

# 一种利用结构特点实现复数域联合对角化解盲源分离新算法研究及应用

徐先峰<sup>1</sup>, 段晨东<sup>1</sup>, 刘来君<sup>2</sup>, 杨小军<sup>3</sup>

(1. 长安大学电子与控制工程学院, 陕西西安 710064; 2. 长安大学公路学院, 陕西西安 710064;  
3. 长安大学信息工程学院, 陕西西安 710064)

**摘 要:** 联合对角化方法是求解盲源分离问题的有力工具. 但是现存的联合对角化算法大都只能求解实数域盲源分离问题, 且对目标矩阵有诸多限制. 为了求解更具一般性的复数域盲源分离问题, 提出了一种基于结构特点的联合对角化 (Structural Traits Based Joint Diagonalization, STBJD) 算法, 既取消了预白化操作解除了对目标矩阵的正定性限制, 又允许目标矩阵组为复值, 具有极广的适用性. 首先, 引入矩阵变换, 将待联合对角化的复数域目标矩阵组转化为新的具有鲜明结构特点的实对称目标矩阵组. 随后, 构建联合对角化最小二乘代价函数, 引入交替最小二乘迭代算法求解代价函数, 并在优化过程中充分挖掘所涉参量的结构特点加以利用. 最终, 求得混迭矩阵的估计并据此恢复源信号. 仿真实验证明与现存的有代表性的对目标矩阵无特殊限制的复数域联合对角化算法 FAJD 算法及 CVFFDIAG 算法相比, STBJD 算法具有更高的收敛精度, 能有效地解决盲源分离问题.

**关键词:** 盲源分离; 联合对角化; STBJD 算法; 交替最小二乘迭代算法

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2017)01-0029-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.01.005

## Research on a New Structural Traits Based Complex-Valued Space Joint Diagonalization Algorithm for Blind Source Separation and Its Applications

XU Xian-feng<sup>1</sup>, DUAN Chen-dong<sup>1</sup>, LIU Lai-jun<sup>2</sup>, YANG Xiao-jun<sup>3</sup>

(1. School of Electronic & Control Engineering, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China;

2. School of Highway, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China;

3. School of Information Engineering, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China)

**Abstract:** Joint diagonalization (JD) is an efficient tool for blind source separation (BSS) problems. However, most existing JD algorithms could only be used for real-valued space BSS problems and set many constraints on target matrices. In order to solve the general complex-valued space BSS problems, a structural traits based joint diagonalization (STBJD) algorithm is proposed. The algorithm discards pre-whitening procedure, relaxes the positive-definiteness assumption on target matrices and can be used in complex-valued space, thus has more general utilizations. Matrix transformation was adapted to transform the complex-valued space target matrices being jointly diagonalized to real-valued space ones with distinct structural traits. Furthermore, the Least Square cost function for JD was established and solved by alternate least squares (ALS) iterative algorithm. The structural traits of concerned variables were fully exploited and technical utilized in the optimizing process. Finally, the mixing matrix could be estimated and the sources could be retrieved. Numerical simulations illustrated the better convergence performance of STBJD than that of the state-of-the-art algorithms such as FAJD and CVFFDIAG. Thus it could be applied to solve the BSS problems efficiently.

**Key words:** blind source separation (BSS); joint diagonalization (JD); STBJD algorithm; alternate least squares iterative algorithm

收稿日期: 2015-06-11; 修回日期: 2015-12-13; 责任编辑: 孙瑶

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 61201407, No. 61473047); 中国博士后科学基金面上资助 (No. 2013M542309); 陕西省自然科学基金基础研究计划 (No. 2016JQ5103); 长安大学中央高校基本科研业务费 (No. 0009-2014G1321038)

## 1 引言

盲源分离(Blind Source Separation, BSS)又称盲信号分离(Blind Signal Separation, BSS),在无线通信、雷达、图像、语音、生物医学、地震波检测等领域得到了广泛应用,是信号处理领域的热点研究课题<sup>[1-10]</sup>.

为了求解盲源分离问题,在源信号及其混迭参数等先验知识均未知的情况下,在排列模糊和尺度模糊<sup>[1]</sup>可接受的前提下,往往利用接收到的混迭信号并基于源信号的统计特性,构造一组具有可对角化结构的目标矩阵,通过对目标矩阵组进行联合对角化操作,得到被称为“联合对角化器”的混迭矩阵(或其逆矩阵)的估计,并进而据此恢复源信号,实现盲源分离<sup>[1-13]</sup>. 显然,联合对角化方法是求解盲源分离问题的有力工具之一. 但是,纵观现存的联合对角化算法,许多算法往往对目标矩阵有诸多限制. 例如,文献[2]要求目标矩阵均为正定矩阵. 文献[3,4]要求至少有一个目标矩阵为正定矩阵,以便据此构造白化矩阵,将待求的“联合对角化器”预白化为酉矩阵后再求解. 但是,由于目标矩阵组通常都是通过统计方法得到,受限于样本数及噪声的影响,各目标矩阵的可对角化结构本身存在一定的误差,而预白化操作相当于以牺牲其余目标矩阵的联合对角化精度为代价,换取了正定目标矩阵的严格对角化,引入了误差. 更严重的是,这种在预白化阶段引入的误差,无法在随后的正交联合对角化算法中得以校正,因而影响了算法的整体性能<sup>[5,6]</sup>. 鉴于此,许多学者陆续提出了若干不需要白化预处理的非正交联合对角化算法. 其中比较有代表性的算法是:J-Di 算法<sup>[6]</sup>, QDIAG 算法<sup>[7]</sup>, WEDGE 算法<sup>[8]</sup>, ACDC 算法<sup>[9]</sup>, SVDJD 算法<sup>[10]</sup>, SeDJoCo 算法<sup>[11]</sup>, FAJD 算法<sup>[12]</sup>, CVFFDIAG 算法<sup>[13]</sup>, 等.

