

# 量测提升卡尔曼滤波

胡振涛, 胡玉梅, 刘先省

(河南大学图像处理与模式识别研究所, 河南开封 475004)

**摘要:** 滤波器设计是系统辨识和状态估计的重要基础. 卡尔曼滤波通过状态预测和量测更新的实现框架, 在最小方差准则下实现对目标状态的最优估计, 但在单传感器量测环境中其滤波精度易受量测噪声随机性的影响. 本文提出一种基于量测提升策略的卡尔曼滤波算法实现框架, 新方法依据当前时刻量测和量测噪声先验统计信息构建虚拟量测, 并通过对虚拟量测采样以及融合提升系统量测信息可靠性, 进而改善状态估计精度. 同时, 针对算法在工程应用中实时性、准确性以及鲁棒性等需求, 设计了分布式加权融合和集中式一致性融合两种实现结构. 理论分析和仿真实验结果验证了算法的可行性和有效性.

**关键词:** 卡尔曼滤波; 量测提升策略; 分布式加权融合; 集中式一致性融合

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)05-1149-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.05.019

## Kalman Filter Based on Measurement Lifting Strategy

HU Zhen-tao, HU Yu-mei, LIU Xian-xing

(Institute of Image Processing and Pattern Recognition, Henan University, Kaifeng, Henan 475004, China)

**Abstract:** Filter design is the signification foundation for system identification and state estimation. Based on the realization construction of state prediction and measurement update, Kalman filter can obtain the optimal estimation of state estimated under the linear minimum variance criterion, but the filtering precision is vulnerable to the random characteristics in single sensor condition. A novel realization structure of Kalman filter based on measurement lifting strategy is proposed in the paper. At first, virtual measurement is constructed on the basis of latest measurement and the prior statistical information of measurement noise modeling. Then, virtual measurements are reasonably sampled and fusion to modify the measurement reliability, and the estimation precision is improved. In addition, aiming to the algorithm requirements including real-time, precise and robustness in engineering application, the distributed weight fusion structure and the centralized consistency fusion are designed respectively. Finally, the theoretical analysis and experimental results show the feasibility and efficiency of algorithm proposed.

**Key words:** Kalman filter; measurement lifting strategy; distributed weight fusion; centralized consistency fusion

## 1 引言

在自动控制、通讯、故障诊断和图像处理等学科领域, 常常会遇到估计问题, 所谓估计, 是从带有随机干扰的量测数据中, 通过有用信息的提取和利用, 最大可能逼近被量测系统的真实状态. 按照被估计量是否随时间发生变化的性质, 估计问题大致分为参数估计和状态估计两大类<sup>[1,2]</sup>. 将参数估计的方法与动态随机过程或序列的内部规律性结合起来, 就可以得到状态估计. 经典的估计方法如最小二乘估计, 极大似然估计, 极大

后验估计和线性最小方差估计等<sup>[3,4]</sup>. 基于贝叶斯估计原理的卡尔曼滤波(KF)给出了线性最小方差最优准则的典型实现<sup>[5]</sup>. 但获得最小方差的前提是被估计系统严格满足线性、高斯噪声且噪声相互独立的假设, 这些条件限制了其在非线性以及噪声有色系统估计中的应用.

近年来, 对于 KF 理论研究关注点主要集中在两方面, 第一方面是对其应用条件的放宽, 即如何利用 KF 算法框架解决非线性和噪声相关系统的状态估计问题. 对于非线性系统估计的处理, 结合局部线性化、UT

收稿日期: 2014-10-20; 修回日期: 2015-05-18; 责任编辑: 马兰英

基金项目: 国家自然科学基金(No. 61300214); 中国博士后科学基金(No. 2014M551999); 河南省高校科技创新团队支持计划(No. 13IRTSTHN021); 河南省基础与前沿技术研究计划(No. 132300410148); 河南省博士后科学基金(No. 2013029); 河南省高校青年骨干教师资助计划(No. 2013GGJS-026); 河南大学优秀青年培育基金(No. 0000A40366)

变换、Stirling 插值技术、三阶容积积分以及随机型采样等方法,国内外一些专家学者相继提出了扩展卡尔曼滤波(EKF)<sup>[6]</sup>、不敏卡尔曼滤波(UKF)<sup>[7,8]</sup>、中心差分卡尔曼滤波(CDKF)<sup>[9]</sup>、容积卡尔曼滤波(CKF)<sup>[10,11]</sup>、粒子滤波(PF)<sup>[12]</sup>和集合卡尔曼滤波(EnKF)<sup>[13]</sup>等及其改进算法,并针对具体对象和背景取得较好的滤波性能.对于有色噪声的噪声解耦问题,主要是利用状态扩维、量测扩维以及模型重构等方法实现噪声的白化处理.第二方面是对卡尔曼滤波过程中精度提升的研究,影响卡尔曼滤波精度的参数主要有两个:(1)系统噪声误差建模,该参数取决于对被估计对象系统状态演化过程的认知;(2)量测传感器误差,该参数越小越好,对于此类问题最简单的解决方式是选取精度较高的传感器,但无疑提高了硬件代价.另外一种常用的解决方式是在多传感器量测环境下利用目前较为流行的多源信息融合技术<sup>[4,14]</sup>,但为了获得满意的滤波效果,需要合理配置传感器数目以及选择有效加权融合方法,缺乏针对应用对象的普适性.针对以上问题,本文提出量测提升卡尔曼滤波算法,算法构建依赖于量测系统建模中先验信息的进一步提取和利用,在不增加硬件代价情况下改善卡尔曼滤波精度.另外,在结构上给出分布式加权融合和一致性加权融合两种实现形式,并对比分析了算法性能.

