干扰信号的抑制能力,假设有一不相关的窄带干扰分别从 -40° 方位入射,干噪比 $\text{INR} = 10\text{dB}$,其余仿真条件与上例仿真相同, $\text{SNR} = 0\text{dB}$,仿真结果如图5(e).从仿真结果可以看到,常规MUSIC方法的方位谱中的干扰成分,经滤波矩阵处理后被有效的抑制,并且经由 G_1 与 G_3 处理得到的结果,具有更好的邻近目标分辨能力.

通过以上的各仿真实验可以看到,本文提出的降维滤波矩阵设计方法,确实能够缓解现有降维方法中,矩阵维数与滤波能力间的矛盾,可以在降维的同时较完整的保留原滤波矩阵的空域滤波能力,可应用于有长时间的目标监测需求的工程领域,可以在提高信噪比的同时,节约大量的运算量,而且值得一提的是,不同于以往的降维方法,本文提出的算法可以利用阻带衰减量设置的门限 δ^2/M ,有根据的对降维后的矩阵维数进行预判和抉择,大大简化传统算法中寻找最优维数的设计过程.

6 结论

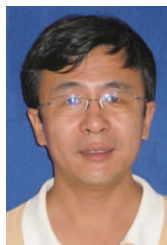
本文分析了由滤波矩阵 G^H 构建的埃尔米特阵 $G^H G$ 特征值分布的特点:以滤波矩阵阻带衰减 δ^2/M 为界,分为较大特征值与较小特征值两个集合,较大特征值集合中的元素远大于较小特征值集合中的元素;较大特征值集合元素的个数与通带带宽有关,通带带宽越窄,较大特征值数量越少.以此为理论基础,将K-L变换引入到降维滤波矩阵设计,构造了新的降维空域滤波器,经过理论推导和仿真实验证明,在降至相同的维数的前提下,新方法与现有方法相比,可以最大限度的减少降维对原矩阵的滤波性能和后续算法性能的牺牲.

参考文献

- [1] 韩东,张海勇,黄海宁,等.基于远近场声传播特性的拖线阵声纳平台辐射噪声空域矩阵滤波技术[J].电子学报,2014,42(3):432-438.
Han Dong, Zhang Hai-yong, Huang Hai-ning, et al. Towed line array sonar platform radiated noise spatial matrix filter based on far-field and near-field propagation characteristics [J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(3):432-438. (in Chinese)
- [2] D Han, J S Yin, C Y Kang, X H Zhang. Optimal matrix filter design with controlled mean-square sidelobe level [J]. Signal Processing, IET, 2011, 5(3):306-312.
- [3] 郑胜家,于倍,李晓,等.强干扰下水下弱目标定位空域矩阵滤波技术[J].电声技术,2014,38(4):49-53.
Zheng Sheng-jia, Yu Bei, Li Xiao, et al. Spatial matrix filter

- ring technology of underwater weak target localization with strong interference[J]. *Audio Engineering*, 2014, 38(4): 49-53. (in Chinese)
- [4] 周敏,章新华,郑文强,等. 方位距离域最小二乘矩阵滤波器设计与分析[J]. *电声技术*, 2014, 38(5): 52-56.
Zhou Min, Zhang Xin-Hua, Zheng Wen-qiang, et al. Design and analysis of least square direction-range domain matrix filter[J]. *Audio Engineering*, 2014, 38(5): 52-56. (in Chinese)
- [5] 韩东,李建,康春玉,等. 拖曳线列阵声呐平台噪声的空域矩阵滤波抑制技术[J]. *声学学报*, 2014, 39(1): 27-34.
Han Dong, Li Jian, Kang Chun-yu, et al. Towed line array sonar platform noise suppression based on special matrix filter technique[J]. *Acta Acoustica*, 2014, 39(1): 27-34. (in Chinese)
- [6] 鄢社锋,侯朝焕,马晓川. 矩阵空域预滤波目标方位估计[J]. *声学学报*, 2007, 32(2): 151-157.
Yan She-feng, Hou Chao-huan, MA Xiaochuan. Matrix spatial prefiltering approach for direction-of-arrival estimation[J]. *Acta Acoustica*, 2007, 32(2): 152-157. (in Chinese)
- [7] 韩东,章新华,康春玉,等. 零点约束矩阵滤波设计[J]. *声学学报*, 2010, 35(3): 353-358.
Han Dong, Zhang Xin-hua, Kang Chunyu, et al. Design of matrix filter with prescribed null[J]. *Acta Acoustica*, 2010, 35(3): 353-358. (in Chinese)
- [8] Fan Zhan, Liang Guo-long, Wang Yan, et al. Efficient sub-regional multiple-source detection based on subspace matrix filtering[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(7): 943-947.
- [9] Liu Kai, Yang Bin. Robustness of matrix filter with deep troughs against interference motion[A]. *Signal Processing, Communication and Computing (ICSPCC)* [C]. Kun Ming, 2013. 1-4.
- [10] Anthony J Weiss, B Friedlander. Effects of modeling errors on the resolution threshold of the music algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(6): 1519-1526.
- [11] Li Fu, Liu Hui. Statistical analysis of beam-space estimation for direction-of-arrivals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(3): 604-610.
- [12] P Stoica, A Nehorai. Comparative performance study of element-space and beam-space MUSIC estimators[J]. *Circuits Systems Signall Process*, 1991, 10(3): 285-292.
- [13] 刘凯. 声呐波束形成鲁棒性及算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2011.
- Liu Kai. Research on Robustness and Algorithm of Sonar Beamforming[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2011. (in Chinese)
- [14] A Hassani, S A Elkader, A B Gershman, K M Wong. Convex optimization based beam-space preprocessing with improved robustness against out-of-sector sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(5): 1587-1595.
- [15] 梁国龙,陶凯,范展. 声矢量阵自适应波束域广义似然比检测算法[J]. *电子学报*, 2015, 43(1): 135-139.
Liang Guo-long, Tao Kai, Fan Zhan. Adaptive beam space transformation generalized likelihood ratio test algorithm using acoustic vector sensor array[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(1): 135-139. (in Chinese)
- [16] 卜长江,罗跃生,等. 矩阵论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2008. 91-92.
Pu Chang-jiang, Luo Yue-sheng, et al. *Matrix Theory* [M]. Harbin: Harbin Engineering University Press, 2008. 91-92. (in Chinese)
- [17] 何晓群. 多元统计分析[M]. 北京: 中国人民大学大学出版社, 2004. 136-143.
He Xiao-qun. *Multivariate Statistical Analysis* [M]. Beijing: Renmin University of China Press, 2004. 136-143. (in Chinese)

作者简介



梁国龙 男, 1964年11月出生, 吉林农安人, 哈尔滨工程大学水声工程学院教授、博士生导师, 主要研究方向: 水声信号处理、水声工程、水声定位与导航、水声通信等。
E-mail: lianguolong@hrbeu.edu.cn



赵文彬 男, 1987年7月出生, 黑龙江省哈尔滨人, 哈尔滨工程大学水声工程学院博士研究生, 主要研究方向: 水声信号处理、阵列信号处理等。
E-mail: zhaowenbin_1987@126.com

付进(通信作者) 女, 1981年出生, 哈尔滨工程大学水声工程学院讲师、硕士指导教师, 主要研究方向: 水声目标探测与定位等。
E-mail: fujin@hrbeu.edu.cn