

基于半定松弛的长码 DSSS 信号扩频波形估计

张花国¹, 李 鑫¹, 张建华², 魏 平¹

(1. 电子科技大学电子工程学院, 四川成都 611731; 2. 中国船舶工业系统工程研究院, 北京 100094)

摘 要: 针对非合作通信中的长码 DSSS 信号, 提出了一种基于半定松弛的扩频波形估计方法, 并在确定信号模型下推导了扩频波形估计的 CRB. 首先推导了长码 DSSS 信号扩频波形的极大似然估计, 由于该极大似然估计为非凸的组合优化问题, 提出通过松弛约束条件将其转化为具有多项式计算复杂度的半定规划问题, 实现对该极大似然估计问题的近似求解. 仿真表明本文提出方法性能优于现有方法, 并随着信噪比的提高逐渐逼近 CRB.

关键词: 长码 DSSS 信号; 极大似然估计; 半定松弛; 扩频波形估计; CRB

中图分类号: TN911.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)02-0334-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.02.013

A Semidefinite Relaxation Approach to Spreading Waveform Estimation for Long-Code DSSS Signals

ZHANG Hua-guo¹, LI Xin¹, ZHANG Jian-hua², WEI Ping¹

(1. School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 611731, China;

2. Systems Engineering Research Institute, Beijing 100094, China)

Abstract: For long-code direct sequence spread spectrum (DSSS) signals in non-cooperative communication systems, a semidefinite relaxation approach to spreading waveform estimation is proposed, and the Cramer-Rao lower bound (CRB) for the spreading waveform estimation is also derived under the deterministic signal model. We first derive the maximum likelihood estimate (MLE) of spreading waveform. Then, due to the MLE problem being a non-convex combinatorial optimization problem, we approximate it as a semidefinite programming problem which features polynomial worst-case complexity by relaxing the constraints. The simulation results demonstrate that the proposed estimator significantly outperforms the existing estimators and can achieve the CRB as the signal-to-noise ratio increases.

Key words: long-code DSSS signals; maximum likelihood estimate; semidefinite relaxation; spreading waveform estimation; Cramer-Rao lower bound

1 引言

直接序列扩频 (Direct Sequence Spread Spectrum, DSSS) 信号具有抗多径、抗干扰、低截获概率、多址复用等优点, 在军事和民用通信领域有着广泛的应用, 如美国跟踪与数据中继卫星系统 (TDRSS)、全球定位系统 (GPS) 及第三代移动通信 CDMA 系统等. 合作接收方可利用已知扩频波形对 DSSS 信号解扩完成信息码估计, 而对于非合作接收方如无线电频谱监视、通信对抗等领域, 需要事先估计出扩频波形才能完成信号解扩. 因此, 非合作低信噪比条件下, DSSS 信号的扩频波形估计是目前研究热点之一.

目前, 针对短码 DSSS 信号 (即扩频波形周期与传输的信息码元宽度相等) 的扩频波形估计问题已取得大量研究成果^[1-6], 在低信噪比下可实现扩频波形的精确估计. 对于长码 DSSS 信号的一种特殊形式周期长码 DSSS 信号 (即扩频波形周期为信息码元宽度的整数倍), 目前其扩频波形估计问题也得到了广泛的研究^[6-10], 总体来讲其主要思路是基于短码 DSSS 信号扩频波形估计方法上的扩展, 将周期长码 DSSS 信号建模为虚拟多用户短码 DSSS 信号^[6,7] 或采用分段估计法^[8-10], 利用短码 DSSS 信号估计方法获得周期长码 DSSS 信号扩频波形的分段估计值, 并进一步利用特定扩频序列 (如 m 序列、Gold 序列) 的性质, 拼接扩频波形

的各分段估计值获得完整周期扩频波形的估计. 而对于非周期长码 DSSS 信号(即扩频波形周期为信息码元宽度的非整数倍), 由于其信号数学模型相对复杂, 目前研究结果较少, 根据公开文献最早进行非周期长码直扩信号扩频波形估计的是 DMDS (Dominant Mode despreading) 主模式解扩算法^[11,12], 该算法首先对信号进行频域信道化, 将协方差矩阵主特征向量的反傅里叶变换作为扩频波形的估计; 文献[13]针对非周期长码 DSSS 信号, 基于短码 DSSS 信号估计方法^[2]提出了一种启发式的改进方法, 将信号划分为多个宽度远小于信息码宽的相互重叠时窗, 近似认为各个时窗仅包含一个信息码元, 利用特征分析法^[2]实现扩频波形的分段估计, 并根据分段估计的重叠部分通过拼凑方式得到完整周期扩频波形的估计; 文献[14]将非周期长码 DSSS 信号建模为短码 DSSS 信号的缺失数据模型, 利用缺失数据模型低秩逼近方法得到扩频波形的估计; 文献[15]提出了一种基于差分主元分析的非周期长码 DSSS 信号扩频码估计方法, 通过协方差矩阵特征分解完成信息码元个数、扩频码子序列的估计.