## 2 标准卡尔曼滤波

考虑如下一般线性高斯离散随机系统

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_k$ 表示 $k$ 时刻线性离散系统的状态向量. $\mathbf{z}_k$ 表示传感器获取被估计系统状态的量测信息.对于系统建模中不确定性,利用系统噪声 $\mathbf{u}_k$ 和量测噪声 $\mathbf{v}_k$ 表示. $\mathbf{u}_k$ 和 $\mathbf{v}_k$ 满足高斯白噪声特性, $\mathbf{u}_k \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\sigma}_{u_k}^2)$ , $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\sigma}_{v_k}^2)$ ,且 $\mathbf{u}_k$ 和 $\mathbf{v}_k$ 与初始状态 $\mathbf{x}_0$ 相互独立.KF具体实现如下:

首先,初始化状态值 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ 和滤波误差协方差 $\mathbf{P}_{0|0}$

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0 \quad (4)$$

其次,计算状态一步预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 和预测误差协方差 $\mathbf{P}_{k|k-1}$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{\sigma}_{u_{k-1}}^2\mathbf{\Gamma}_{k-1}^T \quad (6)$$

最后,求解当前时刻状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和估计误差协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k}$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T + \boldsymbol{\sigma}_{v_k}^2)^{-1} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{K}_k$ 表示 $k$ 时刻滤波增益阵,用来度量最新量测信息在当前时刻状态估计实现中的利用程度.

## 3 量测提升卡尔曼滤波

### 3.1 量测提升策略

在 $k$ 时刻,被估计系统可获取的量测信息 $\mathbf{z}_k$ 中,除了与建模有关的 $\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k$ ,还包括量测噪声的统计信息 $\boldsymbol{\sigma}_{v_k}^2$ ,其取值大小取决于所采用量测传感器精度.通过对以上两类信息综合,构建虚拟量测信息

$$\mathbf{z}_{k,m}^i = \mathbf{z}_k + \sum_{m=1}^M \mathbf{v}_{k,m}^i = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k + \sum_{m=1}^M \mathbf{v}_{k,m}^i, \quad m=1,2,\dots,M; i=1,2,\dots,N \quad (10)$$

其中, $\mathbf{z}_{k,m}^i$ 表示虚拟量测集合中的第 $i$ 个虚拟量测数据.

$\mathbf{v}_{k,m}^i$ 和 $\mathbf{v}_k$ 均为零均值高斯噪声,且 $\text{Cov}[\mathbf{v}_{k,m}^i, \mathbf{v}_k] = 0$ ,  $\text{Cov}[\mathbf{v}_{k,m}^i, \mathbf{v}_{k,m}^j] = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{v_i}^2, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ .根据高斯分布的性质, $\mathbf{v}_k$

$+ \sum_{m=1}^M \mathbf{v}_{k,m}^i \sim \mathcal{N}(0, (M+1)\boldsymbol{\sigma}_{v_i}^2)$ .由 $\mathbf{z}_{k,m}^i$ 实现形式可知,参数 $M$ 主要是用来控制 $\mathbf{z}_{k,m}^i$ 多样性程度,其取值大小与 $\boldsymbol{\sigma}_{v_i}^2$ 相关.当物理传感器量测方差 $\boldsymbol{\sigma}_{v_i}^2$ 较小时,适当增大参数 $M$ 值将有利于提升虚拟量测整体的噪声方差,从而增加 $\mathbf{z}_{k,m}^i$ 采样的多样性;反之,则需要减小参数 $M$ 值以限制 $\mathbf{z}_{k,m}^i$ 的随机性,通常取1和2. $N$ 表示 $\mathbf{z}_{k,m}^i$ 的数目,其数值越大融合精度越高.但考虑到算法滤波精度和实时性平衡,需要根据被估计系统状态维数、精度要求以及 $\boldsymbol{\sigma}_{v_i}^2$ 的大小合理的选取.

### 3.2 基于分布式加权融合的量测提升卡尔曼滤波

在分布式结构中,我们给出了无反馈的层次结构(即局部状态估计信息互不相关)<sup>[15]</sup>下分布式加权融合量测提升卡尔曼滤波(D-KF)的实现.虽然物理结构上无法由多传感器获取状态的量测数据,但虚拟量测的构建恰恰提供了分布式处理中局部估计所需的量测信息.令 $\mathbf{z}_{k,m}^{N+1} = \mathbf{z}_k$ ,则此时量测集合 $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_{k,m}^j\}$ ,其中 $j=1, 2, \dots, N+1$ .融合后系统状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g$ 可表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g = \boldsymbol{\omega}_k^1 \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1 + \boldsymbol{\omega}_k^2 \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2 + \dots + \boldsymbol{\omega}_k^{N+1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{N+1} \quad (11)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{N+1}$ 表示各虚拟量测分别参与滤波的局部系统状态估计, $\boldsymbol{\omega}_k^1, \boldsymbol{\omega}_k^2, \dots, \boldsymbol{\omega}_k^{N+1}$ 表示对应的待定加权矩阵,且

$$\boldsymbol{\omega}_k^1 + \boldsymbol{\omega}_k^2 + \dots + \boldsymbol{\omega}_k^{N+1} = \mathbf{I} \quad (12)$$