然而,在这些性能优异的算法中,很多算法都假设目标矩阵组必须为实值<sup>[6-8]</sup>,这意味着这些实数域联合对角化算法只能求解混迭矩阵和源信号均为实数值的盲源分离问题. 需要指出的是,复值源信号的盲分离是盲源分离领域的常见问题. 例如,当盲源分离应用于通信等某些重要领域时,许多源信号如 Quadrature-Amplitude Modulation (QAM), Minimum-Shift Keying (MSK) 等通信信号,均为复值信号<sup>[14]</sup>. 另外,求解卷积混合盲源分离问题时,常常运用比较简便的频率域方法,而在各频率点上的待分离对象,往往是复值<sup>[15]</sup>. 实数域联合对角化算法无法求解此类复数域问题. 对于可以实现复数域联合对角化的算法<sup>[9-11]</sup>来说, ACDC 算法<sup>[9]</sup>和 SeDJoCo 算法<sup>[11]</sup>要求目标矩阵为厄米特对称阵或实对称阵, SVDJD 算法<sup>[10]</sup>则要求目标矩阵为正定厄米特阵. 显然,对目标矩阵的限制,极大制约了上述算法<sup>[6-11]</sup>的

应用范围.

为了求解复数域盲源分离问题,本文提出了一种基于结构特点的联合对角化(Structural Traits Based Joint Diagonalization, STBJD)算法,既取消了预白化操作解除了对目标矩阵(组)的正定性限制,又允许目标矩阵组为复值,极大地提高了算法的适用范围. 所提方法首先通过矩阵变换,将待联合对角化的复数域目标矩阵组转化为新的具有鲜明结构特点的实对称目标矩阵组,从而将复数域联合对角化问题转化为实数域联合对角化问题. 进一步地,为了求解代价函数,引入了基于梯度下降法的交替最小二乘迭代算法,并在求解过程中充分挖掘所涉及各参量的结构特点加以利用,最终求得混迭矩阵的估计,并进一步据此恢复源信号. 与现存的有代表性的对目标矩阵无特殊限制的复数域联合对角化算法<sup>[12,13]</sup>一样,所提 STBJD 算法可用于解决复数域盲源分离问题,具有适用性广的优点. 仿真实验证明,与具有广泛代表性的对目标矩阵无特殊限制的复数域联合对角化算法:FAJD 算法<sup>[12]</sup>及 CVFFDIAG 算法<sup>[13]</sup>相比,STBJD 算法具有更高的收敛精度,能有效地解决盲源分离问题.

## 2 信号模型

考虑有  $M$  个阵元组成的线阵,  $N$  个窄带源从不同方向入射到阵列上,阵列接收到的  $M$  维数据矢量为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

这里  $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{M \times N}$  ( $M \geq N$ ) 称为混迭矩阵,  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T$  为源信号矢量,  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_M(t)]^T$  为观测信号,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_M(t)]^T$  代表噪声矢量. 盲源分离问题所要解决的问题便是,根据所得到的观测信号的  $T$  个样本  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^T$ , 在一定假设条件下<sup>[16]</sup>, 估计混迭矩阵  $\mathbf{A}$ , 并进一步估计源信号的样本  $\{\mathbf{s}(t)\}_{t=1}^T$ . 基于假设条件,由观测信号的  $T$  个样本  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^T$ , 可以构造一组总个数为  $K$  的目标矩阵组  $\{\mathbf{C}^k, k=1, \dots, K\}$ , 其中每个目标矩阵均具有如下可对角化结构:

$$\mathbf{C}^k = \mathbf{A}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^H, (k=1, \dots, K) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{D}^k$  ( $k=1, \dots, K$ ) 为对角矩阵. 通过对目标矩阵组的联合对角化操作,即可以得到混迭矩阵  $\mathbf{A}$  的估计,进而据此恢复源信号,此即为联合对角化方法解盲源分离问题的主要思路. 考虑到样本数的限制及噪声的存在,式(2)所述对角化结构仅是近似存在的. 现存的构造目标矩阵组的主要方法有:不同时间窗下的协方差矩阵<sup>[2]</sup>, 不同时移下的互相关矩阵<sup>[3]</sup>, 三阶或更高阶累积量下的切片矩阵<sup>[17]</sup>, 空间时频矩阵<sup>[18]</sup>, 或者是第二特征函数<sup>[19]</sup>等.

需要明确指出的是,本文所提算法旨在解决最普遍的复数域联合对角化问题以实现复数域盲源分离,对目标矩阵没有特殊要求,即允许混迭矩阵  $\mathbf{A}$  及对角矩阵  $\mathbf{D}^k (k=1, \dots, K)$  均为复值矩阵,因此构造方法可选择上述的一种或任意几种方法的组合. 比较而言,前述属于复数域联合对角化范畴的 ACDC 算法<sup>[9]</sup> 和 SeDJo-Co 算法<sup>[11]</sup> 或者要求  $\{\mathbf{C}^k, k=1, \dots, K\}$  为厄米特对称阵,即  $\mathbf{D}^k (k=1, \dots, K)$  为实数阵;或者要求  $\{\mathbf{C}^k, k=1, \dots, K\}$  为实对称阵,即此时式(2)所示对角化结构改变为  $\mathbf{C}^k = \mathbf{A}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^T (k=1, \dots, K)$ . SVDJD 算法<sup>[10]</sup> 要求  $\{\mathbf{C}^k, k=1, \dots, K\}$  为正定厄米特阵. 对于更为普遍的  $\mathbf{A}$  及  $\mathbf{D}^k (k=1, \dots, K)$  均为复值矩阵的情况,上述三个算法<sup>[9-11]</sup> 均无能为力. 因此,本文算法具有更广的适用性. 另外,根据已有的科学降维方法<sup>[20]</sup>,不失一般性,假设混迭矩阵为方阵,即阵元数  $M$  等于信源数  $N$ .

需要补充说明的是,联合对角化方法的应用绝不仅仅局限于求解盲源分离问题. 在很多情况下,一旦得到形如式(1)所示的可联合对角化数据结构,即可引入联合对角化这一工具,求解相应问题<sup>[21]</sup>. 因此可以说,本文所提新算法的价值亦不仅仅局限于解决盲源分离问题.