上述这些非周期长码 DSSS 信号扩频波形估计方法均未考虑扩频波形估计的 CRB (Cramer-Rao lower bound) 克拉美劳界, 对其估计性能缺乏有效衡量标准, 而且没有由最优估计理论角度对扩频波形估计问题进行理论解释. 本文针对非周期长码 DSSS 信号的扩频波形估计问题, 首先在确定信号模型(将无关参数信息码元序列建模为确定未知量)条件下, 理论推导了扩频波形与信息码序列的联合极大似然估计; 其次, 注意到该极大似然估计为一典型的组合优化问题, 具有指数计算复杂度, 实际应用中难以实现求解, 进而通过松弛该极大似然估计问题的约束条件, 提出了一种具有多项式计算复杂度的基于半定松弛的近似极大似然估计算法; 最后, 本文在确定信号模型条件下, 理论推导了扩频波形估计的 CRB, 为扩频波形估计性能提供了一个理论下界. 由于本文提出算法是基于参数的极大似然估计准则而提出的, 极大似然估计器具有渐进有效性, 因此本文提出算法相对现有估计器具有更优的估计性能, 计算机性能仿真也验证了本文提出算法的优良性能.

2 信号模型

非合作接收方截获的长码直扩信号可表示为 $y(n)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$):

$$y(n) = As(n) + v(n) \quad (1)$$

$$s(n) = \sum_{m=0}^{M-1} b(\bar{m})q(n - \bar{m}G) \sum_{m=0}^{M-1} c(n - mL) \quad (2)$$

其中 $A > 0$ 为信号幅度, G 为信息码宽(扩频增益), L 为扩频波形周期($L > G$ 且 L 为 G 的非整数倍), $v(n)$ 为方

差 σ^2 的高斯白噪声序列. 信息码波形 $\bar{b}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} b(\bar{m})q(n - \bar{m}G)$ 由 BPSK 信息码序列 $\mathbf{b} = [b(0), \dots, b(\bar{M}-1)]^T$ 构成, 其中 $\bar{M} = \lceil N/G \rceil$ 表示长为 N 的截获信号样本中所含有的信息码个数($\lceil x \rceil$ 代表比 x 大的最小整数), $q(n)$ 为矩形函数且当 $n \in [0, G)$ 时 $q(n) = 1$, 否则 $q(n) = 0$. $\tilde{c}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} c(n - mL)$ 为扩频波形 $\mathbf{c} = [c(0), \dots, c(L-1)]^T$ 的周期扩展, 其中 $M = N/L$ 表示截获信号样本内含有的扩频波形周期个数; 扩频波形 \mathbf{c} 是扩频序列与信道冲激响应的卷积^[2,13,14], 且满足 $\|\mathbf{c}\|^2 = L$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示 Frobenius 范数. 信噪比定义为 $\text{SNR} = A^2/\sigma^2$.

令 $\mathbf{x} = [\mathbf{c}^T \ \mathbf{b}^T]^T$ 表示信号模型中的未知参量, 则信号样本 $\mathbf{s} = [s(0), \dots, s(N-1)]^T$ 可看作为 \mathbf{x} 的函数 $s(\mathbf{x})$, 且由式(2)可知 $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{c}} \odot \bar{\mathbf{b}}$, 其中 \odot 表示 Hadamard 积, $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}(0), \dots, \tilde{c}(N-1)]^T$, $\bar{\mathbf{b}} = [\bar{b}(0), \dots, \bar{b}(N-1)]^T$. 令 $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(N-1)]^T$ 和 $\mathbf{v} = [v(0), \dots, v(N-1)]^T$ 分别表示截获信号样本序列和噪声序列, 则式(1)可写为:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{s}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (3)$$

本文的目的是利用截获信号样本序列 \mathbf{y} 得到 \mathbf{x} 的极大似然估计, 并通过半定松弛方法完成该极大似然估计问题的近似求解, 从而最终实现扩频波形的近似极大似然估计.

