

基于非凸极小化的扰动压缩数据分离

刘春燕^{1,4}, 王建军¹, 王文东², 王尧³

(1. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715; 2. 西南大学计算机与信息科学学院, 重庆 400715;
3. 西安交通大学数学与统计学院, 陕西西安 710049; 4. 重庆师范大学涉外商贸学院数学与计算机学院, 重庆 400715)

摘 要: 压缩数据分离是信号采样理论的研究热点之一. 本文给出了在冗余字典满足相互一致性条件和完全扰动矩阵满足限制性同构条件下, 非凸 $l_q (0 < q \leq 1)$ 极小化的压缩数据分离问题的重构条件和误差估计, 理论结果表明在不同冗余字典和不同扰动下, 此方法仍能鲁棒重构原始信号. 基于两种不同的冗余字典—离散余弦变换(DCT)和小波变换(WT), 我们执行了一系列仿真实验, 验证了在测量矩阵受各种扰动和加性噪音下, 非凸 $l_q (0 < q \leq 1)$ 极小化方法具有较强的鲁棒性和稳定性. 本文结果为压缩感知和数据分离的进一步发展和应用提供借鉴.

关键词: 压缩数据分离; l_q 极小化; 相互一致性; 限制性等容性质; 紧框架; 完全扰动

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)01-0037-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.01.006

A Perturbation Analysis on Compressed Data Separation with Nonconvex Minimization Method

LIU Chun-yan^{1,4}, WANG Jian-jun¹, WANG Wen-dong², WANG Yao³

(1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;
2. School of Computer and Information Science, Southwest University, Chongqing 400715, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China;
4. School of Mathematics and Computer, Chongqing Normal University Foreign Trade and Business College, Chongqing 400715, China)

Abstract: Compressed data separation is one of the hot research theories of signal sampling. Under the condition that the redundant dictionary and perturbation matrix satisfy mutual coherence and restricted isometry property, respectively, the reconstruction condition and error estimation of compressed data separation via nonconvex $l_q (0 < q \leq 1)$ minimization are established. Under different redundant dictionaries and perturbation, our results show that nonconvex $l_q (0 < q \leq 1)$ minimization can still robustly reconstruct the original signal. In view of two different redundant dictionaries—the discrete cosine transform and wavelet transform, we conduct a series of simulation experiments to testify the strong robustness and stability of nonconvex $l_q (0 < q \leq 1)$ minimization method with various perturbation and additive noise. The obtained results provide a reference for further development and application of compressed sensing and data separation.

Key words: compressed data separation; l_q minimization; mutual coherence; restricted isometry property (RIP); tight frames; perturbation

1 引言

压缩感知 (Compressed/Compressive Sensing, CS)^[1-3] 是近年来备受关注的一种新颖的信号采样理论, 这种新的采样理论已经实现了采样和压缩过程合二为一. 该理论利用了信号 (近似) 稀疏性, 以远低于奈奎斯特 (Nyquist) 标准对信号进行采样和处理, 实现了

信号的高效采集和精确重构. 压缩感知理论的优点在于信号的投影测量数据量远远小于传统的奈奎斯特采样方法所获的数据量, 突破了奈奎斯特采样定理的瓶颈, 使得高分辨率信号的采集成为可能. 该理论为信号采样理论带来了历史性的变革, 目前已在压缩成像, 模拟信息转换, 生物传感, 遥感成像等领域得到广泛的研究^[2,4,5]. 在信号 $\tilde{f} \in \mathbb{R}^n$ 稀疏或可压缩的前提下, 压缩感

知所要解决的问题是将求解欠定方程 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}$ 的问题转化为 l_0 极小化问题:

$$\min_{\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^n} \|\tilde{\mathbf{f}}\|_0 \quad \text{s. t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ 是观测信号, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($m \ll n$) 是测量矩阵, $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^n$ 是需要重构的目标信号. 如果信号 $\tilde{\mathbf{f}}$ 至多有 k 个非零元素, 我们称这样的信号为 k -稀疏信号, 记为 $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_0 \leq k$. 由于问题(1)是 NP-hard 问题, 在多项式时间内不能有效求解, 通常是将其转化为求解一个更加简单的 l_1 极小化问题:

$$\min_{\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^n} \|\tilde{\mathbf{f}}\|_1 \quad \text{s. t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} \quad (2)$$

由于问题(2)是一个凸优化问题, 可利用线性规划相关方法进行求解, 然而这样得到的解并不一定是 l_0 极小化问题的解^[6-8], 且不能在最少的观测次数下重构原始信号^[9,10]. 自然地, 为了提高压缩感知的应用效果, 学者提出了如下 l_q ($0 < q \leq 1$) 极小化问题:

$$\min_{\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^n} \|\tilde{\mathbf{f}}\|_q^q \quad \text{s. t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} \quad (3)$$

其中 $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_q^q = \sum_{j=1}^d |\tilde{f}_j|^q$.

然而, 常见的自然信号在时域内不一定是稀疏信号, 上述信号重构过程不能直接应用于自然信号的重构. 目前许多学者的研究表明, 一些自然信号在某些字典 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{n \times d}$ ($d \geq n$)^[11,12] 上能够稀疏表示. 即存在稀疏信号 \mathbf{x} , 使得 $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{D}\mathbf{x}$, 考虑到测量 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}$, 有:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$$

其中传感矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times d}$. 如果 $\tilde{\mathbf{A}}$ 满足一定的限制性等容条件(RIP), 则信号 \mathbf{x} 可通过 l_1 或 l_q 极小化方法来重构^[13,14].

实际上, 一些真实存在的数据还表现出诸多异于传统数据的其它结构^[15], 比如多模态声音数据及图像数据, 其子部分的形态各不相同. 目前这些数据已在信息论、图像处理、无线通信等领域具有广泛性的应用^[16,17]. 从数学角度讲, 上述问题中的数据 $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^n$ 可以被分解为 $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ ($\mathbf{f}_1 \in \mathbf{R}^n, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{R}^n$), 在文献[18]中, 研究了如下基于 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ 的 l_1 极小化压缩数据分离问题:

$$\min_{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{R}^n} \|\mathbf{D}_1^T \mathbf{f}_1\|_1 + \|\mathbf{D}_2^T \mathbf{f}_2\|_1 \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \|\mathbf{A}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon$$

由于 l_q ($0 < q \leq 1$) 极小化方法可以有效地减少采样次数^[9,10]. 自然地, 本文从上述问题进行延伸, 在测量矩阵受扰动和加性噪音条件下, 讨论了关于扰动意义下非凸 l_q ($0 < q \leq 1$) 极小化压缩数据分离问题:

$$\min_{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{R}^n} \|\mathbf{D}_1^T \mathbf{f}_1\|_q^q + \|\mathbf{D}_2^T \mathbf{f}_2\|_q^q \quad (5)$$

$$\text{s. t. } \|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) - \mathbf{y}\|_q^q \leq \varepsilon'_{A,k,y}$$

其中 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$ (\mathbf{E} 为 \mathbf{A} 的扰动矩阵), $\varepsilon'_{A,k,y} =$

$\left(\frac{\varepsilon_A^k K_A^{(k)} + \varepsilon_A \alpha_A r_k}{1 - K_A^{(k)}(r_k + s_k)} + \varepsilon_y \right) \|\mathbf{y}\|_2 \geq 0$ 为全噪音参数.