### 3 基于结构特点的联合对角化

#### 3.1 目标矩阵组的实对称化

考虑通过一系列变换,将复数域联合对角化问题转化为实数域联合对角化问题. 首先通过如下两式,得到  $2K$  个矩阵组:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{2k} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^k + \mathbf{C}^{kH}) = \mathbf{A}\text{Re}(\mathbf{D}^k)\mathbf{A}^H, \quad (k=1, \dots, K) \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^{2k-1} = \frac{1}{2j}(\mathbf{C}^k - \mathbf{C}^{kH}) = \mathbf{A}\text{Im}(\mathbf{D}^k)\mathbf{A}^H, \quad (k=1, \dots, K) \quad (4)$$

随后,定义如下的矩阵变换函数:

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{X}) & \text{Im}(\mathbf{X}) \\ -\text{Im}(\mathbf{X}) & \text{Re}(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

基于式(3)和式(5),可表示  $\tilde{\mathbf{C}}^{2k}$  为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}^{2k} &= f(\tilde{\mathbf{C}}^{2k}) \\ &= f(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{D}^k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Re}(\mathbf{D}^k) \end{bmatrix} f^T(\mathbf{A}) \\ &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{D}}^{2k}\bar{\mathbf{A}}^T, \end{aligned} \quad (k=1, \dots, K) \quad (6)$$

基于式(4)和式(5),可表示  $\tilde{\mathbf{C}}^{2k-1}$  为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}^{2k-1} &= f(\tilde{\mathbf{C}}^{2k-1}) \\ &= f(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \text{Im}(\mathbf{D}^k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Im}(\mathbf{D}^k) \end{bmatrix} f^T(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{D}}^{2k-1}\bar{\mathbf{A}}^T, \\ &\quad (k=1, \dots, K) \end{aligned} \quad (7)$$

表达式(6)和式(7)可以统一表示为

$$\bar{\mathbf{C}}^k = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{D}}^k\bar{\mathbf{A}}^T, (k=1, \dots, 2K) \quad (8)$$

可见,通过上述一系列变换将  $K$  个维数为  $M \times M$  的复值目标矩阵构成的矩阵组  $\{\mathbf{C}^k, k=1, \dots, K\}$  转化为  $2K$  个维数为  $2M \times 2M$  新的实值目标矩阵构成的目标矩阵组  $\{\bar{\mathbf{C}}^k, k=1, \dots, 2K\}$ . 通过分析不难发现,新的目标矩阵组具有如下结构特点:

(T1) 目标矩阵组具有可联合对角化结构,即式(8)中的  $\bar{\mathbf{D}}^k (k=1, \dots, 2K)$  为对角阵. 且对于行向量  $\bar{\mathbf{d}}^k = [\lambda_1^k, \dots, \lambda_M^k] \in \mathbf{R}^{1 \times M}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}^k = \text{diag}[\bar{\mathbf{d}}^k, \bar{\mathbf{d}}^k] \in \mathbf{R}^{2M \times 2M}$ , 其中  $\text{diag}[\cdot]$  表示构造以向量  $\cdot$  为对角线元素的对角矩阵.

(T2) 新的目标矩阵均为实对称阵,即  $\bar{\mathbf{C}}^{kT} = \bar{\mathbf{C}}^k (k=1, \dots, 2K)$ .

(T3) 表达式(8)中,矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  具有形式:

$$\bar{\mathbf{A}} = f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{A}) & \text{Im}(\mathbf{A}) \\ -\text{Im}(\mathbf{A}) & \text{Re}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2M \times 2M} \quad (9)$$

观察其结构特点不难发现,如果得到  $\bar{\mathbf{A}}$  的前  $M$  列元素,利用其结构特点,可以很容易得到  $\bar{\mathbf{A}}$  后面的  $M$  列元素.

显然地,上述矩阵变换将复数域普通目标矩阵组转化为实数域对称目标矩阵组,既然得到了实数域目标矩阵组,接下来就可以考虑由式(8)入手,利用现存的性能优异的实数域联合对角化算法<sup>[6-9,11]</sup>,恢复矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$ ,实现盲源分离. 然而,由于现存的实数域联合对角化算法并没有专门针对式(8)所示问题,因而在算法的优化过程中无法充分考虑(T1)~(T3)所述的参量结构特点并加以利用. 为了在优化过程中充分利用这些结构特点作为先验知识以提高算法的性能,提出了基于联合对角化最小二乘代价函数的交替最小二乘迭代算法,以实现新目标矩阵组的联合对角化. 构造并充分利用(T1)~(T3)所述的参量结构特点实现联合对角化,是本算法的主要特征,因而本文算法命名为:基于结构特点的联合对角化算法(Structural Traits Based Joint Diagonalization, STBJD).

#### 3.2 代价函数

常用的表征联合对角化程度的代价函数形式主要有:信息论准则代价函数<sup>[22]</sup>, F 范数最小化准则代价函数<sup>[13]</sup> 和最小二乘代价函数<sup>[9]</sup>. 参照式(8)所示,STBJD 算法采用如下联合对角化最小二乘代价函数:

$$\bar{J}(\mathbf{H}, \mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^{2K}) = \sum_{k=1}^{2K} \|\bar{\mathbf{C}}^k - \mathbf{H}\mathbf{A}^k\mathbf{H}^T\|_F^2 \quad (10)$$

在上述代价函数中,目标矩阵组  $\{\bar{\mathbf{C}}^k, k=1, \dots, 2K\}$  已知,寻找矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  的估计  $\mathbf{H}$  和对角阵组  $\bar{\mathbf{D}}^k (k=1, \dots, 2K)$  的估计  $\mathbf{A}^k (k=1, \dots, 2K)$ ,使得  $\mathbf{H}\mathbf{A}^k\mathbf{H}^T (k=1, \dots, 2K)$  尽可能地逼近  $\bar{\mathbf{C}}^k (k=1, \dots, 2K)$ ,即,使得代价函数  $\bar{J}$  尽可

能的小,其中,  $\mathbf{A}^k = \text{diag}[\tilde{\mathbf{d}}^k, \tilde{\mathbf{d}}^k]$ ,  $\tilde{\mathbf{d}}^k = [\tilde{\lambda}_1^k, \dots, \tilde{\lambda}_M^k]$ ,  $\tilde{\lambda}_i^k$  ( $i = 1, \dots, M$ ) 为 (T1) 中所述  $\lambda_i^k$  ( $i = 1, \dots, M$ ) 的估计.  $\|\cdot\|_F$  表示 Frobenius 范数. 观察代价函数  $\bar{J}$  可知, 其对于未知矩阵  $\mathbf{H}$  是四次函数, 因而, 计算复杂度高, 不易求取函数最小点. 为了便于计算, 将代价函数改进如下:

$$J(\mathbf{H}, \mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^{2K}, \mathbf{F}) = \sum_{k=1}^{2K} \|\bar{\mathbf{C}}^k - \mathbf{H}\mathbf{A}^k\mathbf{F}^T\|_F^2 \quad (11)$$

此处, 引入矩阵  $\mathbf{F}^T$  作为  $\bar{\mathbf{A}}^T$  的估计. 这样代价函数由关于未知矩阵  $\mathbf{H}$  的四次函数退化为分别关于  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{F}^T$  的二次函数, 降低了求解难度. 而且, 利用矩阵分解的性质不难证明  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{F}$  是本质相等的, 即  $\mathbf{H} = \mathbf{E}\mathbf{F}$ , 其中  $\mathbf{E}$  为广义置换矩阵<sup>[23]</sup>, 即  $\mathbf{E}$  中的每一行每一列有且只有一个非零元素. 而且,  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{F}^T$  显然均应该具有 (T3) 所述矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  的结构特点, 这一结构特点将在后续的优化过程中加以利用.