$\mathbf{I}$ 表示适维单位矩阵.分布式加权融合估计的结果全局最优,因此融合后的估计误差协方差 $\mathbf{P}_{k|k}^g$ 满足

$$\mathbf{P}_{k|k}^g = \min \{\mathbf{P}_{k|k}\} = \min \{E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g)^T]\} \quad (13)$$

根据最优化理论融合后估计误差协方差最小问题转化为分别以 $\boldsymbol{\omega}_k^j$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}$ 为变量和目标函数的线性规划

问题. 下面以两个互不相关的子滤波器为例, 给出分布式最优融合的理论推导.

由式(11)和式(12)知

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2) \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1 + \boldsymbol{\omega}_k^2 \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g &= \mathbf{x} - (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2) \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1 - \boldsymbol{\omega}_k^2 \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2 \\ &= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1) + \boldsymbol{\omega}_k^2 (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2) \end{aligned} \quad (15)$$

将式(15)代入式(13), 求取估计误差协方差

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k}^g &= E \{ [ (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1) + \boldsymbol{\omega}_k^2 (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2) ] \\ &\quad \cdot [ (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1) + \boldsymbol{\omega}_k^2 (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2) ]^T \} \\ &= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2) \mathbf{P}_{k|k}^{11} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2)^T + (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2) \mathbf{P}_{k|k}^{12} (\boldsymbol{\omega}_k^2)^T \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_k^2 \mathbf{P}_{k|k}^{21} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}_k^2)^T + \boldsymbol{\omega}_k^2 \mathbf{P}_{k|k}^{22} (\boldsymbol{\omega}_k^2)^T \\ &= \mathbf{P}_{k|k}^{11} - \boldsymbol{\omega}_k^2 (\mathbf{P}_{k|k}^{11} - \mathbf{P}_{k|k}^{21}) - (\mathbf{P}_{k|k}^{11} - \mathbf{P}_{k|k}^{12}) (\boldsymbol{\omega}_k^2)^T \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_k^2 (\mathbf{P}_{k|k}^{11} - \mathbf{P}_{k|k}^{12} - \mathbf{P}_{k|k}^{21} + \mathbf{P}_{k|k}^{22}) (\boldsymbol{\omega}_k^2)^T \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{P}_{k|k}^{11}$  和  $\mathbf{P}_{k|k}^{22}$  分别表示虚拟量测 1 和虚拟量测 2 所对应子滤波器的估计误差协方差,  $\mathbf{P}_{k|k}^{12} = \mathbf{P}_{k|k}^{21}$ , 表示子滤波器 1 和子滤波器 2 的估计交互误差协方差. 由于子滤波器估计互不相关, 故  $\mathbf{P}_{k|k}^{12} = \mathbf{P}_{k|k}^{21} = 0$ .

$$\mathbf{P}_{k|k}^g = \mathbf{P}_{k|k}^{11} - \boldsymbol{\omega}_k^2 \mathbf{P}_{k|k}^{11} - \mathbf{P}_{k|k}^{11} (\boldsymbol{\omega}_k^2)^T + \boldsymbol{\omega}_k^2 (\mathbf{P}_{k|k}^{11} + \mathbf{P}_{k|k}^{22}) (\boldsymbol{\omega}_k^2)^T \quad (17)$$

$\mathbf{P}_{k|k}^g$  最小等价于  $\text{tr}(\mathbf{P}_{k|k}^g)$  最小, 即  $\partial(\text{tr}(\mathbf{P}_{k|k}^g)) / \partial \boldsymbol{\omega}_k^2 = -\mathbf{P}_{k|k}^{11} - \mathbf{P}_{k|k}^{11} + 2\boldsymbol{\omega}_k^2 (\mathbf{P}_{k|k}^{11} + \mathbf{P}_{k|k}^{22}) = 0$  时,  $\boldsymbol{\omega}_k^2$  所对应的  $\mathbf{P}_{k|k}$  最小为  $\mathbf{P}_{k|k}^g$ ,  $\text{tr}(\cdot)$  表示对矩阵的求迹运算. 此时

$$\boldsymbol{\omega}_k^2 = \mathbf{P}_{k|k}^{11} (\mathbf{P}_{k|k}^{11} + \mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k}^g &= \mathbf{P}_{k|k}^{11} \left| \boldsymbol{\omega}_k^2 = \mathbf{P}_{k|k}^{11} (\mathbf{P}_{k|k}^{11} + \mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} \right. \\ &= \mathbf{P}_{k|k}^{11} - \mathbf{P}_{k|k}^{11} (\mathbf{P}_{k|k}^{11} + \mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} \mathbf{P}_{k|k}^{11} \\ &= [ (\mathbf{P}_{k|k}^{11})^{-1} + (\mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} ]^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