3 基于半定松弛的扩频波形估计方法

3.1 扩频波形的极大似然估计

给定信号幅度 A 、噪声方差 σ^2 和 \mathbf{x} 时, 信号样本 \mathbf{y} 的对数似然函数为:

$$\ln p[\mathbf{y} | \mathbf{x}, A, \sigma^2] = - \left(\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{\|\mathbf{y} - A\mathbf{s}(\mathbf{x})\|^2}{2\sigma^2} \right) \quad (4)$$

由于信息码为 BPSK 调制且 $\|\mathbf{c}\|^2 = L$, 很容易得出 $\|\mathbf{s}(\mathbf{x})\|^2 = N$. 固定待估计参量 \mathbf{x} , 式(4)对 A 和 σ^2 分别求偏导并令其等于 0, 得到 A 和 σ^2 的极大似然估计:

$$\hat{A} = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}}{N}, \hat{\sigma}^2 = \frac{\|\mathbf{y} - \hat{A}\mathbf{s}(\mathbf{x})\|^2}{N} \quad (5)$$

将上式(5)代入式(4)可得:

$$\ln p[\mathbf{y} | \mathbf{x}, A, \sigma^2] = - \frac{N}{2} \ln \left[\frac{2\pi}{N} \left(\|\mathbf{y}\|^2 - \frac{|\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}|^2}{N} \right) \right] - \frac{N}{2} \quad (6)$$

显然, \mathbf{x} 的极大似然估计可由似然函数的最大化即通过 $|\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}|^2$ 的最大化得到. 令 $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{c}}^T \ \hat{\mathbf{b}}^T]^T$ 为最大化 $|\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}|^2$ 的解, 则由式(2)可知 $\mathbf{s}(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{y} = \mathbf{s}(\hat{\mathbf{x}}^*)^T \mathbf{y} = -\mathbf{s}(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{y}$, 其中 $\hat{\mathbf{x}}^* = [-\hat{\mathbf{c}}^T \ \hat{\mathbf{b}}^T]^T$, $\hat{\mathbf{x}}^* =$

$[\hat{\mathbf{c}}^T \quad -\hat{\mathbf{b}}^T]^T$, 即 $\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{x}}''$ 也为最大化 $|\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}|^2$ 的解, 这些多个解之间相互存在尺度模糊, 这是由于本文估计问题中不可避免存在的尺度模糊问题所带来的 (参见第 4 节). 若 $\mathbf{s}(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{y} > 0$ 则可通过最大化 $\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}$ 得到其解 $\hat{\mathbf{x}}$, 反之将得到其解 $\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{x}}''$. 因此, 就本文所研究的扩频波形极大似然估计问题而言, $|\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}|^2$ 最大化等价于 $\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}$ 最大化, 即 \mathbf{x} 的极大似然估计问题可写为如下优化问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y} \\ \text{s. t.} \quad & \|\mathbf{x}_{1:L}\|^2 = L \\ & \mathbf{x}_i = \{1, -1\}, \forall i \in \{L+1, \dots, L+\bar{M}\} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{x}_{1:L}$ 表示向量 \mathbf{x} 的前 L 个元素所构成的列向量, 上式(7)中的两个约束条件分别来自扩频波形的范数约束及 BPSK 信息码序列的有限符号集特性.

3.2 基于半定松弛的扩频波形估计

极大似然估计问题式(7)中的第二个约束使其为典型的组合优化问题, 具有指数计算复杂度. 精确求解该问题的计算量随着信息码序列长度的增加呈指数增长, 因此为典型的 NP 问题, 不具备实用性. 本文提出通过松弛约束条件, 将该组合优化问题转化为一个凸的半定规划问题, 大大降低了计算复杂度.

定义 $L \times \bar{M}$ 维观测矩阵 \mathbf{Q} , 其第 $(\text{mod}(n, L) + 1)$ 行、第 $(\lfloor n/G \rfloor + 1)$ 列的元素为 $y(n)$, 其余元素均为 0, 其中 $\text{mod}(n, L)$ 表示对 n 模 L 取余, $\lfloor x \rfloor$ 代表比 x 小的最大整数. 以 $L=7, G=3, N=14, M=2$ 为例, \mathbf{Q} 具有如下形式:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} y(0) & 0 & y(7) & 0 & 0 \\ y(1) & 0 & y(8) & 0 & 0 \\ y(2) & 0 & 0 & y(9) & 0 \\ 0 & y(3) & 0 & y(10) & 0 \\ 0 & y(4) & 0 & y(11) & 0 \\ 0 & y(5) & 0 & 0 & y(12) \\ 0 & 0 & y(6) & 0 & y(13) \end{bmatrix} \quad (8)$$

构建 $(L+\bar{M}) \times (L+\bar{M})$ 对称矩阵 $\bar{\mathbf{Q}}$:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{0}_{\bar{M} \times \bar{M}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{0}_{L \times L}$ 代表 $L \times L$ 维的全 0 矩阵.