### 3.3 交替迭代算法

显然, 式 (11) 所示代价函数  $J$  有下界且大于等于 0, 这表明该代价函数至少有一个全局最小点. 本节给出一种基于梯度下降法的交替最小二乘迭代算法, 该交替迭代算法每一轮迭代可分为三步, 在各步中, 交替估计  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{F}$ , 以及对角阵  $\mathbf{A}^k$  ( $k = 1, \dots, 2K$ ), 搜索代价函数  $J$  的最小点, 并在此过程中充分利用所涉及各参量的结构特点. 根据 (T3) 所述矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  的结构特点, 选取

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{F}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M \times M} & \mathbf{I}_{M \times M} \\ -\mathbf{I}_{M \times M} & \mathbf{I}_{M \times M} \end{bmatrix} \text{ 作为迭代初值, 以第 } m$$

轮迭代为例, 交替迭代算法可描述为:

第一步, 固定  $\mathbf{H}(m-1)$  和  $\mathbf{F}(m-1)$ , 第  $k$  ( $k = 1, \dots, 2K$ ) 个子函数

$$J_k(\mathbf{H}(m-1), \mathbf{A}^k(m), \mathbf{F}(m-1)) = \|\bar{\mathbf{C}}^k - \mathbf{H}(m-1)\mathbf{A}^k(m)\mathbf{F}^T(m-1)\|_F^2$$

关于  $\mathbf{A}^k(m)$  求最小点. 通过代价函数分别关于  $\mathbf{A}^k(m)$  的  $M$  个相异的对角线元素  $\tilde{\lambda}_i^k$  ( $i = 1, \dots, M$ ) (而不是  $2M$  个对角线元素) 求导, 并令导数为零, 可得 (T1) 中所述行向量  $\tilde{\mathbf{d}}^k$  的估计  $\tilde{\mathbf{d}}^k$ :

$$\tilde{\mathbf{d}}^k = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{q}^k)^T \quad (12)$$

其中, 矩阵  $\mathbf{P}$  的第  $(i, j)$  个元素  $p_{ij}$  具有如下形式:

$$p_{ij} = \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i + \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i + \mathbf{h}_{i+M}^T \mathbf{h}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i + \mathbf{h}_{i+M}^T \mathbf{h}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i + \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_{i+M} + \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_{i+M} + \mathbf{h}_{i+M}^T \mathbf{h}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_{i+M} + \mathbf{h}_{i+M}^T \mathbf{h}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_{i+M} \quad (13)$$

式 (12) 中, 列向量  $\mathbf{q}^k$  的第  $i$  个元素为

$$\mathbf{q}_i^k = \mathbf{h}_i^T \bar{\mathbf{C}}^k \mathbf{f}_i + \mathbf{h}_{i+M}^T \bar{\mathbf{C}}^k \mathbf{f}_{i+M} \quad (14)$$

式 (13) ~ (14) 中,  $\mathbf{h}_i$  表示矩阵  $\mathbf{H}(m-1)$  的第  $i$  列向量, 参量  $\mathbf{h}_{i+M}, \mathbf{h}_j, \mathbf{h}_{j+M}$  及  $\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_{i+M}, \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_{j+M}$  的含义可据此推理. 至此, 可得  $\mathbf{A}^k(m) = \text{diag}[\tilde{\mathbf{d}}^k, \tilde{\mathbf{d}}^k]$ .

第二步, 固定  $\mathbf{F}(m-1)$  和  $\mathbf{A}^k(m)$  ( $k = 1, \dots, 2K$ ), 求  $\mathbf{H}(m)$  使得代价函数

$$J(\mathbf{H}(m), \mathbf{A}^1(m), \dots, \mathbf{A}^{2K}(m), \mathbf{F}(m-1))$$

$$= \sum_{k=1}^{2K} \|\bar{\mathbf{C}}^k - \mathbf{H}(m)\mathbf{A}^k(m)\mathbf{F}^T(m-1)\|_F^2$$

达到最小. 假设  $\mathbf{H}(m) = [\mathbf{H}_1(m), \mathbf{H}_2(m)]$ , 其中  $\mathbf{H}_1(m)$  和  $\mathbf{H}_2(m)$  分别为  $\mathbf{H}(m)$  的第 1 到第  $M$  列向量和第  $M+1$  到  $2M$  列向量. 并表示  $\mathbf{A}^k(m)\mathbf{F}^T(m-1) = \mathbf{G}^k(m) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^k(m) \\ \mathbf{G}_2^k(m) \end{bmatrix}$ , 其中  $\mathbf{G}_1^k(m)$  和  $\mathbf{G}_2^k(m)$  分别为

$\mathbf{G}^k(m)$  的第 1 到第  $M$  行向量和第  $M+1$  到第  $2M$  行向量. 首先将代价函数  $J$  关于  $\mathbf{H}_1(m)$  求导并令导数为零, 在计算过程中, 由于  $\mathbf{H}_2(m)$  尚未更新, 仍然使用第  $m-1$  轮的迭代结果  $\mathbf{H}_2(m-1)$ , 可得:

$$\mathbf{H}_1(m) = \left[ \left( \sum_{k=1}^{2K} \bar{\mathbf{C}}^k \mathbf{G}_1^{kT}(m) \right) - \mathbf{H}_2(m-1) \left( \sum_{k=1}^{2K} \mathbf{G}_2^k(m) \mathbf{G}_1^{kT}(m) \right) \right] \cdot \left( \sum_{k=1}^{2K} \mathbf{G}_1^k(m) \mathbf{G}_1^{kT}(m) \right)^{-1} \quad (15)$$

根据 (T3) 所述矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  的结构特点, 求得  $\mathbf{H}_1(m)$  后, 可直接得到  $\mathbf{H}_2(m)$ , 进而求得  $\mathbf{H}(m)$ .