由于  $\mathbf{P}_{k|k}^{11} (\mathbf{P}_{k|k}^{11} + \mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} (\mathbf{P}_{k|k}^{11}) \geq 0$ , 故  $\mathbf{P}_{k|k}^g \leq \mathbf{P}_{k|k}^{11}$ , 同理  $\mathbf{P}_{k|k}^g \leq \mathbf{P}_{k|k}^{22}$ . 因此利用分布式最优加权融合方法能够实现系统状态估计精度的提高. 结合式(14)和式(18),  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g$  可表示为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{k|k}^{11} (\mathbf{P}_{k|k}^{11} + \mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1}) \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1 + \mathbf{P}_{k|k}^{11} (\mathbf{P}_{k|k}^{11} + \mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2 \\ &= [ (\mathbf{P}_{k|k}^{11})^{-1} + (\mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} ]^{-1} [ (\mathbf{P}_{k|k}^{11})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1 + (\mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2 ] \end{aligned} \quad (20)$$

依此类推, 若有  $N$  个不相关的传感器量测参与滤波实现, 则

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g &= [ (\mathbf{P}_{k|k}^{11})^{-1} + (\mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} + \cdots + (\mathbf{P}_{k|k}^{NN})^{-1} ]^{-1} \\ &\quad \cdot [ (\mathbf{P}_{k|k}^{11})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^1 + (\mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^2 + \cdots \\ &\quad + (\mathbf{P}_{k|k}^{NN})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^N ] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^g = [ (\mathbf{P}_{k|k}^{11})^{-1} + (\mathbf{P}_{k|k}^{22})^{-1} + \cdots + (\mathbf{P}_{k|k}^{NN})^{-1} ]^{-1} \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g = \sum_{j=1}^{N+1} \boldsymbol{\omega}_k^j \hat{\mathbf{x}}_{k|k,m}^j \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\omega}_k^j = \left[ \sum_{j=1}^{N+1} (\mathbf{P}_{k|k}^{jj})^{-1} \right]^{-1} (\mathbf{P}_{k|k}^{jj})^{-1} \quad (24)$$

分布式加权融合量测提升卡尔曼滤波具体实现如下:

滤波初始化:  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0,m} = \mathbf{x}_0$  and  $\mathbf{P}_{0|0,m} = \mathbf{P}_0$

Step 1 状态一步预测:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,m}^j = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,m}^j$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1,m}^j = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1,m}^j \mathbf{F}_{k-1}^T + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} \boldsymbol{\sigma}_{u_{k-1}}^2 \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^T$$

Step 2 量测更新:

$$\mathbf{K}_{k,m}^j = \begin{cases} \mathbf{P}_{k|k-1,m}^j \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1,m}^j \mathbf{H}_k^T + (M+1) \boldsymbol{\sigma}_{v_k}^2)^{-1}, j \leq N \\ \mathbf{P}_{k|k-1,m}^j \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1,m}^j \mathbf{H}_k^T + \boldsymbol{\sigma}_{v_k}^2)^{-1}, j = N+1 \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,m}^j = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,m}^j + \mathbf{K}_{k,m}^j (\mathbf{z}_{k,m}^j - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,m}^j)$$

$$\mathbf{P}_{k|k,m}^j = \mathbf{P}_{k|k-1,m}^j + \mathbf{K}_{k,m}^j \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1,m}^j$$

Step 3 状态融合估计:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g = \sum_{j=1}^{N+1} \boldsymbol{\omega}_k^j \hat{\mathbf{x}}_{k|k,m}^j$$

### 3.3 基于集中式一致性融合的量测提升 Kalman 滤波

考虑到实际工程环境中, 一些外界扰动 (传输误差、计算误差、环境噪声和人为干扰等) 是无法回避的, 使得部分量测噪声出现偏离量测系统建模中噪声统计特性的情况, 此时, 如果仍然遵循着已知噪声统计特性进行分布式融合, 必然将导致滤波精度的下降. 在样本数目有限且噪声统计信息不确定情况下, 针对虚拟量测的有效融合问题, 一个直观的解决方法就是减少虚拟量测融合过程中对于量测噪声统计信息的依赖, 并尽可能提取和利用虚拟量测间自身蕴含的冗余和互补信息. 基于以上分析, 通过构建表征虚拟量测间数据相互支持程度信息的一致性距离和一致性矩阵, 合理配置虚拟量测在量测融合过程中的权重, 以实现虚拟量测在数据融合过程中的有效利用, 在此基础上, 设计了基于一致性加权融合量测提升卡尔曼滤波算法 (C-KF).