根据式(2)和式(3), 很容易验证 $\mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x} / 2$. 由于 $\mathbf{x}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x} = \text{Tr}(\bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x} \mathbf{x}^T)$, 其中 $\text{Tr}\{\cdot\}$ 表示求矩阵的迹, 极大似然估计问题式(7)可写为如下等效形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Tr}(-\bar{\mathbf{Q}} \mathbf{X}) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{X} = \mathbf{x} \mathbf{x}^T \\ & \text{Tr}(\mathbf{F} \mathbf{X}) = L \\ & \mathbf{X}_{i,i} = 1, \forall i \in \{L+1, \dots, L+\bar{M}\} \end{aligned} \quad (10)$$

其中 \mathbf{F} 为对角阵, 其前 L 个对角元素为 1, 其余均为 0;

$\mathbf{X}_{i,i}$ 表示矩阵的第 i 个对角元素.

约束条件 $\mathbf{X} = \mathbf{x} \mathbf{x}^T$ 表明优化变量 \mathbf{X} 半正定且秩为 1, 秩 1 约束使得该优化问题非凸, 松弛该约束可得到如下半定规划问题^[16,17]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Tr}(-\bar{\mathbf{Q}} \mathbf{X}) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{X} \succeq \mathbf{0} \\ & \text{Tr}(\mathbf{F} \mathbf{X}) = L \\ & \mathbf{X}_{i,i} = 1, \forall i \in \{L+1, \dots, L+\bar{M}\} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\mathbf{X} \succeq \mathbf{0}$ 表示矩阵 \mathbf{X} 为半正定矩阵. 该半定规划问题为凸优化问题, 用内点算法^[18]求解可得到一个全局最优的半定规划解 $\hat{\mathbf{X}}$. 对 $\hat{\mathbf{X}}$ 进行特征分解得到最大特征值对应的特征向量 $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{L+\bar{M}}]^T$, 取其前 L 个元素作为扩频波形的估计 $\hat{\mathbf{c}} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_L]^T$. 极大似然估计问题式(10)中秩 1 约束条件的松弛, 将使该问题的解空间增大, 即式(11)的解空间大于式(10)的解空间, 因此通过求解半定规划问题式(11)将得到原极大似然估计问题式(10)的近似解, 但其优势在于计算复杂度被大大降低.

利用内点算法求解标准半定规划问题的计算复杂度约为 $O((L+\bar{M})^6)$, 但由于本文所提出的扩频波形估计器中施加了对角约束, 其计算复杂度降为 $O((L+\bar{M})^3)$ ^[18]; 分段法估计器^[13]主要包括信号协方差矩阵计算与矩阵特征分解操作, 其计算复杂度约为 $O(L_0^3 + ML_0^2)$ (L_0 为分段估计器中时窗宽度且 $L_0 < G$); DMDS 估计器^[11,12]主要包括频域信道化信号协方差矩阵计算与矩阵特征分解操作, 其计算复杂度约为 $O(L^3 + ML^3)$. 由于 $\bar{M} \approx LM/G$, 本文提出的半定松弛估计器高于分段法估计器, 但低于 DMDS 估计器.

4 扩频波形估计的 CRB

为了衡量扩频波形估计器的性能, 本节针对确定信号模型下扩频波形估计的 CRB 进行理论推导. 定义 $(L+\bar{M}+2)$ 维的未知参数向量 $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{c}^T \quad \mathbf{b}^T \quad A \quad \sigma^2]^T$, 由式(3)可知信号样本 \mathbf{y} 服从高斯分布即 $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R})$, 其中 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \bar{\mathbf{c}} \odot \bar{\mathbf{b}}$, $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}_{N \times N}$. Fisher 信息矩阵 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ ^[19]

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})]_{i,j} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_j} \right\} + \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^T}{\partial \theta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \theta_j} \quad (12)$$

对称矩阵 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 具有如下分块结构形式:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{cc} & \mathbf{J}_{cb} & \mathbf{J}_{cA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{bc} & \mathbf{J}_{bb} & \mathbf{J}_{bA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{Ac} & \mathbf{J}_{Ab} & \mathbf{J}_{AA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\sigma^2 \sigma^2} \end{bmatrix}$$

其中“ $\mathbf{0}$ ”表示元素全为零的向量.