第三步, 固定  $\mathbf{H}(m)$  和  $\mathbf{A}^k(m)$  ( $k = 1, \dots, 2K$ ), 求  $\mathbf{F}(m)$  使得

$$J(\mathbf{H}(m), \mathbf{A}^1(m), \dots, \mathbf{A}^{2K}(m), \mathbf{F}(m)) = \sum_{k=1}^{2K} \|\bar{\mathbf{C}}^k - \mathbf{H}(m)\mathbf{A}^k(m)\mathbf{F}^T(m)\|_F^2$$

达到最小. 与第二步相似, 假设  $\mathbf{F}(m) = [\mathbf{F}_1(m), \mathbf{F}_2(m)]$ , 并表示  $\mathbf{H}(m)\mathbf{A}^k(m) = \mathbf{L}^k(m) = [\mathbf{L}_1^k(m), \mathbf{L}_2^k(m)]$ , 其中  $\mathbf{L}_1^k(m)$  和  $\mathbf{L}_2^k(m)$  分别为  $\mathbf{L}^k(m)$  的第 1 到第  $M$  列元素和第  $M+1$  到第  $2M$  列元素. 首先将代价函数关于  $\mathbf{F}_1(m)$  求导并令导数为零, 在计算过程中, 由于  $\mathbf{F}_2(m)$  尚未更新, 仍然使用第  $m-1$  轮的迭代结果  $\mathbf{F}_2(m-1)$ , 可得:

$$\mathbf{F}_1(m) = \left[ \left( \sum_{k=1}^{2K} \bar{\mathbf{C}}^{kT} \mathbf{L}_1^k(m) \right) - \mathbf{F}_2(m-1) \left( \sum_{k=1}^{2K} \mathbf{L}_2^{kT}(m) \mathbf{L}_1^k(m) \right) \right] \cdot \left( \sum_{k=1}^{2K} \mathbf{L}_1^k(m) \mathbf{L}_1^{kT}(m) \right)^{-1} \quad (16)$$

同样的, 根据 (T3) 所述矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  的结构特点, 求得  $\mathbf{F}_1(m)$  后, 可直接得到  $\mathbf{F}_2(m)$ , 进而求得  $\mathbf{F}(m)$ .

算法收敛后, 得到最终的  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{F}$ , 实验证明二者之间差异很小, 均可作为矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  的估计. 进而, 根据 (T3) 所述结构特点, 可以得到混迭矩阵  $\mathbf{A}$  的估计  $\tilde{\mathbf{A}}$ , 然后进一步根据  $\tilde{\mathbf{s}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{x}(t)$  估计源信号, 实现盲源分离.

## 4 仿真结果

为了分析算法的性能, 本节给出三个仿真实验结

果. 首先定义两个性能指标:

第一个性能指标记为 JH, 定义为:

$$JH = 10 \lg \left[ \sum_{k=1}^{2K} \|\bar{\mathbf{C}}^k - \mathbf{H}\mathbf{A}^k\mathbf{F}^T\|_F^2 \right] \quad (17)$$

这一参数显然和代价函数值一致, 反映的是 STBJD 算法采用代价函数(11), 在迭代过程中代价函数值的变化趋势, 由于此参数未能直接体现对混迭矩阵的估计性能, 因此只将其应用于实验 1 中, 以说明所提新算法针对代价函数(11)的有效性.

第二个性能指标称为全局拒噪水平 (Global Rejection Level, GRL), 用以衡量混迭矩阵估计值  $\tilde{\mathbf{A}}$  和真实值  $\mathbf{A}$  之间的差异, 定义为<sup>[3-13]</sup>:

$$GRL = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N \frac{|g_{ij}|}{\max_k |g_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \frac{|g_{ij}|}{\max_k |g_{kj}|} - 1 \right) \quad (18)$$

其中,  $g_{ij}$  代表矩阵  $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{A}$  的第  $i$  行第  $j$  列元素.

**实验 1** 为了说明所提 STBJD 算法的有效性及收敛性, 运行 20 次独立实验. 每次实验均构造  $N \times N$  的不含噪声目标矩阵组  $\{\mathbf{C}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^H, k=1, \dots, K\}$ , 其中  $K=15, N=10$ , 混迭矩阵  $\mathbf{A}$  及对角阵  $\mathbf{A}^k$  均为随机产生的复值矩阵. 图 1 给出的是全局拒噪水平 GRL 随迭代次数变化的性能曲线. 为了得到此曲线, 需要在每轮迭代 (以第  $m$  轮迭代为例) 的第二步, 根据求得的  $\mathbf{H}(m)$  并结合式(9)所示的关系式, 获得本轮迭代混迭矩阵估计值  $\tilde{\mathbf{A}}$ , 进而由式(13)求得本轮迭代的 GRL. 图 2 给出的是参数 J(H) 随迭代次数变化的性能曲线. 图 1 和图 2 均说明, 在无噪声即目标矩阵具有精确可联合对角化结构情况下, STBJD 算法以极高的精度收敛. 由图 1 可知, 算法收敛后, 混迭矩阵估计值和真实值之间的差异极小, 所提算法可有效实现混迭矩阵的估计.