考虑到虚拟量测之间相互支持程度的度量, 定义置信距离

$$\mathfrak{N}_k^{\xi} = \|\mathbf{z}_{k,m}^j - \mathbf{z}_{k,m}^{\xi}\| \quad j=1, 2, \dots, N+1; \xi=1, 2, \dots, N+1 \quad (25)$$

由表达式可知:  $\mathfrak{N}_k^{\xi}$  值越大, 则表明两虚拟量测间的差别越大, 此时  $\mathbf{z}_{k,m}^j$  和  $\mathbf{z}_{k,m}^{\xi}$  之间相互支持程度就越弱; 反之越强. 为对  $\mathbf{z}_{k,m}^j$  和  $\mathbf{z}_{k,m}^{\xi}$  相互支持程度进行规范性量化, 在  $\mathfrak{N}_k^{\xi}$  的基础上定义一致性距离  $\boldsymbol{\Theta}_k^{\xi}$ .  $\boldsymbol{\Theta}_k^{\xi}$  应满足以下两个条件: (1) 与  $\mathfrak{N}_k^{\xi}$  成反比例关系; (2)  $\boldsymbol{\Theta}_k^{\xi} \in [0, 1]$ . 基于以上考虑, 一致性距离  $\boldsymbol{\Theta}_k^{\xi}$  数学表达式采用如下形式:

$$\boldsymbol{\Theta}_k^{\xi} = (\max \{ \mathfrak{N}_k^{\xi} \} - \mathfrak{N}_k^{\xi}) / \max \{ \mathfrak{N}_k^{\xi} \} \quad (26)$$

式中  $\max \{ \mathfrak{N}_k^{\xi} \}$  表示  $\mathfrak{N}_k^{\xi}$  中的最大值, 由于  $\mathbf{z}_{k,m}^j$  对自身的相似程度最大, 因此  $\boldsymbol{\Theta}_k^j$  为 1. 显然, 式(26)表达式满足  $\boldsymbol{\Theta}_k^{\xi}$  应具备的两个基本条件. 令  $\eta_k^j$  表示  $\mathbf{z}_{k,m}^j$  与  $\{ \mathbf{z}_{k,m}^j \}$  中所有元素的总体相似程度

$$\eta_k^j = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_k^j \boldsymbol{\Theta}_k^{\xi} \quad (27)$$

$\alpha_k^j$  为权系数, 结合式 (27), 我们构建用于表征  $\{z_{k,m}^j\}$  中所有元素的总体支持程度一致性向量  $\bar{\eta}_k = [\eta_k^1 \ \eta_k^2 \ \dots \ \eta_k^{N+1}]^T$ , 而  $\bar{\eta}_k$  的计算转化为

$$\bar{\eta}_k = \Psi_k \alpha_k \quad (28)$$

其中

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \alpha_k^1 & \alpha_k^2 & \dots & \alpha_k^{N+1} \\ \Theta_k^{11} & \Theta_k^{21} & \dots & \Theta_k^{(N+1)1} \\ \Theta_k^{12} & \Theta_k^{22} & \dots & \Theta_k^{(N+1)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_k^{1(N+1)} & \Theta_k^{2(N+1)} & \dots & \Theta_k^{(N+1)(N+1)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$\alpha_k$  为权向量,  $\Psi_k$  为一一致性矩阵. 由  $\Psi_k$  中元素数值特点可知:  $\Psi_k$  是一个对角线元素全为 1 的正定对称矩阵, 且该矩阵中的其他元素均为不大于 1 的正数. 根据 Perron-Frobenius 定理:  $\Psi_k$  存在最大模特征值  $\lambda_k, \lambda_k > 0$ , 且仅有该特征值对应特征向量  $\beta_k = [\beta_k^1 \ \beta_k^2 \ \dots \ \beta_k^{N+1}]$  中的元素全为正并使得  $\lambda_k \beta_k = \Psi_k \beta_k$ . 令  $\alpha_k = \beta_k$ , 结合式 (28), 则

$$\bar{\eta}_k = \lambda_k \alpha_k \quad (31)$$

由于  $\lambda_k$  为一不等于零的实常数, 则  $\bar{\eta}_k \propto \alpha_k$ . 对  $\alpha_k$  中的元素进行归一化处理, 即

$$\bar{\alpha}_k^j = \alpha_k^j / \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_k^j \quad (32)$$

考虑到  $\bar{\eta}_k$  和  $\alpha_k$  成正比, 因此,  $\bar{\alpha}_k^j$  此时可以表示为虚拟量测  $z_{k,m}^j$  被虚拟量测集合  $\{z_{k,m}^j\}$  中所有元素的总体支持程度, 即  $z_{k,m}^j$  在实现一致性融合过程所具有的权重. 最终, 结合  $\bar{\alpha}_k^j$  和  $z_{k,m}^j$  实现当前时刻对于虚拟量测融合值  $\bar{z}_k^j$  的计算

$$\bar{z}_k^j = \sum_{m=1}^{N+1} \bar{\alpha}_k^j z_{k,m}^j \quad (33)$$

对于虚拟量测集合噪声方差的求解, 此时需要结合虚拟量测  $z_{k,m}^j$  和  $\hat{z}_k^j$ , 依据数理统计中方差计算基本原理实现, 即

$$\hat{\sigma}_{v_k}^2 = \sum_{j=1}^{N+1} (z_{k,m}^j - \hat{z}_k^j) (z_{k,m}^j - \hat{z}_k^j)^T / (N+1) \quad (34)$$

依据集中式融合结构形式, C-KF 与标准 KF 实现区别在于需要对式 (7) 和式 (8) 进行修正. C-KF 算法具体实现如下:

滤波初始化:  $\hat{x}_{0|0} = x_0$  and  $P_{0|0} = P_0$

Step 1 虚拟量测一致化:

根据式 (25) 至式 (32), 求解每个虚拟量测在融合处理中的权重  $\bar{\alpha}_k^j$ .