为了研究方便, 我们对问题(5)进行变换, 设线性测 $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) + \mathbf{e}$, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($m \ll n$) 是测量矩阵, $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^m$ 是误差向量且 $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \varepsilon'_{A,k,y}$. 设 $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{R}^{n \times d_1}, \mathbf{D}_2 \in \mathbf{R}^{n \times d_2}$ 是两个紧框架, 对所有 $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_2^T \tilde{\mathbf{f}}$, 设 $d = d_1 + d_2$, 令 $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1 | \mathbf{D}_2], \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}$, 则有 $\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, 问题(5)的等价问题为非

凸 l_q ($0 < q \leq 1$) 极小化的扰动压缩数据分离问题:

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbf{R}^n} \|\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f}\|_q^q \quad \text{s. t. } \|\hat{\mathbf{A}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon'_{A,k,y} \quad (6)$$

关于扰动情形下, 稀疏信号重构的研究相对较少^[19,20]. 在无字典情形 ($\mathbf{D} = \mathbf{I}$) 下, 文献[19]研究了全扰动 l_1 极小化问题的重构条件和误差分析. 而文献[20]将 l_1 极小化问题的结果推广到 l_q ($0 < q \leq 1$) 极小化问题情形. 然而据作者所知, 目前关于字典情形下的扰动压缩数据分离问题具有较少研究. 本文我们分别考虑在矩阵 \mathbf{A} 的扰动和加性噪音条件下, 对一般信号 \mathbf{f} , 利用 $\hat{\mathbf{A}}$ 的 \mathbf{D} -限制性等容性质 ($\hat{\mathbf{A}}\mathbf{D}$ -RIP), 获得了信号 \mathbf{f} 重构的充分条件以及误差上界估计, 所获误差上界估计受扰动矩阵 \mathbf{E}, q ($0 < q \leq 1$) 值和最佳 k 项逼近控制. 为了证实理论结果的有效性, 我们分别对矩阵 \mathbf{A} 进行扰动, 具体来说, 随机选取矩阵 \mathbf{A} 的 10%, 20%, ..., 100% 元素扰动, 以及选取的扰动水平分别为 0, 0.01, 0.05, 0.1, 实验表明在这些扰动、不同字典及加性噪音条件下, 信号 \mathbf{f} 仍能鲁棒重构.

2 背景介绍

为了方便介绍后文, 本文首先给出如表 1 所示的符号说明.

表 1

名称	标量	向量	矩阵
符号	$a, b, d, d_1, d_2, m, n, k, q, i, j, \rho, \varepsilon_A, \varepsilon_A^k, \delta_k, \hat{\delta}_k, \mu_1, K_A^{(k)}, \alpha_A, r_k, s_k$	$\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k^c}, \mathbf{y}, \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{e}, \mathbf{d}_{1i}, \mathbf{d}_{2j}$	$\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{E}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}$

接下来, 我们给出以下记号.

- 给定正整数 $d, [d] = \{1, 2, \dots, d\}$, 记索引集 $J \subset [d]$.

- 给定正整数 $k \in [d]$, 记向量 \mathbf{x} 的最佳 k 项逼近 $\mathbf{x}_k = \arg \min_{\|\mathbf{y}\| \leq k} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$ 记 $\mathbf{x}_{k^c} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$.

- 记 $\|\mathbf{A}\|_2^{(k)} = \sigma_{\max}^{(k)}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的所有 k 列子矩阵中的最大特征值.

- \mathbf{D}_J 表示从 \mathbf{D} 中取出索引集 J 对应的列所组成的

矩阵, \mathbf{D}_{1J} 表示从矩阵 \mathbf{D}_1 中取出索引集 J 对应的列所组成的矩阵, 记 $\mathbf{D}_J^T = (\mathbf{D}_J)^T$.

$$\cdot \text{记 } K_A^{(k)} = \frac{\sqrt{1+\delta_k}}{\sqrt{1-\delta_k}}, \alpha_A = \frac{\|\mathbf{A}\|_2}{\sqrt{1-\delta_k}}, r_k = \frac{\|\mathbf{x}_k\|_2}{\|\mathbf{x}_k\|_1}, s_k = \frac{\|\mathbf{x}_k\|_1}{\sqrt{k}\|\mathbf{x}_k\|_2}, \text{且 } r_k, s_k \ll 1.$$

对于扰动矩阵 \mathbf{E} 与噪音向量 \mathbf{e} , 我们通过如下相对误差上限来刻画:

$$\frac{\|\mathbf{E}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2} \leq \varepsilon_A, \frac{\|\mathbf{E}\|_2^{(k)}}{\|\mathbf{A}\|_2^{(k)}} \leq \varepsilon_A^{(k)}, \frac{\|\mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \leq \varepsilon_y,$$

其中 $\varepsilon_A, \varepsilon_A^{(k)}, \varepsilon_y$ 表示相对误差上限; $\|\mathbf{A}\|_2, \|\mathbf{A}\|_2^{(k)}, \|\mathbf{y}\|_2 \neq 0; \varepsilon_A, \varepsilon_A^{(k)}, \varepsilon_y < 1$.

接下来, 基于文献[19]中的结果, 我们给出了如下定义:

定义 1 ($\hat{\mathbf{A}}$ -RIP) 设 $\delta_k (k=1, 2, \dots)$ 为矩阵 \mathbf{A} 的限制性等容常数, 对于任意 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n, \|\tilde{\mathbf{x}}\|_0 \leq k$, 若:

$$(1 - \hat{\delta}_k) \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq \|\hat{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq (1 + \hat{\delta}_k) \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad (7)$$

则称矩阵 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$ 服从限制性等容性质 (RIP). 且满足(7)式的最小常数 $\hat{\delta}_k$, 称为矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 的限制性等容常数 (RIC).

压缩感知的主要理论研究条件为限制性等容性质 (RIP), 现将 $\hat{\mathbf{A}}$ 的限制性等容性质 ($\hat{\mathbf{A}}$ -RIP) 延伸到 $\hat{\mathbf{A}}$ 的 \mathbf{D} -限制性等容性质 ($\hat{\mathbf{A}}$ - \mathbf{D} -RIP).

定义 2 ($\hat{\mathbf{A}}$ - \mathbf{D} -RIP) 设 $\delta_k (k=1, 2, \dots)$ 为矩阵 \mathbf{A} 的限制性等容常数, 对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \|\mathbf{x}\|_0 \leq k$, 若:

$$(1 - \hat{\delta}_k) \|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq \|\hat{\mathbf{A}}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq (1 + \hat{\delta}_k) \|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad (8)$$

则称矩阵 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$ 服从 \mathbf{D} -限制性等容性质 (\mathbf{D} -RIP). 且满足(8)式的最小常数 $\hat{\delta}_k$ 称为矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 的 \mathbf{D} -限制性等容常数 (\mathbf{D} -RIC).

特别地, 类似于文献[19]的定理 1 可知, $1 - (1 - \delta_k)(1 - \varepsilon_A^{(k)})^2 \leq \hat{\delta}_k \leq (1 + \delta_k)(1 + \varepsilon_A^{(k)})^2 - 1$.

显然 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ 时, $\hat{\mathbf{A}}$ - \mathbf{D} -RIP 包含 RIP 与 $\hat{\mathbf{A}}$ -RIP. 在压缩感知理论研究中, 关于刻画测量矩阵内部结构性质主要是相干性.

定义 3 设 $\mathbf{D}_1 = (d_{1i})_{1 \leq i \leq d_1}, \mathbf{D}_2 = (d_{2j})_{1 \leq j \leq d_2}, \mathbf{D}_1$ 与 \mathbf{D}_2 的相干性定义为:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{D}_1; \mathbf{D}_2) = \max_{i,j} | \langle d_{1i}, d_{2j} \rangle | \quad (9)$$

为了证明我们的主要结果, 我们需要给出以下预备引理.