由式(1)(2)和(12)可容易得到: $\mathbf{J}_{cc} = \frac{MA^2}{\sigma^2} \mathbf{I}_{L \times L}$, 其中 $\mathbf{I}_{L \times L}$ 代表 L 维的单位阵; \mathbf{J}_{bb} 为 \bar{M} 维对角阵, 其第 k ($k = 1, \dots, \bar{M}$) 个对角元素为 $\frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{i=(k-1)G+1}^{\min\{kG, N\}} \tilde{c}_i^2$, 其中 \tilde{c}_i 表示向量 $\tilde{\mathbf{c}}$ 的第 i 个元素, $\min\{x, y\}$ 表示取 x 和 y 的最小值; $\mathbf{J}_{AA} = \frac{N}{\sigma^2}$; $\mathbf{J}_{\sigma^2\sigma^2} = N\sigma^{-4}/2$; $L \times \bar{M}$ 维矩阵 \mathbf{J}_{cb} 的第 i ($i = 1, \dots, L$) 行 j ($j = 1, \dots, \bar{M}$) 列元素为 $\frac{A^2}{\sigma^2} (\mathbf{p}^{(i)} \odot \tilde{\mathbf{b}})^T (\mathbf{q}^{(j)} \odot \tilde{\mathbf{c}})$, 其中 N 维列向量 $\mathbf{p}^{(i)}$ 的第 $(l-1)L+i$ ($l = 1, \dots, M$) 个元素为 1, 其余元素全为零, N 维列向量 $\mathbf{q}^{(j)}$ 的第 $(j-1)G+1$ 至第 $\min\{jG, N\}$ ($j = 1, \dots, \bar{M}$) 个元素为 1, 其余元素全为零; L 维列向量 \mathbf{J}_{ca} 的第 i ($i = 1, \dots, L$) 个元素为 $\frac{A}{\sigma^2} (\mathbf{p}^{(i)} \odot \tilde{\mathbf{b}})^T (\tilde{\mathbf{b}} \odot \tilde{\mathbf{c}})$; \bar{M} 维列向量 \mathbf{J}_{ba} 的第 j ($j = 1, \dots, \bar{M}$) 个元素为 $\frac{A}{\sigma^2} (\mathbf{q}^{(j)} \odot \tilde{\mathbf{c}})^T (\tilde{\mathbf{b}} \odot \tilde{\mathbf{c}})$.

不难发现, 对于任一非 0 元素 α 和 β , $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{c}^T \ \mathbf{b}^T \ A \ \sigma^2]^T$ 和 $\boldsymbol{\theta} = [\alpha \mathbf{c}^T \ \beta \mathbf{b}^T \ A/(\alpha\beta) \ \sigma^2]^T$ 产生的信号样本 \mathbf{y} 相同. 这意味着扩频波形 \mathbf{c} 与信息码序列 \mathbf{b} 的估计存在尺度模糊, 导致 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 奇异, 无法通过对 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 直接求逆得到 CRB, 需要施加一定约束条件克服尺度模糊问题. 因此, 类似于通信中的盲信道估计问题^[20,21], 本文采用一种约束 NMSE (Normalized Mean Square Error, 归一化均方误差) 衡量估计误差:

$$\text{NMSE}_c = E_{\hat{\mathbf{c}}} \{ \|\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}\|^2 / \|\mathbf{c}\|^2 \} \quad (14)$$

$$\text{NMSE}_b = E_{\hat{\mathbf{b}}} \{ \|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}\|^2 / \|\mathbf{b}\|^2 \}$$

约束条件为:

$$\hat{\mathbf{c}}^H \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^H \mathbf{c}, \quad \hat{\mathbf{b}}^H \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}^H \mathbf{b} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{c}}^H \hat{\mathbf{c}} > 0, \quad \hat{\mathbf{b}}^H \hat{\mathbf{b}} > 0 \quad (16)$$

其中 $\hat{\mathbf{c}}$ 和 $\hat{\mathbf{b}}$ 分别为扩频波形 \mathbf{c} 和信息码序列 \mathbf{b} 的估计值. 约束条件式(15)、(16)仅仅是为了衡量算法性能及 CRB 推导, 实际应用中非合作接收方不需要该约束条件.

