

# 基于稀疏信号重构的 DOA 和极化角度估计算法

田 野, 练秋生, 徐 鹤

(燕山大学信息科学与工程学院, 河北秦皇岛 066004)

**摘 要:** 现有的波达方向 (Direction Of Arrival, DOA) 和极化参数估计方法大多基于子空间理论. 本文从稀疏信号重构角度出发, 提出了一种新的 DOA 和极化角度估计算法. 该算法首先构建一个只包含 DOA 信息的累积量矩阵模型, 然后基于加权  $\ell_1$  范数最小化获得 DOA 估计. 在 DOA 估计的基础上, 进一步通过求和平均运算构建三个包含不同极化信息的累积量向量模型, 利用 Zhang 惩罚进行稀疏性约束, 获得近似无偏的极化角度估计. 阐述了如何利用极化信息来区分两个入射角度一样的信源信号. 计算机仿真结果验证了所提算法的有效性.

**关键词:** DOA 和极化角度估计; 稀疏信号重构; 加权  $\ell_1$  范数; Zhang 惩罚

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)07-1548-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.07.004

## DOA and Polarization Angle Estimation Algorithm Based on Sparse Signal Reconstruction

TIAN Ye, LIAN Qiu-sheng, XU He

(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

**Abstract:** Existing direction-of-arrival and polarization estimation methods mostly rely on subspace technique. This paper proposes a novel DOA and polarization angle estimation algorithm from sparse signal reconstruction perspective. The algorithm first constructs a cumulant matrix model which is only related to DOA parameter, and then obtains DOA estimation using the weighted  $\ell_1$ -norm minimization. Further, this paper constructs another three cumulant vector models by sum-average arithmetic, and enforces sparsity by Zhang penalty, which leads to almost unbiased polarization angle estimation. Meanwhile, this paper also demonstrates how to identify two sources with same DOA using their polarization characteristics. Computer simulation results validate the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** DOA and polarization angle estimation; sparse signal reconstruction; weighted  $\ell_1$ -norm; Zhang penalty

### 1 引言

波达方向 (Direction Of Arrival, DOA) 估计是阵列信号处理领域的核心研究内容之一, 它在智能天线、无线通信、雷达、声呐、电子侦查及地震勘探等领域有着广泛的应用前景<sup>[1]</sup>, 受到了国内外学者的广泛关注, 各种适用于 DOA 估计的算法被相继提出<sup>[2-5]</sup>. 这些算法均基于标量传感器阵列, 它们不能充分利用 EM 信源信号的极化信息.

在无线通信和雷达领域, 极化敏感阵列已被证明可以获得比标量传感器更多的优势<sup>[6,7]</sup>. 鉴于这一事实, 一些适用于 DOA 和极化参数估计的算法也被提出, 包括矢量叉积算法<sup>[8]</sup>, 极化类 ESPRIT 算法<sup>[9-11]</sup>, 极化四元数 MUSIC 算法<sup>[12,13]</sup>, 极化双模 MUSIC 算法<sup>[14]</sup>, 极化 MODE 算法<sup>[15]</sup>等. 上述算法大都基于子空间理论, 由

于理论框架的限制其分辨率性能有限, 且不能充分利用信号的极化信息.

近年来, 稀疏信号重构作为一种新的理论框架逐渐被引入到 DOA 估计领域. 目前已出现的稀疏信号重构类 DOA 估计算法主要包括  $\ell_1$  范数惩罚算法<sup>[16]</sup>、加权  $\ell_1$  范数惩罚算法<sup>[17,18]</sup>、 $\ell_0$  范数逼近算法<sup>[19,20]</sup> 以及迭代加权最小范数算法<sup>[21]</sup>等. 和传统子空间类 DOA 估计算法相比, 稀疏信号重构类算法具有分辨率高、噪声鲁棒性好、无需精确的初始条件等优势. 然而值得注意的是, 现有的稀疏重构类 DOA 估计算法大都存在估计偏的问题<sup>[22]</sup>, 这在一定程度上影响了参数估计性能, 并严重制约其向极化敏感阵列的拓展.

为了充分利用 EM 信号的极化信息并克服现有稀

疏信号重构类 DOA 估计算法存在的共性问题,本文借助 COLD(Concentered Orthogonal Loop and Dipole)阵列,提出了一种新的基于稀疏信号重构的 DOA 和极化角度估计算法.该算法步骤如下:(1)构建累积量矩阵并基于加权  $\ell_1$  范数最小化获得 DOA 估计;(2)通过求和平均运算构建三个特殊的累积量向量,利用 Zhang 惩罚进行稀疏性约束获得极化角度估计;(3)利用估计的极化信息判断是否有两个信源从相同的方向入射到阵列.最后通过仿真实验验证了所提算法的有效性.