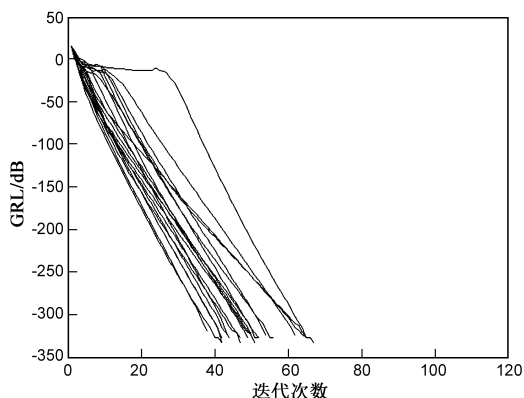


图1 GRL随迭代次数变化曲线

**实验 2** 本实验利用构造的带噪目标矩阵组来说明 STBJD 算法的快速性及有效性. 给出  $N \times N$  的目标方阵组:

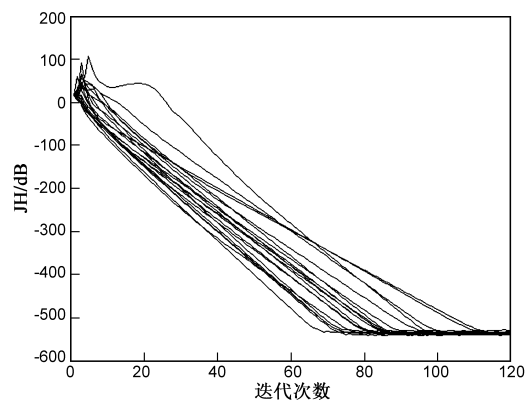


图2 JH随迭代次数变化曲线

$$\mathbf{C}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^H + \Delta\mathbf{C}^k \quad (k=1, \dots, K) \quad (19)$$

其中  $K=15, N=10$ . 混迭矩阵  $\mathbf{A}$  及对角阵  $\mathbf{A}^k$  均为随机产生的复值矩阵. 为了表征噪声矩阵的强度, 将不含噪声部分  $\mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^H$  和噪声部分  $\Delta\mathbf{C}^k$  的比表示为  $NER$ <sup>[20]</sup>:

$$NER = 10 \lg \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^H\|_F^2}{\|\Delta\mathbf{C}^k\|_F^2} \quad (k=1, \dots, K) \quad (20)$$

在仿真中, 随机产生复数值噪声矩阵  $\Delta\mathbf{C}^k (k=1, \dots, K)$  以分别满足  $NER = 10\text{dB}, 15\text{dB}, 20\text{dB}, 25\text{dB}$ . 在不同的  $NER$  取值下, STBJD 算法运行 20 次独立实验, 每次独立实现 GRL 随迭代次数的变化曲线示于图 3, 不同  $NER$  取值下, 平均 GRL 随迭代次数的变化曲线示于图 4, 两图均表明在带噪即目标矩阵为非严格可对角化结构情况下, 所提算法依然能以较高精度收敛.

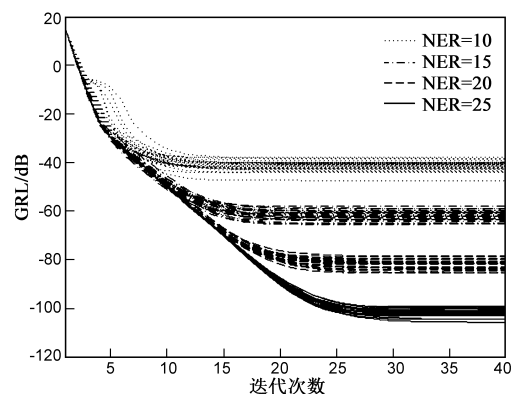


图3 STBJD算法在不同NER且20次独立实验时每次GRL随迭代次数变化曲线

**实验 3** 本实验将 STBJD 算法同现存的, 可同样应用于复数域的非正交联合对角化的 FAJD 算法<sup>[12]</sup> 和 CVFFDIAG 算法<sup>[13]</sup> 进行比较. 与实验 2 相似, 通过式(19)及式(20)构造目标矩阵组并设定相应的  $NER$ , 取  $K=15, N=5$ , 三种算法均运行 200 次独立实验后求平均值. 当  $NER = 15\text{dB}$  时各算法的平均 GRL 随迭代次数的变化曲线如图 5 所示. 当  $NER = 20\text{dB}$  时各算法的平均 GRL 随迭代次数的变化曲线如图 6 所示. 观察两图

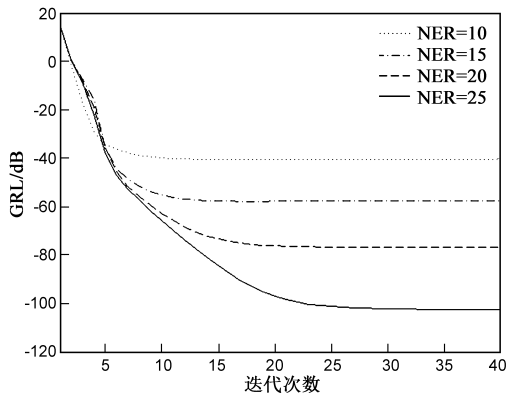


图4 STBJD算法在不同NER且20次独立实验时平均GRL随迭代次数变化曲线

的仿真结果可以看出:一方面,STBJD 算法的收敛精度明显优于其余两种算法,当  $\text{NER} = 15\text{dB}$  时,优于 CVFFDIAG 算法约  $20\text{dB}$ ,优于 FAJD 算法约  $25\text{dB}$ ,而且,与  $\text{NER} = 20\text{dB}$  时相比,噪声较大时,STBJD 算法的收敛精度优势更明显,限于篇幅而未在文中呈现的仿真实验结果也证明了这一点,所提算法收敛精度的优势正是由于在优化过程中,充分考虑了各参量的结构,相当于利用了更多的先验知识.另一方面,STBJD 算法的收敛速度逊于其余两种算法,而且,综合实验 2 与实验 3 的结果也可以发现,目标矩阵维数越大,信噪比越小,则收敛速度越快但收敛精度越低.文献[13]的仿真结果和本文结果一致表明,FAJD 算法和 CVFFDIAG 算法都具有较快的收敛速度且收敛速度基本不受目标矩阵维数与信噪比大小的影响,这一特点是由各算法的优化机制决定的.需要补充的是,此三种算法均属于离线算法而非实时在线算法,因而,相比于算法的实时性,收敛精度的实用价值更大,从这个角度来看,所提 STBJD 算法性能略胜一筹.