引理 1 [21] 对于任意 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2 \leq \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_q}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}} + P_q \sqrt{n} (\max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{x}_i| - \min_{1 \leq i \leq n} |\tilde{x}_i|) \quad (10)$$

其中 $P_q = (\frac{q}{2})^{\frac{q}{2-q}} - (\frac{q}{2})^{\frac{2}{2-q}}, 0 < q < 1$.

3 重构性能研究

有了上述的准备工作, 我们给出完全扰动非凸 $l_q (0 < q \leq 1)$ 极小化压缩数据分离问题的理论分析结果, 即下面的定理 1.

定理 1 设 $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) + \mathbf{e}, \mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 是两个任意的紧框架, $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1 | \mathbf{D}_2], \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{f} =$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}, k < b < a \left(\frac{1}{(\frac{q}{2})^{\frac{q}{2-q}} - (\frac{q}{2})^{\frac{2}{2-q}}} \right)^q \text{ (其中 } k, b, a \text{ 为正整$$

数), $\rho = \frac{k}{b}$, 对于信号 $\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f}$ 满足: $r_k + s_k < \frac{1}{K_A^{(k)}}$, 若

$$\begin{aligned} & \mu_1(k+a)(1-\delta_{k+a})(1-\varepsilon_A^{(k+a)})^2 \\ & + 2^{\frac{2}{q}} \rho^{\frac{2}{q}-1} (1+\delta_b)(1+\varepsilon_A^b)^2 \\ & + 2(1-2^{\frac{2}{q}-2} \rho^{\frac{2}{q}-1})^2 (1+\delta_{k+a})(1+\varepsilon_A^{(k+a)})^2 \\ & < 4(1-2^{\frac{2}{q}-2} \rho^{\frac{2}{q}-1})^2. \end{aligned}$$

那么存在正常数 \tilde{C}_0 和 \tilde{C}_1 有

$$\|\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_2 \leq \tilde{C}_0 \varepsilon'_{A,k,y} + \tilde{C}_1 \frac{2^{\frac{1}{q}} \|\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f} - (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f})_k\|_q}{k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

其中 δ_{k+a}, δ_b 为 \mathbf{A} 的 \mathbf{D} -RIP 常数, u_1 为 $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ 的相干性.

注 1: 误差上界估计表明: 在矩阵全扰动以及测量带有噪音情形下, 信号 \mathbf{f} 可以通过非凸 l_q 极小化的压缩数据分离方法鲁棒重构式(6), 信号重构速度受全噪音和最佳 k 项逼近的控制; 当 \mathbf{f} 在 \mathbf{D} 上为 k -稀疏, $\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f} = (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f})_k$ 和无噪音情形下 ($\varepsilon'_{A,k,y} = 0$), 完美重构原始信号即 $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$; 上界关于 q 是递减的, 当 $q \rightarrow 0$ 时, 式(6)的解更加趋近原始解.

注 2: 矩阵不扰动, 加性噪音存在的情形: 当 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 时, 也就是 $\varepsilon_A = \varepsilon_A^{(k)} = 0, \hat{\delta}_k = \delta_k$, 获得

$$\|\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_2 \leq \tilde{C}_0 \varepsilon + \tilde{C}_1 \frac{2^{\frac{1}{q}} \|\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f} - (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f})_k\|_q}{k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}.$$

注 3: 凸优化 ($q=1$), 矩阵无扰动情形: 当 $q=1, \mathbf{E} = \mathbf{0}$ 时, $\varepsilon_A = \varepsilon_A^{(k)} = 0, \hat{\delta}_k = \delta_k$, 获得 $\|\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_2 \leq \tilde{C}_0 \varepsilon + \tilde{C}_1 \frac{\|\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f} - (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f})_k\|_q}{\sqrt{k}}$. 我们的结果囊括了文献[18]的结果.

定理 1 的证明: 设 $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}}$ 是式(6)的最优解, \mathbf{f} 是原始信号, $\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{h} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, 且设 $\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f}$ 中前 k 个是最大的值. 假设 $|x_{k+1}| \geq |x_{k+2}| \geq \dots \geq |x_d|$, 设 $J = J_0 = \{1, 2, \dots, k\}, J_* = \{k+1, k+2, \dots, k+a\}, J_i = \{k+a + (i-1)b + 1, \dots, k+a+ib\} (i=1, 2, \dots)$, 从而最后一个集合中的元素小于或者等于 b . 令 $J_{0*} = J_0 \cup J_*$, 设 J'

$= J \cap [d_1]$, $J^c = \{j - d_1 | j \in J \setminus J^c\}$. 由于 D_1, D_2 为紧框架, 则 $\varphi^T \varphi = I$, 从而 φ 也为紧框架. 那么, 我们有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|_2^2 &= \|\varphi^T \mathbf{h}\|_2^2 = \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_2^2 + \|\varphi_{J_0^c}^T \mathbf{h}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{D}_{1J_0}^T \varphi_{J_0}^T \mathbf{h}_1\|_2^2 + \|\mathbf{D}_{2J_0^c}^T \varphi_{J_0^c}^T \mathbf{h}_2\|_2^2 + \|\varphi_{J_0^c}^T \mathbf{h}\|_2^2 \\ &= \langle \mathbf{h}_1, \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_{1J_0}^T \mathbf{h}_1 \rangle + \langle \mathbf{h}_2, \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_{2J_0^c}^T \mathbf{h}_2 \rangle + \|\varphi_{J_0^c}^T \mathbf{h}\|_2^2 \\ &\leq \|\mathbf{h}_1\|_2 \|\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_{1J_0}^T \mathbf{h}_1\|_2 + \|\mathbf{h}_2\|_2 \|\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_{2J_0^c}^T \mathbf{h}_2\|_2 + \|\varphi_{J_0^c}^T \mathbf{h}\|_2^2 \\ &\leq \|\mathbf{h}_1\|_2 \|\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_{1J_0}^T \mathbf{h}_1\|_2 + \|\mathbf{h}_2\|_2 \|\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_{2J_0^c}^T \mathbf{h}_2\|_2 \\ &\quad + \left(\sum_{i \geq 1} \|\varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\| \right)^2, \end{aligned}$$

利用均值不等式及存在正常数 c_1 , 我们有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|_2^2 &\leq \frac{c_1 \|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + \frac{1}{2c_1} (\|\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_{1J_0}^T \mathbf{h}_1\|_2^2 + \|\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_{2J_0^c}^T \mathbf{h}_2\|_2^2) \\ &\quad + \left(\sum_{i \geq 1} \|\varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\| \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

由于 $\bar{\mathbf{f}}$ 是式 (6) 的最优解, 从而有: $\|\varphi^T \bar{\mathbf{f}}\|_q \geq \|\varphi^T \mathbf{f}\|_q$

$$\begin{aligned} \|\varphi_{J_0}^T \bar{\mathbf{f}}\|_q + \|\varphi_{J_0^c}^T \bar{\mathbf{f}}\|_q &\geq \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{f}\|_q + \|\varphi_{J_0^c}^T \mathbf{f}\|_q \\ &\geq \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{f}\|_q + \|\varphi_{J_0^c}^T \mathbf{f}\|_q \\ &\quad - \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q - \|\varphi_{J_0^c}^T \mathbf{h}\|_q \end{aligned}$$

对上式转化可得

$$\|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q \leq 2 \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{f}\|_q + \|\varphi_{J_0^c}^T \mathbf{h}\|_q \quad (13)$$