## 2 极化远场源模型

考虑  $K$  个完全极化远场窄带信号入射到一个由  $L = 2M + 1$  个 COLD 阵元组成的均匀线阵上.如图 1 所示,其第  $m(m = -M, \dots, M)$  个阵元以间距  $d$  均匀分布在  $y$  轴上.偶极子平行于  $z$  轴,电磁环平行于  $x-y$  平面.椭圆极化方式下的电场输出可表示为

$$\mathbf{E} = E_\theta \boldsymbol{\theta} + E_\phi \boldsymbol{\phi} \quad (1)$$

式(1)中,  $E_\theta$  代表水平分量,  $E_\phi$  代表垂直分量,  $\boldsymbol{\theta}$  和  $\boldsymbol{\phi}$  分别代表沿方位角  $\theta$  和俯仰角  $\phi$  的球面单位向量.对于给定的信号极化,电场分量可进一步表示为

$$E_\theta = E_0 \cos(\gamma), \quad (2)$$

$$E_\phi = E_0 \sin(\gamma) e^{j\eta}$$

式(2)中,  $E_0$  代表非零复信号幅度,  $\gamma \in [0, \pi/2]$  和  $\eta \in [-\pi, \pi]$  分别代表信号的极化角度和极化相位差.

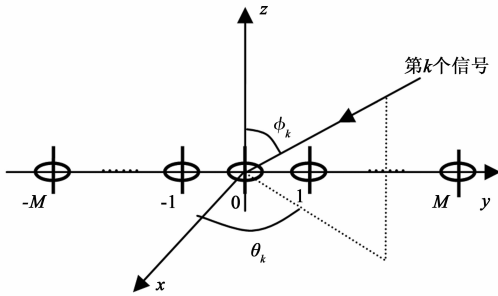


图1 均线线性COLD阵列

基于式(1)和式(2),得到入射信号的电场和磁场分别为

$$\mathbf{E} = E_\theta \boldsymbol{\theta} + E_\phi \boldsymbol{\phi} = E_0 [\cos(\gamma) \boldsymbol{\theta} + \sin(\gamma) e^{j\eta} \boldsymbol{\phi}] \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = E_\phi \boldsymbol{\phi} - E_\theta \boldsymbol{\theta} = E_0 [\cos(\gamma) \boldsymbol{\phi} - \sin(\gamma) e^{j\eta} \boldsymbol{\theta}] \quad (4)$$

为方便且不失一般性,假设天线和入射信号是共面的,即  $\phi = 90^\circ$ ,则式(3)和式(4)可重新表示为

$$\mathbf{E} = E_0 [\cos(\gamma) (-\sin(\theta) \mathbf{x} + \cos(\theta) \mathbf{y}) - \sin(\gamma) e^{j\eta} \mathbf{z}] \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = E_0 [\sin(\gamma) e^{j\eta} (\sin(\theta) \mathbf{x} - \cos(\theta) \mathbf{y}) - \cos(\gamma) \mathbf{z}] \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  和  $\mathbf{z}$  分别代表沿  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向的单位向量.

由于本文采用 COLD 阵列,  $x$  轴和  $y$  轴无分量输出,则第  $m$  个偶极子输出  $u_m^{[l]}(t)$  和电磁环输出  $u_m^{[d]}(t)$  为

$$u_m^{[l]}(t) = - \sum_{k=1}^K s_k(t) \cos(\gamma_k) e^{jm\omega_k} + n_m^{[l]}(t) \quad (7)$$

$$u_m^{[d]}(t) = - \sum_{k=1}^K s_k(t) \sin(\gamma_k) e^{jm\omega_k} + n_m^{[d]}(t) \quad (8)$$

其中,  $s_k(t)$  代表第  $k$  个信源信号,  $n_m^{[l]}(t)$  和  $n_m^{[d]}(t)$  分别代表耦合在第  $m$  个偶极子和电磁环的加性噪声,  $\omega_k = -2\pi d \sin(\theta_k) / \lambda$ ,  $\lambda$  为载波波长.

以第 0 个阵元为相位参考点,阵列输出可表示为

$$\mathbf{u}^{[l]}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}^{[l]}(t) + \mathbf{n}^{[l]}(t) \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^{[d]}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}^{[d]}(t) + \mathbf{n}^{[d]}(t) \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{u}^{[l]}(t) = [u_{-M}^{[l]}(t), u_{-M+1}^{[l]}(t), \dots, u_M^{[l]}(t)]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{u}^{[d]}(t) = [u_{-M}^{[d]}(t), u_{-M+1}^{[d]}(t), \dots, u_M^{[d]}(t)]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{s}^{[l]}(t) = -[s_1(t) \cos(\gamma_1), \dots, s_K(t) \cos(\gamma_K)]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{s}^{[d]}(t) = -[s_1(t) \sin(\gamma_1) e^{j\eta_1}, \dots, s_K(t) \sin(\gamma_K) e^{j\eta_K}]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{n}^{[l]}(t) = [n_{-M}^{[l]}(t), n_{-M+1}^{[l]}(t), \dots, n_M^{[l]}(t)]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{n}^{[d]}(t) = [n_{-M}^{[d]}(t), n_{-M+1}^{[d]}(t), \dots, n_M^{[d]}(t)]^T \quad (16)$$