利用约束条件式(15)和(16)将得到最小约束 CRB^[20,21], 其中约束条件式(15)为范数约束, 约束条件式(16)为符号约束. 符号约束属于“静约束”, 不会改变 Fisher 信息矩阵的奇异性, 而范数约束可避免 Fisher 信息矩阵的奇异性. 范数约束式(15)可等价的写为矩阵形式 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^H \mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}^H \hat{\mathbf{c}} \\ \mathbf{b}^H \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}^H \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = 0$, 其相应的 $2 \times (L + \bar{M} + 2)$ 维梯度矩阵为:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{c}^H \mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}^H \hat{\mathbf{c}})}{\partial \mathbf{c}^T} & \frac{\partial(\mathbf{c}^H \mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}^H \hat{\mathbf{c}})}{\partial \mathbf{b}^T} & \frac{\partial(\mathbf{c}^H \mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}^H \hat{\mathbf{c}})}{\partial A} & \frac{\partial(\mathbf{c}^H \mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}^H \hat{\mathbf{c}})}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial(\mathbf{b}^H \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}^H \hat{\mathbf{b}})}{\partial \mathbf{c}^T} & \frac{\partial(\mathbf{b}^H \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}^H \hat{\mathbf{b}})}{\partial \mathbf{b}^T} & \frac{\partial(\mathbf{b}^H \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}^H \hat{\mathbf{b}})}{\partial A} & \frac{\partial(\mathbf{b}^H \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}^H \hat{\mathbf{b}})}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{b}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

令 $(L + \bar{M} + 2) \times (L + \bar{M})$ 维矩阵 \mathbf{H} 为梯度矩阵 $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ 的零空间即 $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{H} = \mathbf{0}$, 可得约束 CRB^[22]为:

$$\text{CRB}_c(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (18)$$

未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的前 L 个元素为扩频波形 \mathbf{c} , 因此扩频波形估计 NMSE 的理论下界为 $\text{CRB}_c(\boldsymbol{\theta})$ 前 L 个对角元素的平均:

$$\text{CRB} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [\text{CRB}_c(\boldsymbol{\theta})]_{i,i} \quad (19)$$

5 计算机仿真

本节利用计算机仿真考察本文提出的半定松弛扩频波形估计器的性能, 并与现有的分段法^[13]估计器和 DMDS^[11,12]估计器以及本文推导的约束 CRB 进行性能比较. 每个 NMSE 数值由 500 次蒙特卡罗仿真实验得到, 扩频波形在每次蒙特卡罗仿真实验中随机产生且服从高斯分布, 同时令非周期长码 DSSS 信号的扩频波形周期和信息码宽分别为 $L = 63, G = 30$.

固定信号样本长度 $M = 30$, 扩频波形估计的 NMSE 随信噪比变化仿真曲线如图 1 所示, 由仿真图可以看出, 本文提出的半定松弛扩频波形估计器的估计性能明显优于分段法和 DMDS 估计器, 并且随着信噪比的增加, 半定松弛估计器的估计性能逐渐逼近并达到约束 CRB.

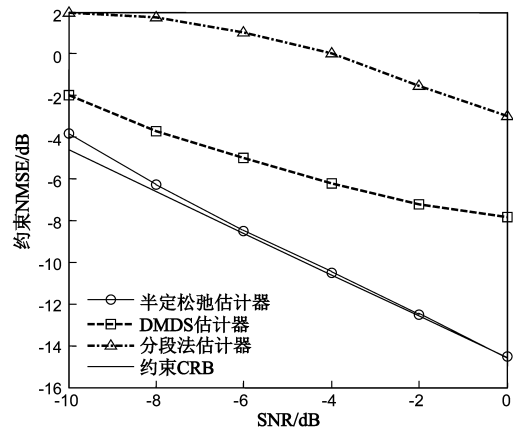


图1 扩频波形估计的NMSE随信噪比变化仿真曲线 ($L=63, G=30$)

固定信噪比为 $\text{SNR} = -9 \text{ dB}$, 扩频波形估计的 NMSE 随信号样本长度变化仿真曲线如图 2 所示. 由仿

真图可以看出,分段法估计器与 DMDS 估计器随着信号样本长度的增加,其误差减小开始变缓,而本文提出的半定松弛扩频波形估计器的估计性能与约束 CRB 接近.

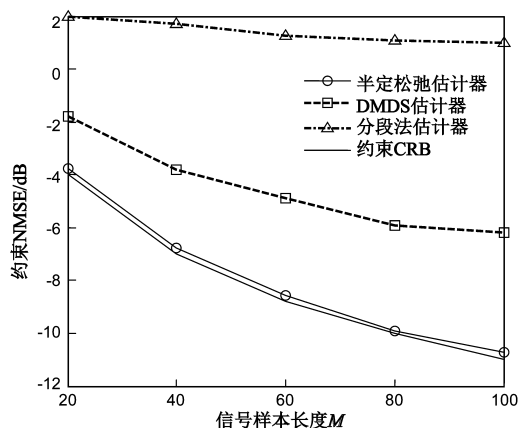


图2 扩频波形估计的NMSE随信号样本长度变化仿真曲线 ($L=63, G=30$)

改变非周期长码 DSSS 信号的扩频波形周期和信息码宽 $L = 127, G = 30/50$. 固定信号样本长度 $M = 50$, 扩频波形估计的 NMSE 随信噪比变化仿真曲线如图 3 所示; 固定信噪比为 $\text{SNR} = -9\text{dB}$, 扩频波形估计的 NMSE 随信号样本长度变化仿真曲线如图 4 所示. 由仿真图可以看出, 本文提出的半定松弛扩频波形估计器的估计性能与约束 CRB 接近.