利用 $r_k + s_k < \frac{1}{K_A^{(k)}}$ 以及 $\bar{\mathbf{f}}$ 是最优解, 类似于文献 [19] 讨论可得

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi^T \mathbf{h}\|_2 &= \|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi^T (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}})\|_2 \\ &\leq \|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi^T \mathbf{f} - \mathbf{y}\|_2 + \|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi^T \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{y}\|_2 \\ &\leq 2\varepsilon'_{A,k,y} \end{aligned} \quad (14)$$

利用假设, 我们有 $\|\varphi_{J_0}^T \mathbf{f}\|_q = |x_{k+1}|^q + |x_{k+2}|^q + \dots + |x_{k+a}|^q \geq a |x_{k+a+1}|^q$,

对上式两边开 q 次方, 可得

$$|x_{k+a+1}| \leq \frac{\|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q}{a^{\frac{1}{q}}}$$

假设: $P_q b^{\frac{1}{q}} \leq a^{\frac{1}{q}}$, 利用引理 1 有

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \|\varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\|_2 &\leq \frac{1}{b^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}} \sum_{i \geq 1} \|\varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\|_q + P_q \sqrt{b} |x_{k+a+1}| \\ &\leq \frac{1}{b^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}} \left(\sum_{i \geq 1} \|\varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\|_q + \frac{P_q b^{\frac{1}{q}}}{a^{\frac{1}{q}}} \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q \right) \\ &\leq \frac{1}{b^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}} \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q \end{aligned}$$

设 $\rho = \frac{k}{b}$, $\eta = \frac{2^{\frac{1}{q}} \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{f}\|_q}{(k^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}})^{\frac{1}{q}}}$, 由式 (13) 可得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \geq 1} \|\varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\|_2 \right)^q &\leq \left(\frac{1}{b^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}} \right)^q (2 \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q^q + \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q^q) \\ &\leq b^{\frac{q}{2} - 1} (2 \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q^q + (k^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q^q)^q) \\ &= \frac{2}{b^{1 - \frac{q}{2}}} \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q^q + \left(\frac{k}{b} \right)^{1 - \frac{q}{2}} \|\varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_q^q \end{aligned}$$

$$\leq \rho^{1 - \frac{q}{2}} (\|\mathbf{h}\|_2^q + \eta^q),$$

对上式两边开 q 次方, 有

$$\sum_{i \geq 1} \|\varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\|_2 \leq 2^{\frac{1}{q} - 1} \rho^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} (\|\mathbf{h}\|_2 + \eta), \quad (15)$$

根据式 (14) 及定义 2 ($\hat{\mathbf{A}}\text{-D-RIP}$) 知:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_2^2 &= \|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi^T \mathbf{h} - \sum_{i \geq 1} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\|_2^2 \\ &\leq [2\varepsilon'_{A,k,y} + \sqrt{1 + \hat{\delta}_b} \left(\sum_{i \geq 1} \|\mathbf{D} \varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\|_2 \right)]^2, \end{aligned}$$

因为 $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)} = \sqrt{\lambda_{\max}(2\mathbf{I})} = \sqrt{2}$, 所以

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_2^2 &\leq [2\varepsilon'_{A,k,y} + \sqrt{2(1 + \hat{\delta}_b)} \left(\sum_{i \geq 1} \|\mathbf{D} \varphi_{J_i}^T \mathbf{h}\|_2 \right)]^2 \\ &\leq [2\varepsilon'_{A,k,y} + \sqrt{1 + \hat{\delta}_b} (2\rho)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} (\|\mathbf{h}\|_2 + \eta)]^2, \end{aligned}$$

又由于 $\|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{D} \varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_2 \geq (1 - \hat{\delta}_{k+a}) \|\mathbf{D} \varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_2$, 可得

$$\|\mathbf{D} \varphi_{J_0}^T \mathbf{h}\|_2 \leq \frac{1}{1 - \hat{\delta}_{k+a}} [2\varepsilon'_{A,k,y} + \sqrt{1 + \hat{\delta}_b} (2\rho)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} (\|\mathbf{h}\|_2 + \eta)]^2,$$

$$(\|\mathbf{h}\|_2 + \eta)^2,$$

类似于文献 [18] 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_{1J_0}^T \varphi_{J_0}^T \mathbf{h}_1\|_2^2 + \|\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_{2J_0^c}^T \varphi_{J_0^c}^T \mathbf{h}_2\|_2^2 &\leq \frac{u_1(k+a) \|\mathbf{h}\|_2^2}{2} \\ &\quad + \frac{1}{1 - \hat{\delta}_{k+a}} [2\varepsilon'_{A,k,y} + \sqrt{1 + \hat{\delta}_b} (2\rho)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} (\|\mathbf{h}\|_2 + \eta)]^2, \end{aligned} \quad (16)$$

联合式 (12), (15), (16) 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|_2^2 &\leq \frac{c_1 \|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + 2^{\frac{2}{q} - 2} \rho^{\frac{2}{q} - 1} (\|\mathbf{h}\|_2 + \eta)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2c_1} \left(\frac{u_1(k+a) \|\mathbf{h}\|_2^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - \hat{\delta}_{k+a}} [2\varepsilon'_{A,k,y} + \sqrt{1 + \hat{\delta}_b} (2\rho)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} (\|\mathbf{h}\|_2 + \eta)]^2 \right) \\ &= \left(\frac{c_1}{2} + \frac{u_1(k+a)}{4c_1} + 2^{\frac{2}{q} - 2} \rho^{\frac{2}{q} - 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 + \hat{\delta}_b) 2^{\frac{2}{q} - 2} \rho^{\frac{2}{q} - 1}}{c_1 (1 - \hat{\delta}_{k+a})} \right) \|\mathbf{h}\|_2^2 + \frac{2(\varepsilon'_{A,k,y})^2}{c_1 (1 - \hat{\delta}_{k+a})} \\ &\quad + \left(2^{\frac{2}{q} - 2} \rho^{\frac{2}{q} - 1} + \frac{(1 + \hat{\delta}_b) 2^{\frac{2}{q} - 2} \rho^{\frac{2}{q} - 1}}{c_1 (1 - \hat{\delta}_{k+a})} \right) \eta^2 \\ &\quad + \frac{\sqrt{1 + \hat{\delta}_b} (2\rho)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}}{c_1 (1 - \hat{\delta}_{k+a})} \cdot 2\varepsilon'_{A,k,y} \eta \\ &\quad + \frac{\sqrt{1 + \hat{\delta}_b} (2\rho)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}}{c_1 (1 - \hat{\delta}_{k+a})} \cdot 2\varepsilon'_{A,k,y} \|\mathbf{h}\|_2 + \left(2^{\frac{2}{q} - 2} \rho^{\frac{2}{q} - 1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1+\hat{\delta}_b)2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \cdot 2\eta\|\mathbf{h}\|_2 \\
\leq & \left(\frac{c_1}{2} + \frac{u_1(k+a)}{4c_1} + 2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1} \right. \\
& \left. + \frac{(1+\hat{\delta}_b)2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \right) \|\mathbf{h}\|_2^2 + \frac{2(\varepsilon'_{A,k,y})^2}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \\
& + \left(2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1} + \frac{(1+\hat{\delta}_b)2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \right) \eta^2 \\
& + \frac{\sqrt{1+\hat{\delta}_b}(2\rho)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} ((\varepsilon'_{A,k,y})^2 + \eta^2) \\
& + \frac{\sqrt{1+\hat{\delta}_b}(2\rho)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \left(\frac{(\varepsilon'_{A,k,y})^2}{c_2} + c_2\|\mathbf{h}\|_2^2 \right) \\
& + \left(2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1} + \frac{(1+\hat{\delta}_b)2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \right) \\
& \cdot \left(\frac{\eta^2}{c_3} + c_3\|\mathbf{h}\|_2^2 \right), \tag{17}
\end{aligned}$$