结合式 (33) 和式 (34) 计算虚拟量测融合值  $\bar{z}_k^j$  以及虚拟量测集合噪声方差  $\hat{\sigma}_{v_k}^2$ .

Step 2 状态一步预测:

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1}$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \sigma_{a_{k-1}}^2 \Gamma_{k-1}^T$$

Step 3 量测更新:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + \hat{\sigma}_{v_k}^2)^{-1}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (\hat{z}_k^j - H_k \hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1}$$

## 4 仿真实验与分析

为验证可行性和有效性, 以下给出虚拟量测前提下 Monte Carlo 仿真算例, 取 Monte Carlo 次数为 200, 并以均方根误差 (RMSE) 作为衡量算法精度优劣的性能指标.

算例 1 无扰动情况下

仿真实验采用建立在笛卡尔直角坐标系下的匀速

运动模型, 式 (1) 中状态转移阵  $F_k = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}$ ,  $\Delta =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{系统噪声驱动阵 } \Gamma_k = \begin{bmatrix} \tau^2/2 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2/2 & \tau \end{bmatrix}^T, \tau$$

表示采样间隔,  $\tau = 1$ . 系统随机噪声方差矩阵  $Q_k = \text{diag}([0.2^2 \ 0.2^2])$ . 式 (2) 中量测矩阵  $H_k =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{量测噪声方差矩阵 } \sigma_{v_k}^2 = \text{diag}([0.3^2 \ 0.3^2]).$$

$M = 1$ , 系统初始状态  $x_0 = [11 \text{ km} \ 0.5 \text{ km/s} \ 7 \text{ km} \ 0.3 \text{ km/s}]$ , 采样步长为 30.

图 1 给出  $N$  取 50 时, 三种算法在水平方向和竖直

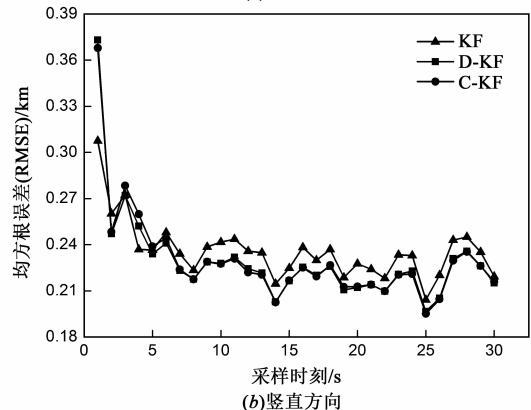
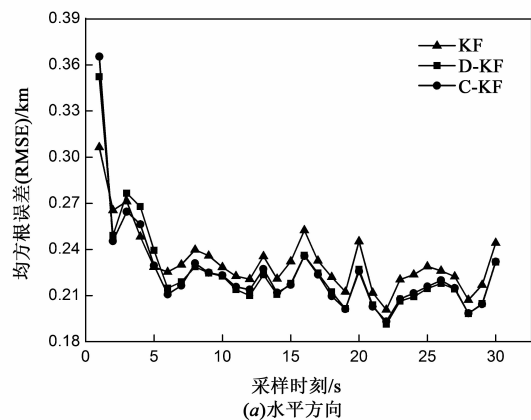


图 1 状态估计 RMSE 比较

方向目标位置估计的 RMSE 比较. 由图 1 可以直观的看到: D-KF 和 C-KF 的滤波精度均优于标准 KF 算法, 另外, 随着虚拟量测数目的增加, 系统状态估计精度相应也得到了改善. 分析其原因在于, 通过量测提升策略的引入, 并利用多源信息融合技术实现对于当前量测数据中不确定消除实现滤波估计精度的提升.

图 2 给出了虚拟量测数目与状态估计 RMSE 均值之间关系. 由图 2 可以清晰看到虚拟量测数目从 3 增加 30 过程中, RMSE 均值减小较快. 这种现象表明, 对于单传感器系统, 通过构建虚拟量测, 并采用 D-KF 或 C-KF 将有效提高系统状态估计精度, 进而降低对传感器自身精度的要求, 减小传感器的硬件代价. 再者, D-KF 根据加权最优分配原则对传感器量测和所有虚拟量测进

行融合得到系统状态的全局估计, 在相同虚拟量测数目的条件下, 相对于 C-KF, D-KF 能够获得更高的状态估计精度. 而 C-KF 通过一致性检验原理对虚拟传感器信息进行融合, 随着虚拟量测个数的增多, C-KF 的状态估计精度逐渐逼近 D-KF.

图 3 给出了虚拟量测数目与算法耗时的关系. 由图 3 可知, 随着虚拟量测个数的增加 D-KF 和 C-KF 的计算量均随之增大, 但 C-KF 计算量增加的速度要远大于 D-KF. 其主要原因是 C-KF 在求解虚拟量测自身权重并融合的过程中需要进行矩阵求逆运算, 伴随虚拟量测数目的增多矩阵维数将成线性增长, 从而导致 C-KF 计算复杂度近似二次函数增长. 因此, 考虑算法实时性能, 虚拟量测的个数不可能无限大.