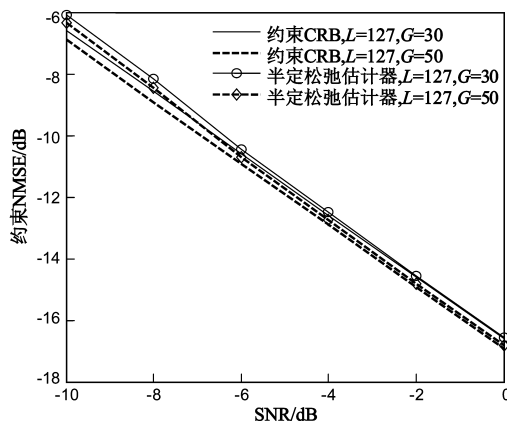


图3 扩频波形估计的NMSE随信噪比变化仿真曲线 ($L=127, G=30/50$)

由以上仿真明显可看出本文提出估计器明显优于现有估计器, 其主要原因是本文估计器是由最优参数估计理论-极大似然估计推导得到, 尽管本文采用了半定松弛方法对极大似然估计问题进行了近似求解, 这也说明半定松弛方法对极大似然估计问题具有良好的求解性能, 这在合作通信多用户检测问题^[16]中也得到了证明.

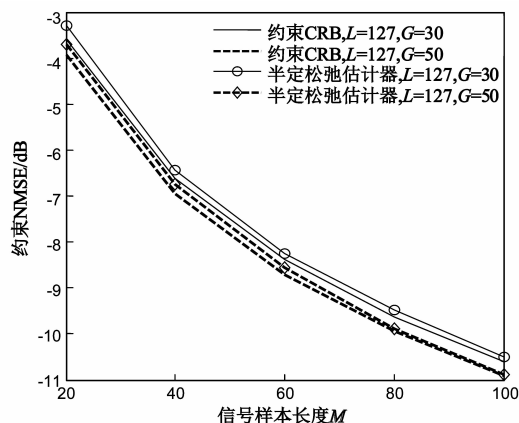


图4 扩频波形估计的NMSE随信号样本长度变化仿真曲线 ($L=127, G=30/50$)

6 结论

本文针对长码 DSSS 信号的扩频波形估计问题, 由最优参数估计理论角度推导了扩频波形的极大似然估计模型, 并提出了一种半定松弛方法实现该极大似然估计的近似求解, 同时在确定信号模型下推导了扩频波形估计的 CRB, 为衡量各种估计器的性能提供了一个理论下界. 由于本文提出方法基于极大似然估计理论, 相对现有方法具有更优的估计性能.

参考文献

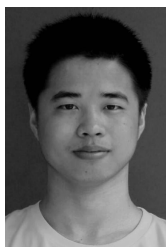
- [1] C Boudier, S Azou, G Burel. A robust synchronization procedure for blind estimation of the symbol period and the timing offset in spread spectrum transmissions [A]. IEEE Seventh International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications [C]. Prague, Czech Republic, 2002. 238 - 241.
 - [2] C Boudier, S Azou, G Burel. Performance analysis of a spreading sequence estimator for spread spectrum transmissions [J]. Journal of the Franklin Institute, 2004, 34 (7): 595 - 614.
 - [3] M K Tsatsanis, G B Giannakis. Blind estimation of direct sequence spread spectrum signals in multipath [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1997, 45(5): 1241 - 1252.
 - [4] Y H Peng, B Tang, M Lv. Fast method for spreading sequence estimation of DSSS signal based on maximum likelihood function [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2010, 21(6): 948 - 953.
 - [5] 付卫红, 杨小牛, 刘乃安. 基于盲源分离的 CDMA 多用户检测与伪码估计 [J]. 电子学报, 2008, 36 (7): 1319 - 1323.
- FU Wei-hong, YANG Xiao-niu, LIU Nai-an. The multi-user detection and chip sequence estimation for CDMA system based on the blind source separation [J]. Acta Electronica