合并式(17)有 $K_1\|\mathbf{h}\|_2^2 \leq K_2(\varepsilon'_{A,k,y})^2 + K_3\eta^2$.
其中

$$\begin{aligned}
K_1 = & 1 - \frac{c_1}{2} - \frac{u_1(k+a)}{4c_1} - 2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1} \\
& - \frac{(1+\hat{\delta}_b)2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \\
& - c_2 \left(\frac{\sqrt{1+\hat{\delta}_b}(2\rho)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \right) - c_3 \left(2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1} \right. \\
& \left. + \frac{(1+\hat{\delta}_b)2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \right) \\
K_2 = & \frac{2}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} + \frac{\sqrt{1+\hat{\delta}_b}(2\rho)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \\
& + \frac{\sqrt{1+\hat{\delta}_b}(2\rho)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}{c_1c_2(1-\hat{\delta}_{k+a})} \\
K_3 = & 2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1} + \frac{(1+\hat{\delta}_b)2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{1+\hat{\delta}_b}(2\rho)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \\
& + \frac{1}{c_3} \left(2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1} + \frac{(1+\hat{\delta}_b)2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} \right) \\
\text{于是 } \|\mathbf{h}\|_2 \leq & \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \varepsilon'_{A,k,y} + \sqrt{\frac{K_3}{K_1}} \eta (K_1 > 0).
\end{aligned}$$

为使 $K_1 > 0$, 需使:

$$c_1 = \sqrt{\frac{u_1(k+a)}{2} + \frac{1+\hat{\delta}_b}{1-\hat{\delta}_{k+a}} 2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}}, c_2 \rightarrow 0_+, c_3 \rightarrow 0_+,$$

从而有

$$\begin{aligned}
& u_1(k+a)(1-\hat{\delta}_{k+a}) + 2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}\hat{\delta}_b + 2\hat{\delta}_{k+a}(1-2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1})^2 < 2(1-2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1})^2 - 2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}. \text{ 由于 } \hat{\delta}_{k+a} \leq (1+\delta_{k+a})(1+\varepsilon_A^{(k+a)})^2 - 1, \hat{\delta}_b \leq (1+\delta_b)(1+\varepsilon_A^{(b)})^2 - 1, \text{ 可得}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_1(k+a)(1-\hat{\delta}_{k+a}) + 2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1}(1+\delta_b)(1+\varepsilon_A^{(b)})^2 \\
& + 2(1-2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1})^2(1+\delta_{k+a})(1+\varepsilon_A^{(k+a)})^2 \\
& < 4(1-2^{\frac{2}{q}-2}\rho^{\frac{2}{q}-1})^2 \tag{18}
\end{aligned}$$

利用 $1-\hat{\delta}_{k+a} \leq (1-\delta_{k+a})(1-\varepsilon_A^{(k+a)})^2$, 以及式(18)可得定理结果.

综上,定理 1 证毕.

4 数值实验

为了说明结果的有效性,本文分别做了三组实验:定理 1 的理论验证、基于离散余弦变换(DCT)^[12]下的信号重构和基于小波变换(WT)^[22]下的信号重构.实验中,采用测量矩阵 \mathbf{A} ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{128 \times 256}$) 为随机高斯矩阵,设定采样次数 $m = 128$,信号维度 $n = 512$,扰动矩阵 \mathbf{E} 服从正态分布且满足 $\|\mathbf{E}\|_2 = \varepsilon_A \|\mathbf{A}\|_2$, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{e}$, 噪音 \mathbf{e} 中的元素服从正态分布且方差为 σ^2 , 其中相对噪音水平定义为 $\sqrt{m}\sigma/\|\mathbf{A}\mathbf{f}\|_2$, 相对误差定义为 $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}^*\|_2/\|\mathbf{f}\|_2$ (\mathbf{f}^* 表示重构信号, \mathbf{f} 表示原始信号). 考虑到 $\boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I}$, 对于任意信号 $\mathbf{f}, \mathbf{f} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{x}$, \mathbf{x} 是稀疏向量, 则问题(6)可以转化为下述问题

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_q^\gamma \quad \text{s. t. } \|\hat{\mathbf{A}}\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon'_{A,k,y} \tag{19}$$

为了求解问题(19),基于文献[23]的思想,我们提出了如下的迭代重赋权最小二乘(IRLS)方法

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_q^{\gamma\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \|\hat{\mathbf{A}}\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \tag{20}$$

其中 λ 是正则化参数, γ 为充分小的光滑参数, 并且有

$$\|\mathbf{x}\|_q^{\gamma\lambda} = \sum_{i=1}^m (\gamma^2 + (\mathbf{x}_i^{(k)}))^\lambda.$$

作为一种处理非凸问题的

有效方法,IRLS 方法得到了学者广泛研究^[23-25].具体地,我们给出如下的迭代过程

$$\left((\hat{A}\hat{D})^T \hat{A}\hat{D} + \text{Diag} \left[\frac{q\lambda}{(\gamma_k^2 + (x_i^k)^2)} \right]_{1 \leq i \leq n} \right) \mathbf{x}^{(k+1)} = (\hat{A}\hat{D})^T \mathbf{y} \quad (21)$$

其中 Diag 表示对角矩阵. 当迭代次数大于 100 时,IRLS 算法终止,并输出重构向量 \mathbf{x} .

利用上述 IRLS 算法,在 DCT 和 WT 两种字典下,我们分别考虑了正则化参数 λ 变化与重构相对误差变化趋势图(见图 2 和图 5). 从图 2 和图 5,我们发现,当参数 $\lambda = 1 \times 10^{-3}$ 时,相对误差最小,因此在我们的实验中统一选取正则化参数 $\lambda = 1 \times 10^{-3}$, $\gamma_k = 1$. 模拟实验在 CPU 为 Intel 奔腾 P6100(2.0GHz),内存为 2GB 的电脑上运行,运行软件为 MATLAB7.14(R2012a). 为了克服实验结果的偶然性,所有实验将独立重复地进行 500 次,并以相应的平均值作为最终统计结果.

4.1 理论验证

首先展开定理 1 的理论结果验证. 在这部分实验中,选取字典为 DCT, $\varepsilon = 0, 0.05, 0.1$, 并设定稀疏度 $k = 30, b = 8k, a = 2k, u_1 = 0.0026, \rho = \frac{k}{b}, \delta_{k+a} = \delta_b = 0.1$.

针对不同的 ε ,图 1(a)研究了在非凸 l_q 极小化方法下,信号 f 重构的有效性,即图 1(a)表示了 $\|f - f^*\|_2$ 关于 q 的增减性以及取值范围. 图 1(b)展示了在不同扰动情形下,重构误差上界关于 q 的变化趋势以及取值范围. 由图 1(a)和图 1(b)比较可得, $\|f - f^*\|_2$ 明显低于重构误差上界.