其中,上标 T 代表转置操作,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$  代表  $L \times K$  的阵列流型矩阵,其第  $k$  列代表第  $k$  个信号的导向矢量

$$\mathbf{a}(\theta_k) = [e^{-jm\omega_k}, \dots, 1, \dots, e^{jm\omega_k}]^T \quad (17)$$

为保证参数估计的唯一性,本文做如下假设:

[A1] 信源信号  $\{s_1(t), \dots, s_K(t)\}$  为窄带、统计独立过程且其四阶累积量非零;

[A2] 噪声分量  $\mathbf{n}^{[l]}(t)$  和  $\mathbf{n}^{[d]}(t)$  为加性统计独立高斯过程,且与信源信号不相关;

[A3] 为避免相位模糊,阵元间距和信源数分别满足  $d \leq \lambda/2$ ,  $K < L$ .

## 3 DOA 和极化角度估计算法

### 3.1 DOA 估计

为抑制高斯噪声并保证估计精度,本文基于阵列输出数据分别构建  $L \times L^3$  的自极化和互极化累积量矩阵,表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1(\bar{m}, \bar{z}) &= \text{cum}\{u_m^{[l]}(t), u_n^{*[l]}(t), u_p^{[l]}(t), u_q^{*[l]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} \cos^4(\gamma_k) e^{jm\omega_k} e^{j(p-n-q)\omega_k} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2(\bar{m}, \bar{z}) &= \text{cum}\{u_m^{[d]}(t), u_n^{*[d]}(t), u_p^{[d]}(t), u_q^{*[d]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} \sin^4(\gamma_k) e^{jm\omega_k} e^{j(p-n-q)\omega_k} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3(\bar{m}, \bar{z}) &= \text{cum}\{u_m^{[l]}(t), u_n^{*[l]}(t), u_p^{[d]}(t), u_q^{*[d]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} \cos^2(\gamma_k) \sin^2(\gamma_k) e^{jm\omega_k} e^{j(p-n-q)\omega_k} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_4(\bar{m}, \bar{z}) &= \text{cum}\{u_m^{[d]}(t), u_n^{*[d]}(t), u_p^{[l]}(t), u_q^{*[l]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} \cos^2(\gamma_k) \sin^2(\gamma_k) e^{jm\omega_k} e^{j(p-n-q)\omega_k} \end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $m, n, p, q \in [-M, M]$ ,  $\bar{m} = m + M + 1$ ,  $\bar{z} = (p + M)L^2 + (q + M)L + n + M + 1$ ,  $c_{4,s_k}$  代表第  $k$  个信号的累积量值, 即  $c_{4,s_k} = \text{cum}\{s_k(t), s_k^*(t), s_k(t), s_k^*(t)\}$ ,  $*$  代表复共轭操作.

为获得更好的估计结果, 定义

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\bar{m}, \bar{z}) &= \mathbf{C}_1(\bar{m}, \bar{z}) + \mathbf{C}_2(\bar{m}, \bar{z}) + \mathbf{C}_3(\bar{m}, \bar{z}) + \mathbf{C}_4(\bar{m}, \bar{z}) \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} e^{jm\omega_k} e^{j(p-n-q)\omega_k} \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)说明信源信号在累积量域已被完全接收, 这直接保证了算法的 DOA 估计精度. 同时由于矩阵  $\mathbf{C}$  只包含信源的 DOA 信息, 因此 DOA 估计性能将不受极化参数的影响.

矩阵  $\mathbf{C}$  的列向量  $\mathbf{c}_{p,q,n}$  可表示为

$$\mathbf{c}_{p,q,n} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) c_{4,s_k} e^{j(p-n-q)\omega_k} = \mathbf{A} \mathbf{s}_{p,q,n} \quad (23)$$

式(23)中,  $\mathbf{s}_{p,q,n}$  代表  $K \times 1$  的向量

$$\mathbf{s}_{p,q,n} = [c_{4,s_1} e^{j(p-n-q)\omega_1}, \dots, c_{4,s_K} e^{j(p-n-q)\omega_K}]^T \quad (24)$$