**实验 4** 本实验验证 STBJD 算法在求解盲源分离问题时的有效性.给出 4 个零均值统计独立的复值源信号:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sin(310\pi t) + j\cos(100\pi t), \\ s_2(t) &= \sin(180\pi t) + j\sin(400\pi t), \\ s_3(t) &= \sin(20\pi t)\sin(600\pi t) \\ &\quad + j\cos(20\pi t)\cos(600\pi t), \\ s_4(t) &= \sin[600\pi t + 6\cos(120\pi t)] + j\cos(900\pi t), \end{aligned}$$

此处  $j = \sqrt{-1}$ ,假设 4 个信源被 4 个阵元接收,混迭信道参数为随机产生的复值矩阵  $\mathbf{A}$ ,信号样本数  $T = 400$ ,接收过程中引入的噪声为  $\mathbf{N} = \text{randn}(4, T) + j\text{randn}(4, T)$ .信噪比设定为  $10\text{dB}$ .目标矩阵通过求取接收信号不同时移下的互相关矩阵获得且选定个数  $K = 8$ .运行 STBJD 算法实现混迭矩阵  $\mathbf{A}$  的估计,并恢复源信号.100 次独立实验的平均 GRL 随迭代次数的变化曲线如图 7

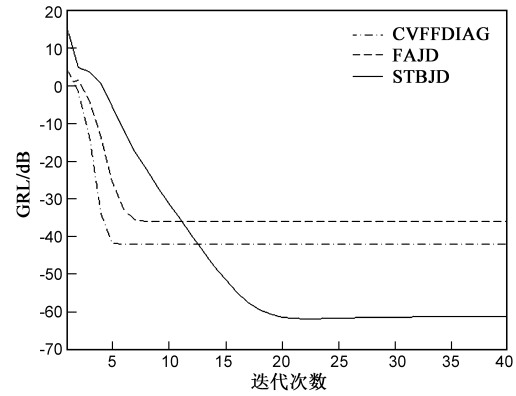


图5 三种算法在NER=15dB时GRL随迭代次数变化曲线

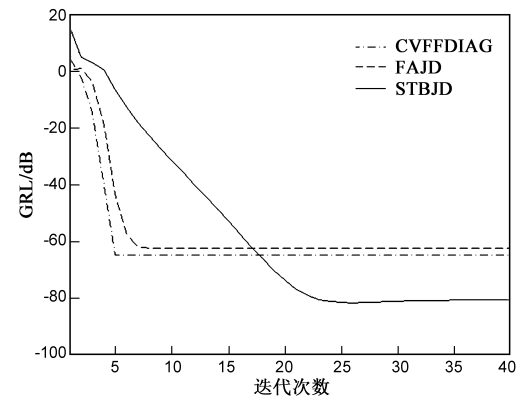


图6 三种算法在NER=20dB时GRL随迭代次数变化曲线

所示.在 100 次独立实验中随机抽取第 33 次实验,查看源信号的恢复效果:图 8 ~ 图 10 所示分别为 4 个源信号的星座图,4 个接收信号的星座图,以及 4 个恢复信号的星座图.显然,即使源信号被混迭矩阵充分混合且存在较大噪声情况下,STBJD 算法仍能实现收敛且收敛误差较小因而实现了源信号的较精确盲分离.同时,比较图 8 所示源信号与图 10 所示恢复信号可以明确地发现盲源分离领域所固有的排列不定性和尺度不定性现象<sup>[1]</sup>.

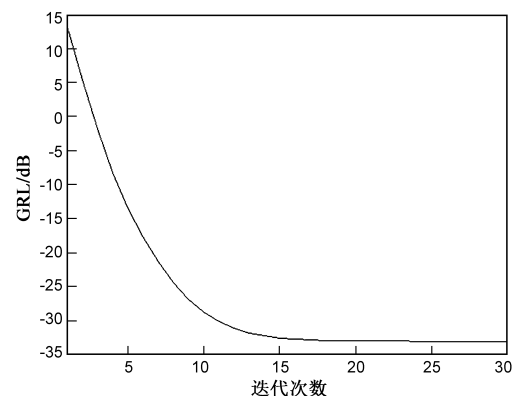


图7 GRL随迭代次数变化曲线

**实验 5** 本实验验证 STBJD 算法在求解语音信号的

盲源分离问题的有效性. 假设如图 11 所示的样本数  $T = 20000$  的 3 个语音信号被 5 个相距半波长的传感器均匀线阵接收, 混迭矩阵为  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \mathbf{a}(\theta_3)]$ , 其中  $\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-j\pi\cos\theta}, \dots, e^{-j4\pi\cos\theta}]^T$ , 假设波达方向矢量  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ , 三个波达方向角分别在  $(10^\circ, 60^\circ), (60^\circ,$

$110^\circ), (110^\circ, 160^\circ)$  之间随机选取, 信噪比设为 15dB, 取  $K = 10$ , 混迭信号如图 12 所示, 利用 STBJD 算法得到的分离信号如图 13 所示. 图 11 与图 13 同样说明了算法的良好分离性能, 也同样体现了盲源分离领域所固有的排列不定性和尺度不定性现象.