4.2 基于 DCT 字典下的信号

为了验证非凸 l_q 极小化方法重构的有效性,我们采用 DCT 作为字典(见图 3(a)), $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1 | \mathbf{D}_2]$, ($\mathbf{D}_1,$

\mathbf{D}_2 为不同的 DCT 字典), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1024}$ 是稀疏度为 64 的稀疏向量. 在扰动水平 ($\varepsilon = 0.01$) 下,图 3 刻画了当参数 $q = 0.5$ 时,信号 f 的重构效果,从图中我们可以看出,通过非凸 l_q 极小化方法的重构信号 f^* 和原始信号 f 基本吻合,效果理想. 图 4 显示了参数 q , 扰动水平,噪声水平与信号重构的相对误差之间的关系. 在图 4(a)中我们研究了 q 和相对误差之间的关系,从图中可以看出:当 q 从 0.1 到 0.8 变化时,由于字典的介入,曲线变化趋势不明显,显然 $q = 1$ 时,重构效果最差. 而 ε 和相对误差之间的关系见图 4(b),当 $q = 0.3$ 时,效果最佳. 另外,我们对矩阵的部分元素进行了随机扰动(分别随机选取矩阵 \mathbf{A} 的 10%, 20%, ..., 100% 的元素进行扰动),图 4(c)反映了部分扰动和相对误差之间的关系(P 表示对矩阵 \mathbf{A} 中元素扰动的比例),从图可以看出当 $\varepsilon = 0.01$ 时,重构误差与无扰动情形基本一致. 图 4(d)表明了相对噪声水平与相对误差的关系,即加性噪声 \mathbf{e} 对重构效果的影响. 显然,扰动水平越低、部分扰动越少或相对噪声水平越低时,相对误差就越小,重构效果越好.

4.3 基于 WT 字典下的信号

为了进一步证实非凸 l_q 极小化方法重构的有效性,我们采用 WT 作为字典(见图 6(a)), $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1 | \mathbf{D}_2]$, ($\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ 为不同的 WT 字典), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{512}$ 是稀疏度为 30 的稀疏向量. 针对稀疏信号,在矩阵受扰动和加性噪声情形下,我们做了与 4.2 节相似的实验,结果见图 5 ~ 图 7. 结果表明:在 WT 字典下,非凸 l_q 极小化方法的重构效果较为理想,重构误差受参数 q , 扰动水平,部分扰动,相对噪声水平的影响. 在 WT 字典情形下,我们的方法执行效果非常好.

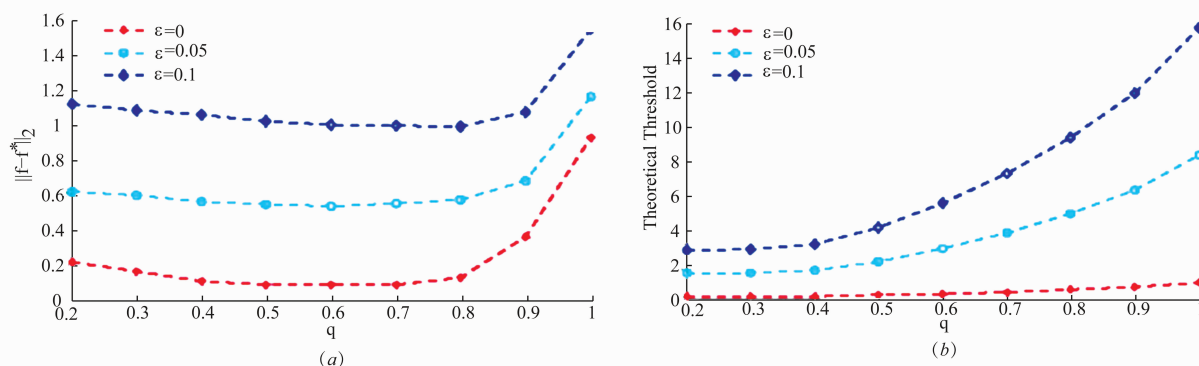


图1 仿真结果与重构误差上界

5 总结

本文研究了完全扰动的非凸 l_q ($0 < q \leq 1$) 极小化的压缩数据分离方法,获得了该方法的误差上限估计,

结果表明误差上限估计受扰动矩阵 \mathbf{E} 、 q ($0 < q \leq 1$) 值和最佳 k 项逼近影响. 此外,本文进行了一系列实验来测试非凸 l_q ($0 < q \leq 1$) 极小化方法. 仿真实验表明:在不同扰动和不同字典下,非凸 l_q ($0 < q \leq 1$) 极小化方法

具有理想的重构效果. 该结果为压缩数据分离的进一步发展提供了一定的理论价值和借鉴作用.