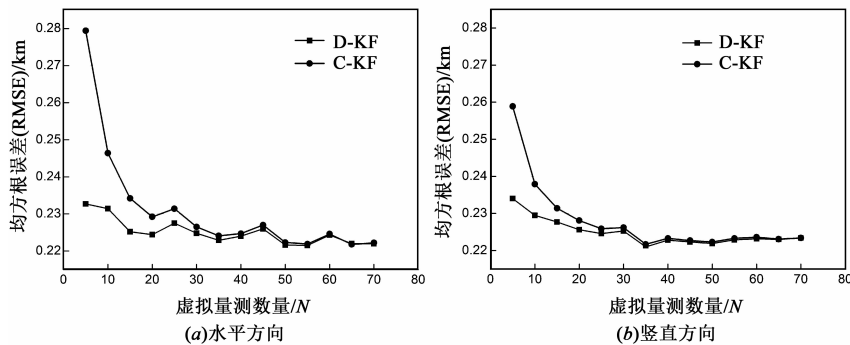


图2 虚拟量测数目与状态估计RMSE均值的关系

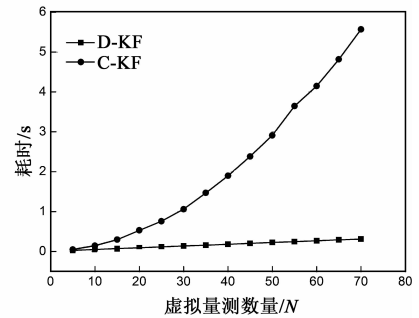


图3 虚拟量测数目与算法耗时的关系

**算例 2 扰动情况下**

在实际工程应用中, 扰动的影响容易造成系统状态估计偏差, 严重时甚至造成估计结果的发散现象. 在算例 1 的基础上进一步考虑扰动干扰情况, 给出扰动下 D-KF 和 C-KF 的状态估计精度比较以验证算法的有效性. 在仿真实验中, 设定扰动分别服从高斯分布  $\eta_g$  和泊松分布  $\eta_p$ , 且  $\eta_g \sim \mathcal{N}(0, 2)$ ,  $\eta_p \sim \pi(0.8)$ . 图 4 中给出高斯扰动发生概率为 0.4 时, 扰动特性为高斯分布下状态估计 RMSE 结果的比较. 采样步长为 40, 其它参数同算例 1, 仿真实验结果与分析如图 4.

从图 4 中可以看出, 由于扰动影响, 与图 1 相比系统状态估计 RMSE 整体均增大, 且稳定性变差, 且这种影响对于标准 KF 而言其影响尤其明显. 分布式结构固有的容错性使得 D-KF 相对标准 KF 具有较好的鲁棒性, 但由于分布式融合结构中的子滤波器实现过程需

要直接利用量测噪声的先验信息(量测噪声方差), 而实际上由于受到扰动信息的影响, 先验信息的可靠性已经被破坏, 从而限制了此种融合方式提升滤波精度的有效性. 不同于 D-KF 实现机理, C-KF 通过对虚拟量测数据之间相互支持程度的度量实现量测融合中权重的评估, 避免了对量测先验信息的依赖, 从而有效抑制扰动对滤波精度的影响. 正是 C-KF 对于数据的处理机制改善了滤波估计精度, 使得在扰动影响情况下, C-KF 相对于 D-KF 取得了更好的滤波效果. 为了进一步验证 C-KF 在抑制扰动对滤波精度影响上的可行性, 表 1 给出在扰动服从泊松分布情况下, 不同扰动概率时 D-KF 算法和 C-KF 算法的系统状态估计精度. 由表中数据可以清晰看出, 随着扰动发生概率的增大, D-KF 和 C-KF 算法的 RMSE 均随之增加, 但 C-KF 的 RMSE 均值均优于 D-KF.

表 1 泊松分布扰动不同扰动概率下状态估计的 RMSE 均值

扰动概率		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
D-KF	水平	0.3307	0.4194	0.5152	0.5915	0.6640	0.7347	0.8154	0.8874	0.9558
	竖直	0.3355	0.4253	0.5040	0.5778	0.6624	0.722	0.8031	0.86	0.9299
C-KF	水平	0.3222	0.3865	0.4667	0.5331	0.5973	0.6622	0.7366	0.8047	0.8696
	竖直	0.3263	0.4009	0.4699	0.5373	0.6157	0.6715	0.7486	0.8033	0.8713