- Sinica, 2008, 36(7): 1319 - 1323. (in Chinese).
- [6] 任啸天, 徐晖, 王翔, 等. 一种针对短码、周期长码直扩信号扩频序列盲估计方法[J]. 宇航学报, 2011, 32(12): 2596 - 2600.
REN Xiao-tian, XU Hui, WANG Xiang, et al. A method for blind estimation of PN sequence of short-code and periodic long-code DSSS signal[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(12): 2596 - 2600. (in Chinese)
- [7] S Daneshmand, H Aghaeinia, M Tohidian, et al. Blind estimation of signal in periodic long-code DSSS communications[A]. IEEE Sarnoff Symposium[C]. Princeton, NJ: IEEE, 2009. 1 - 6.
- [8] 王满喜, 李宏, 马刘非, 等. 非周期性 DSSS 信号的 PN 码序列盲估计[J]. 信号处理, 2009, 25(10): 1605 - 1611.
WANG Man-xi, LI Hong, MA Yi-fei, et al. Approach to blind estimation of PN sequence in non-periodic DSSS signals[J]. Signal Processing, 2009, 25(10): 1605 - 1611. (in Chinese)
- [9] 张晓林, 李洪源. 非周期直扩信号 PN 码盲估计技术[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(6): 1102 - 1107.
ZHANG Xiao-lin, LI Hong-yuan. Approach to blind estimation of PN sequence in nonperiodic DSSS signals[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(6): 1102 - 1107. (in Chinese)
- [10] 马超, 张立民, 王建雄. 基于子空间跟踪的长码直扩序列盲估计[J]. 计算机与数字工程, 2014, 42(2): 223 - 226.
MA Chao, ZHANG Li-min, WANG Jian-xiong. Blind estimation of long code DSSS signal based on subspace tracking[J]. Computer & Digital Engineering, 2014, 42(2): 223 - 226. (in Chinese)
- [11] B G Agee, R J Kleinman, J H Reed. Soft synchronization of direct sequence spread-spectrum signals[J]. IEEE Trans Communications, 1996, 44(11): 1527-1536.
- [12] N R Mangalvedhe, J H Reed. Evaluation of a soft synchronization technique for DS/SS signals[J]. IEEE Journ Selected Areas in Communications, 1996, 14(8): 1643 - 1652.
- [13] P Y Qui, Z T Huang, W L Jiang, C Zhang. Improved blind-spreading sequence estimation algorithm for direct sequence spread spectrum signals[J]. IET Signal Processing, 2008, 2(2): 139 - 146.
- [14] 牟青, 魏平. 基于缺失数据模型的长码直扩信号的伪码估计[J]. 电子学报, 2010, 38(10): 2365 - 2369.
MOU Qing, WEI Ping. Spreading waveform estimation of long-code DS-SS signals based on missing-data model[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(10): 2365 - 2369. (in Chinese)
- [15] 何涛, 李志强, 梁旭文. 一种非周期调制直扩信号扩频码估计方法[J]. 宇航学报, 2013, 34(4): 546 - 551.
HE Tao, LI Zhi-qiang, LIANG Xu-wen. An estimation method for spread spectrum code of non-periodic modulated DS signal[J]. Journal of Astronautics, 2013, 34(4): 546 - 551. (in Chinese)
- [16] W K Ma, T N Davidson, K M Wong, Z Q Luo, P C Ching. Quasi-maximum-likelihood multiuser detection using semi-definite relaxation with application to synchronous CDMA[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2002, 50(4): 912 - 922.
- [17] Z Q Luo, W Yu. An introduction to Convex optimization for communications and signal processing[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2006, 24(8): 1426 - 1438.
- [18] S J Benson, Y Ye. DSDP5: software for semidefinite programming[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2005, V(N): 1 - 20.
- [19] S M Kay. Fundamentals of Statistical Signal Processing[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.
- [20] E D Carvalho, J Cioffi, D Slock. Cramer-Rao bounds for blind multichannel estimation[A]. Proc Global Telecommun Conf[C]. San Francisco, CA: IEEE, 2000. 1036 - 1040.
- [21] E D Carvalho, D Slock. Blind and semi-blind FIR multichannel estimation: (Global) identifiability conditions[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2004, 52(4): 1053 - 1064.
- [22] P Stoica, B C Ng. On the Cramer-Rao bound under parametric constraints[J]. IEEE Trans Signal Process Lett, 1998, 5(7): 177 - 179.

作者简介



张花国 男, 1979 年 1 月生于山东潍坊, 电子科技大学电子工程学院副教授, 主要研究方向为复杂通信信号截获与分析。
E-mail: uestczhg@163.com



李 鑫 男, 1991 年 11 月生于辽宁朝阳, 现为电子科技大学电子工程学院硕士研究生, 主要研究方向为 DSSS 信号的盲解扩研究。