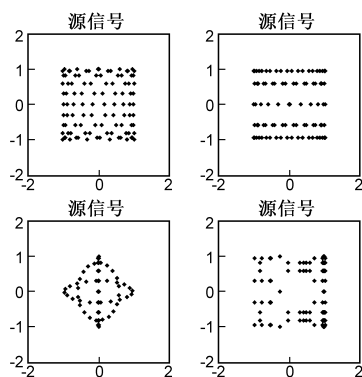


图8 源信号星座图

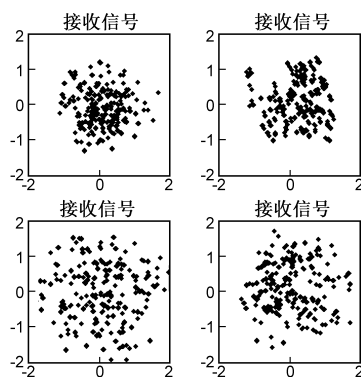


图9 接收信号星座图

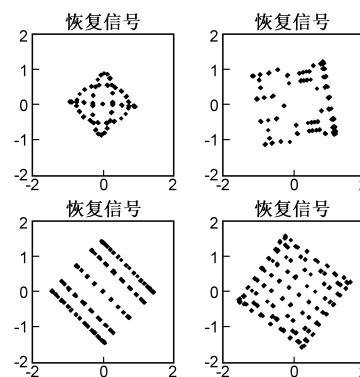


图10 STBJD算法恢复信号星座图

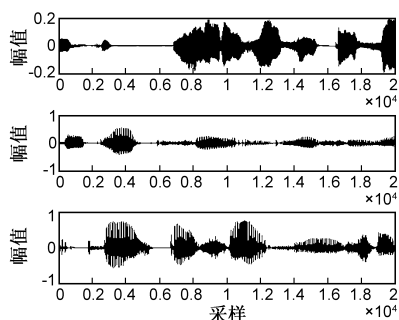


图11 原始语音信号波形图

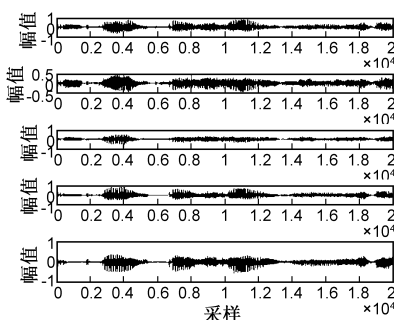


图12 混迭信号波形图

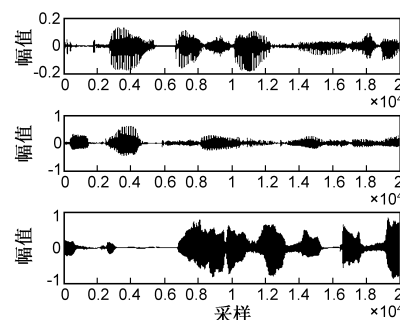


图13 STBJD算法恢复信号波形图

## 5 结束语

提出了一种具有极广适用性的复数域联合对角化算法, 用于解决最一般的复数域盲源分离问题. 不论是目标矩阵组的转换, 还是代价函数的建立, 乃至代价函数的优化求解, 充分挖掘并合理利用参量结构的策略贯穿于算法的始终. 也正是此优化机制决定了所提 STBJD 算法具有很好的收敛精度, 可用于有效解决盲源分离问题.

### 参考文献

- [1] Chabriel G, Kleinstueber M, Moreau E, et al. Joint matrices decompositions and blind source separation: A survey of methods, identification, and applications [J]. IEEE Signal Process Mag, 2014, 31(3): 34-43.
- [2] Pham D-T. Joint approximate diagonalization of positive definite matrices [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2001, 55(4): 1136-1152.
- [3] Belouchrani A, Meraim K A, Cardoso J-F, et al. A blind source separation technique using second-order statistics

[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 1997, 45(2): 434-444.

- [4] Wax M, Scheinvald J. A least-squares approach to joint diagonalization [J]. IEEE Signal Process Lett, 1997, 4(2): 52-53.
- [5] Souloumiac A. Joint diagonalization: Is non-orthogonal always preferable to orthogonal? [A]. Proceedings of IEEE International Conference on Workshop CAMSAP [C]. USA: IEEE Press, 2009. 305-308.
- [6] Souloumiac A. Nonorthogonal joint diagonalization by combining givens and hyperbolic rotations [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2009, 57(6): 2222-2231.
- [7] Vollgraf R, Obermayer K. Quadratic optimization for simultaneous matrix diagonalization [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2006, 54(9): 3270-3278.
- [8] Tichavsky P, Yeredor A. Fast approximate joint diagonalization incorporating weight matrices [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2009, 57(3): 878-891.
- [9] Yeredor A. Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source separation [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2002, 50(7):

- 1545 – 1553.
- [10] Todros K, Tabrikian J. QML-Based joint diagonalization of positive-definite hermitian matrices[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2010, 58(9):4656 – 4673.
- [11] Yeredor A, Song B, Roemer F, et al. A sequentially drilled joint congruence (SeDJoCo) transformation with applications in blind source separation and multiuser MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2012, 60(6):2744 – 2757.
- [12] Li X-L, Zhang X-D. Nonorthogonal joint diagonalization free of degenerate solution[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2007, 55(5):1803 – 1814.
- [13] Xu X-F, Feng D-Z, Zheng W X. A fast algorithm for non-unitary joint diagonalization and its application to blind source separation [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2011, 59(7):3457 – 3463.
- [14] Zhang P, Chen S, Hanzo L. Embedded iterative semi-blind channel estimation for three-stage-concatenated MIMO-aided QAM turbo transceivers [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2014, 61(1):439 – 446.
- [15] Wang L, Ding H, Yin F. A region-growing permutation alignment approach in frequency-domain blind source separation of speech mixtures [J]. IEEE Transactions on Audio, Speech, Lang Process, 2011, 19(3):549 – 557.
- [16] 罗志增, 曹铭. 基于最大信噪比盲源分离的脑电信号伪迹滤波算法[J]. 电子学报, 2011, 39(12):2926 – 2931. LUO Zhi-zeng, CAO Ming. An algorithm to filter artifacts in EEG based on blind source separation of maximum signal noise ratio [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(12):2926 – 2931. (in Chinese)
- [17] Li X-L, Adali T, Anderson M. Joint blind source separation by generalized joint diagonalization of cumulant matrices[J]. Signal Process, 2011, 91(10):2314 – 2322.
- [18] Fadaili E M, Moreau N, Moreau E. Non-orthogonal joint diagonalization/zero diagonalization for source separation based on time-frequency distributions [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2007, 55(5):1673 – 1687.
- [19] Eidingen E, Yeredor A. Blind MIMO identification using the second characteristic function [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2005, 53(11):4067 – 4079.
- [20] Feng D-Z, Zheng W-X, Cichocki A. Matrix-group algorithm via improved whitening process for extracting statistically Independent sources from array signals [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2007, 55(3):962 – 977.
- [21] Yu H-J, Huang D-S. Graphical representation for DNA sequences via joint diagonalization of matrix pencil [J]. IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics, 2013, 17(3):503 – 511.
- [22] 欧世峰, 耿超, 高颖. 动量项盲源分离算法及其性能优化策略[J]. 电子学报, 2014, 42(1):42 – 48. OU Shi-feng, GENG Chao, GAO Ying. Momentum term based blind source separation algorithm and its performance modified strategies [J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(1):42 – 48. (in Chinese)
- [23] Golub G H, Loan C F V. Matrix Computation (Second Edition) [M]. Baltimore MD: Johns Hopkins University Press, 1989. 70 – 75.

#### 作者简介



徐先峰 男, 1982 年 3 月出生于山东宁阳, 博士、副教授, 硕士生导师. 主要研究方向为盲信号处理及其应用.

E-mail: xuxianfeng1982@163.com



段晨东 男, 1966 年 4 月出生于陕西韩城, 博士、教授、硕士生导师. 主要研究方向为信号处理, 故障诊断与模式识别.

E-mail: cdduan@chd.edu.cn