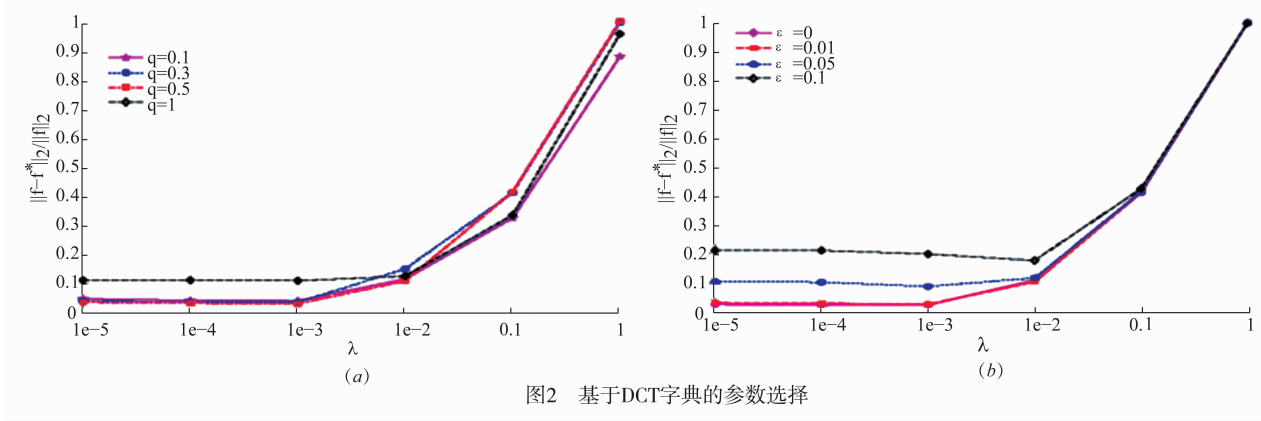


图2 基于DCT字典的参数选择

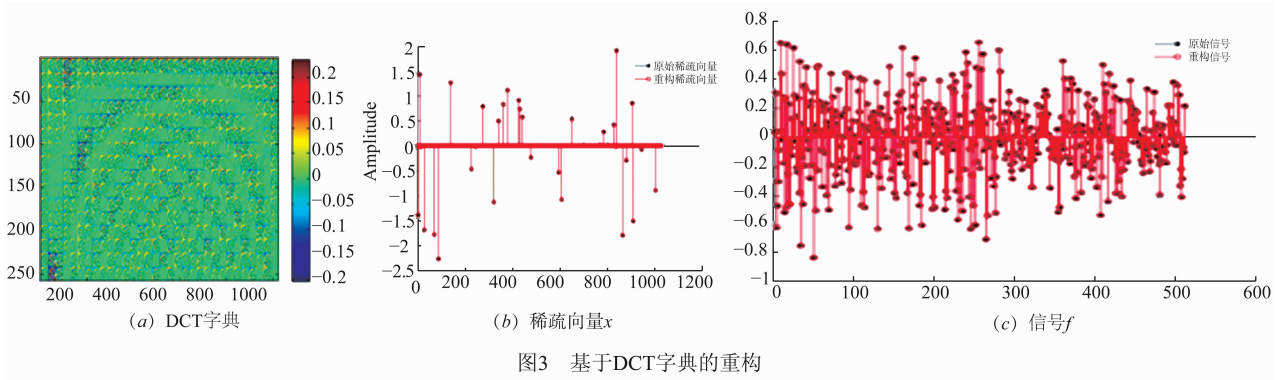


图3 基于DCT字典的重构

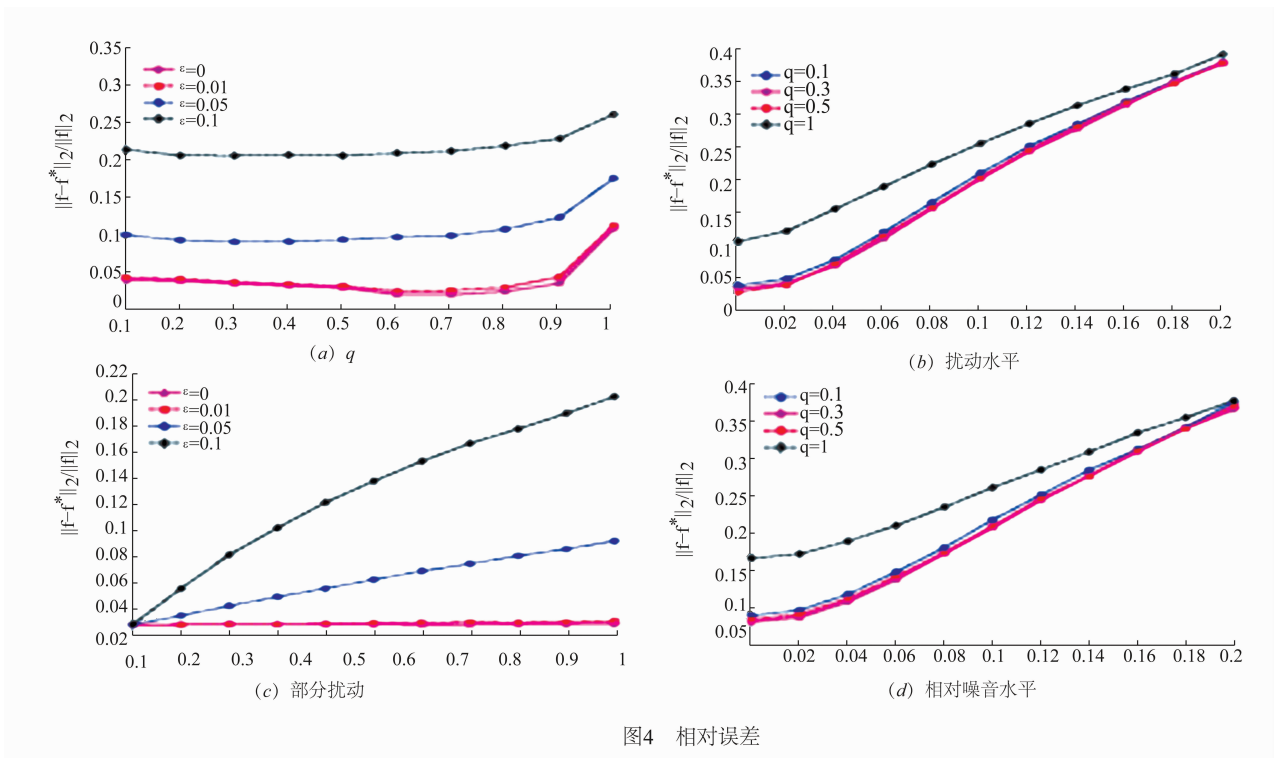


图4 相对误差

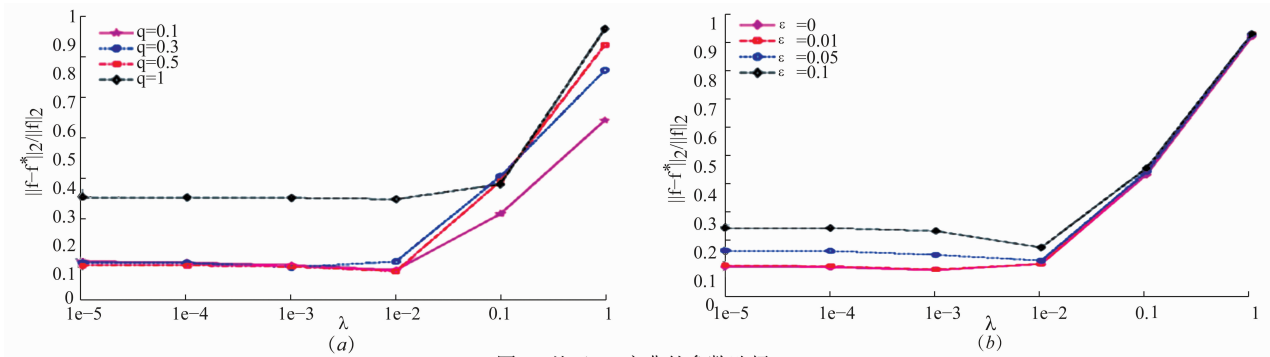


图5 基于WT字典的参数选择

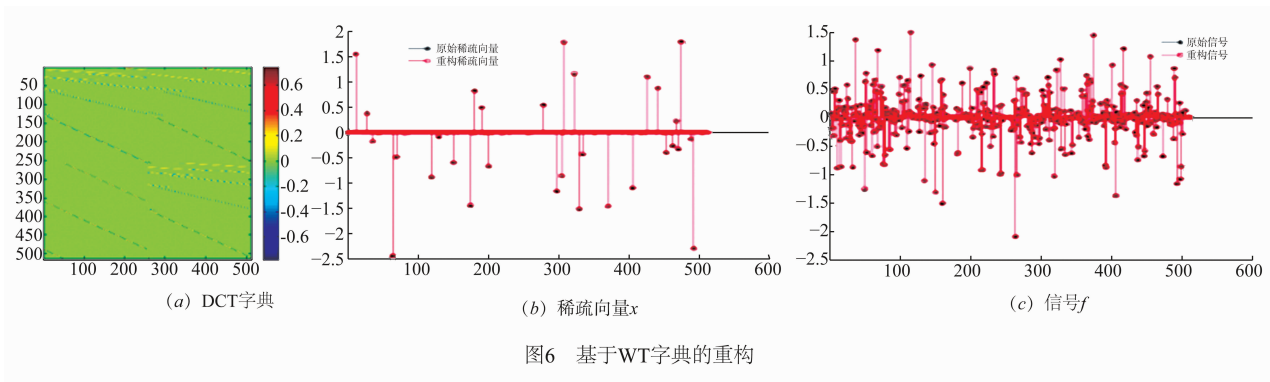


图6 基于WT字典的重构

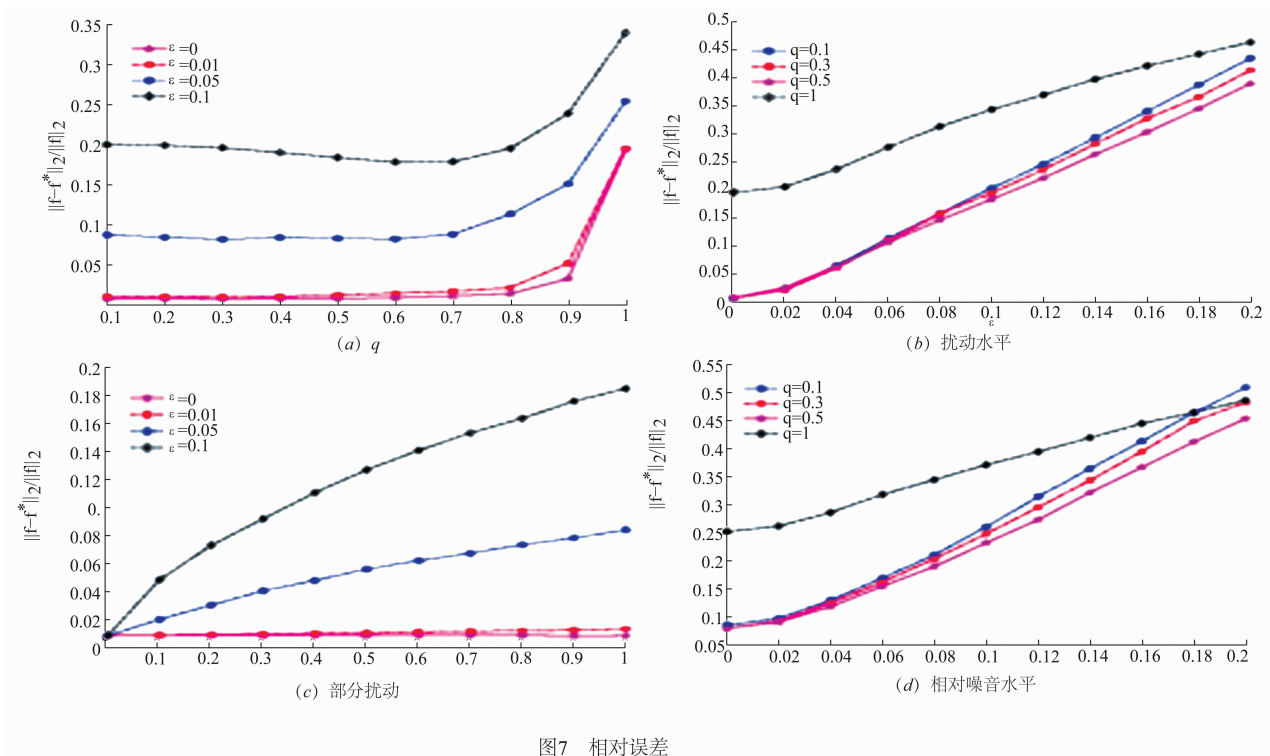


图7 相对误差

参考文献

[1] Candès E J, Romberg J, Terence Tao. Robust uncertainty principles; exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on In-

formation Theory, 2006, 52(2): 489 - 509.

[2] Candès E J. Compressive sampling[J]. Marta Sanz Solé, 2006, 17(2): 1433 - 1452.

[3] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 侯彪. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 20(7): 1651 - 1662.

- Jiao L C, Yang S Y, Liu F, Hou B. Development and prospect of compressive sensing [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 20(7): 1651 - 1662. (in Chinese)
- [4] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *Siam Review*, 2001, 43(1): 33 - 61.
- [5] Cotter S F, Rao B D. Sparse channel estimation via matching pursuit with application to equalization [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2002, 50(3): 374 - 377.
- [6] 常象宇, 徐宗本, 张海, 等. 稳健 L_q ($0 < q < 1$) 正则化理论: 解的渐近分布与变量选择一致性 [J]. *中国科学: 数学*, 2010, 40(10): 985 - 998.
- Chang X Y, Xu Z B, Zhang H, et al. Robust regularization theory based on L_q ($0 < q < 1$) regularization; the asymptotic distribution and variable selection consistence of solutions [J]. *China Science: Mathematics*, 2010, 40(10): 985 - 998. (in Chinese)
- [7] 张海, 王尧, 常象宇, 徐宗本. $L_{1/2}$ 正则化 [J]. *中国科学: 信息科学*, 2010, 40(3): 412 - 422.
- Zhang H, Wang Y, Chang X Y, Xu Z B. $L_{1/2}$ regularization [J]. *China Science: Information Science*, 2010, 40(3): 412 - 422. (in Chinese)
- [8] Xu Z B, Guo H L, Wang Y, et al. Representative of $L_{1/2}$ regularization among l_q ($0 < q \leq 1$) regularizations; an experimental study based on phase diagram [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(7): 1225 - 1228.
- [9] Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via non-convex minimization [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(10): 707 - 710.
- [10] Chartrand R, Staneva V. Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing [J]. *Inverse Problems*, 2008, 24(3): 20 - 35.
- [11] Bruckstein A M, Donoho D, Elad M. From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images [J]. *Siam Review*, 2009, 51(1): 34 - 81.
- [12] Candès E J, Eldar Y C, Needell D, et al. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries [J]. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2011, 31(1): 59 - 73.