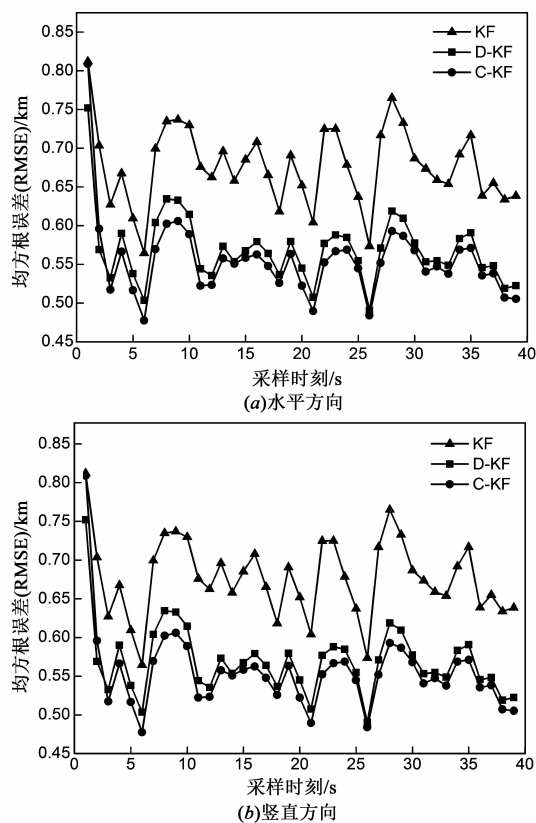


图4 高斯扰动情况下状态估计RMSE比较

## 5 小结

针对单传感器量测噪声随机性对卡尔曼滤波精度的不利影响,在不增加物理传感器数目情况下,通过虚拟量测的设计实现信息融合技术的引入,提出一种基于量测提升策略卡尔曼滤波的实现框架.此外,考虑滤波精度、计算复杂度以及扰动影响等实际因素,在量测提升策略卡尔曼滤波框架下,设计了基于分布式最优融合和基于集中式一致性距离融合的两种实现结构.理论推导和仿真实验分析表明:在滤波精度上,D-KF和C-KF均优于标准KF.如不考虑扰动影响,D-KF滤波精度一般优于C-KF,同时随着虚拟量测数目增加C-KF滤波精度逐渐趋于D-KF,但C-KF中权重计算方式将导致其计算量随着虚拟量测数目增加而急剧增大.如考虑扰动影响,由于C-KF实现机理能够有效抑制扰动影响,使得其滤波精度优于D-KF.因此,在实际应用中可根据可被估计对象的特点以及对系统估计精度和实时性要求,选择适当的量测提升卡尔曼滤波算法的实现形式.

### 参考文献

[1] Ristic B, Arulampalam M S, Gordon N. Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications [M]. London: Artech House, 2004: 239 – 251.

[2] Wang X, Liang Y, Pan Q, et al. Nonlinear Gaussiansmoothers with colored measurement noise [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 870 – 876.

[3] 潘泉, 梁咏梅. 多源信息融合理论及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2013: 29 – 38.

Pan Q, Liang Y M, et al. Multi-Source Information Fusion Theory and its Application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 29 – 38. (in Chinese)

[4] Bar-Shalom Y, Willett P K, Tian X. Tracking and Data Fusion: a Handbook of Algorithms [M]. Storrs: YBS Publishing, 2011: 56 – 61.

[5] Simon D. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms [J]. IET Control Theory & Applications, 2010, 4(8): 1303 – 1318.

[6] Khanesar M A, Kayacan E, Teshnehlab M, et al. Extended kalman filter based learning algorithm for type-2 fuzzy logic systems and its experimental evaluation [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2012, 59(11): 4443 – 4455.

[7] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401 – 422.

[8] Gustafsson F, Hendeby G. Some relations between extended and unscented Kalman filters [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(2): 545 – 555.

[9] Zhao D M, Bao H, Wang Q B, Gao Z. The second order central divided-difference Kalman filter [A]. The Eighth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery [C]. China, IEEE, 2011, 2637 – 2640.

[10] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254 – 1269.

[11] Ding Z, Balaji B. Comparison of the unscented and cubature Kalman filters for radar tracking applications [A]. IET International Conference on Radar Systems [C]. UK, IEEE, 2012: 1 – 5.

[12] Cappe O, Godsill S J, Moulines E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 899 – 924.

[13] Lorentzen R J, Naevdal G. An iterative ensemble Kalman filter [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(8): 1990 – 1995.

[14] 韩崇昭, 朱红艳, 段战胜. 多源信息融合 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2010: 55 – 66.

Han C Z, Zhu H Y, Duan Z S. Multi-Source Information Fusion [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2010: 55 – 66. (in Chinese)

- [15] 潘泉,王增福,梁彦,等. 信息融合理论的基本方法与进展( II ) [ J ]. 控制理论与应用, 2012, 29 ( 10 ): 1234 - 1244.

Pan Q, Wang Z F, Liang Y, et al. Basic methods and progress of information fusion ( II ) [ J ]. Control Theory & Applications, 2012, 29(10): 1234 - 1244. ( in Chinese )

#### 作者简介



**胡振涛** 男, 1979 年 6 月出生于河南永城市, 现为河南大学计算机与信息工程学院副教授, 硕士生导师. 主要研究方向为复杂系统建模与估计, 非线性滤波.

E-mail: hzt@henu.edu.cn



**胡玉梅** 女, 1990 年 10 月出生于河南永城市, 现为河南大学计算机与信息工程学院研究生. 主要研究方向为复杂系统建模与估计, 非线性滤波.

E-mail: hym\_henu@163.com



**刘先省** 男, 1964 年 9 月出生于河南潢川县, 现为河南大学计算机与信息工程学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为多源信息融合, 传感器管理.

E-mail: liuxianxing@henu.edu.cn