- [13] Elad M, Milanfar P, Rubinstein R. Analysis versus synthesis in signal priors [J]. *Inverse Problems*, 2006, 23(3): 1 - 5.
- [14] Rauhut B H, Schass K, Vandergheynst P. Compressed sensing and redundant dictionaries [J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 2008, 54(5): 2210 - 2219.
- [15] Cai J F, Osher S, Shen Z. Split Bregman methods and frame based image restoration [J]. *Siam Journal on Multi-scale Modeling & Simulation*, 2009, 8(2): 337 - 369.
- [16] Elad M, Starck J L, Querre P, et al. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA) [J]. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2005, 19(3): 340 - 358.
- [17] Göbel W, Helmchen F. In vivo calcium imaging of neural network function [J]. *Physiology*, 2007, 22: 358 - 365.
- [18] Lin J, Li S, Shen Y. Compressed data separation with redundant dictionaries [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(59): 4309 - 4315.
- [19] Herman M A, Strohmer T. General deviants; an analysis of perturbations in compressed sensing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2009, 4(2): 342 - 349.
- [20] Ince T, Nacaroglu A. On the perturbation of measurement matrix in non-convex compressed sensing [J]. *Signal Processing*, 2014, 98(5): 143 - 149.
- [21] Hsia Y, Sheu R L. On RIC bounds of compressed sensing matrices for approximating sparse solutions using l_q quasi norms. arXiv:1312.3379 (2014), <http://arxiv.org/abs/1312.3379>.
- [22] Elad M, Matalon B, Zibulevsky M. Coordinate and subspace optimization methods for linear least squares with non-quadratic regularization [J]. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2007, 23(3): 346 - 367.
- [23] Lai M J, Xu Y, Yin W. Improved iteratively reweighted least squares for unconstrained smoothed l_q minimization [J]. *Siam Journal on Numerical Analysis*, 2013, 51(2): 927 - 957.
- [24] 王文东, 王尧, 王建军. 基于迭代重赋权最小二乘算法的块稀疏压缩感知 [J]. *电子学报*, 2015, 43(5): 922 - 928.
- Wang W D, Wang Y, Wang J J. Iterative reweighted least squares algorithm for block-sparse compressed sensing [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(5): 922 - 928. (in Chinese)
- [25] Wang Y, Wang J, Xu Z. On recovery of block-sparse signals via mixed l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) norm minimization [J]. *Eurasip Journal on Advances in Signal Processing*, 2013, 2013(1): 1 - 17.

作者简介



刘春燕 女, 1989年9月出生, 四川资阳人, 硕士, 主要从事海量数据分析, 压缩感知方向的研究。

E-mail: liucy1989@foxmail.com



王建军 (通讯作者) 男, 1976年12月出生, 宁夏惠农人, 博士, 教授. 主要从事海量数据分析、智能信息处理、逼近论等方向的研究。

E-mail: wjj@swu.edu.cn