为在稀疏信号重构框架下进行 DOA 估计, 本文对整个空域进行抽样并形成序列  $\mathbf{Q} = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_N\}$ , 其中  $N \gg K$ . 假定信源均位于  $N$  个网格内, 则可获得式(23)的稀疏表示为

$$\mathbf{c}_{p,q,n} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_{p,q,n} \quad (25)$$

式(25)中,  $\bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}(\bar{\theta}_1), \dots, \mathbf{a}(\bar{\theta}_N)]$  代表过完备基矩阵,  $\mathbf{x}_{p,q,n} = [s_{1,p,q,n}, \dots, s_{N,p,q,n}]^T$  代表  $\mathbf{s}_{p,q,n}$  的稀疏表示且具有  $K$  个非零元素. 由于矩阵  $\mathbf{C}$  与  $\mathbf{c}_{p,q,n}$  拥有相同的稀疏特性, 因此有

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X} \quad (26)$$

式(26)中,  $\mathbf{X}$  是包含所有列向量  $\mathbf{x}_{p,q,n}$  的矩阵. 假定信源数  $K$  已知或已通过 AIC 或 MDL 准则准确估计<sup>[23]</sup>, 则可通过对矩阵  $\mathbf{C}$  进行奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD) 来降低计算复杂度, 得到

$$\mathbf{C}_{SV} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}_{SV} \quad (27)$$

其中,  $\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{V}^H$ ,  $\mathbf{C}_{SV} = \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{D}_K$ ,  $\mathbf{X}_{SV} = \mathbf{X} \mathbf{V} \mathbf{D}_K$ ,  $\mathbf{D}_K = [\mathbf{I}_K, \mathbf{0}]^T$ ,  $\mathbf{I}_K$  代表  $K \times K$  的单位矩阵,  $\mathbf{0}$  代表  $K \times (L^3 - K)$  的零值矩阵. 上标 H 代表共轭转置操作.

令  $\bar{x}_i^{(\zeta)}$  代表  $\mathbf{X}_{SV}$  第  $i$  行的  $\zeta$  范数, 定义  $\bar{\mathbf{x}}^{(\zeta)} = [\bar{x}_1^{(\zeta)}, \dots, \bar{x}_N^{(\zeta)}]^T$ , 则 DOA 估计问题即可转变为如下的  $\zeta_1$  范数最小化问题

$$\min \|\bar{\mathbf{x}}^{(\zeta)}\|_1 \text{ subject to } \mathbf{C}_{SV} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}_{SV} \quad (28)$$

式(28)中,  $\|\cdot\|_1$  代表  $\zeta_1$  范数.

事实上, 在有限的采样快拍下, 只能获得观测模型  $\mathbf{C}_{SV}$  的估计值  $\hat{\mathbf{C}}_{SV}$ . 根据拉格朗日乘子法, 带约束的优化问题(28)可以等效为如下的非约束形式

$$\min \|\hat{\mathbf{C}}_{SV} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}_{SV}\|_F^2 + h \|\bar{\mathbf{x}}^{(\zeta)}\|_1 \quad (29)$$

式(29)中,  $\|\cdot\|_F$  代表 F 范数,  $h$  为权衡稀疏性与估计精度的正则化参数. 优化问题(29)是一个“group LASSO”问题, 然而在统计领域已证明“group LASSO”问题

是一个有偏问题, 它对大系数的惩罚远大于小系数. 因此, 本文采用加权  $\zeta_1$  范数惩罚思想来改善估计精度. 为达到这一目的, 本文通过求和平均运算构建其它四个累积量矩阵, 其第  $(\bar{m}, \bar{z}_1)$  个元素分别表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_5(\bar{m}, \bar{z}_1) &= \frac{1}{L} \sum_{n=-M}^M \text{cum}\{u_m^{[l]}(t), u_n^{*[l]}(t), u_n^{[l]}(t), u_p^{*[l]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} \cos^4(\gamma_k) e^{jm\omega_k} (e^{jp\omega_k})^* \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_6(\bar{m}, \bar{z}_1) &= \frac{1}{L} \sum_{n=-M}^M \text{cum}\{u_m^{[d]}(t), u_n^{*[d]}(t), u_n^{[d]}(t), u_p^{*[d]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} \sin^4(\gamma_k) e^{jm\omega_k} (e^{jp\omega_k})^* \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_7(\bar{m}, \bar{z}_1) &= \frac{1}{L} \sum_{n=-M}^M \text{cum}\{u_m^{[l]}(t), u_n^{*[l]}(t), u_n^{[d]}(t), u_p^{*[d]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} \cos^2(\gamma_k) \sin^2(\gamma_k) e^{jm\omega_k} (e^{jp\omega_k})^* \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_8(\bar{m}, \bar{z}_1) &= \frac{1}{L} \sum_{n=-M}^M \text{cum}\{u_m^{[d]}(t), u_n^{*[d]}(t), u_n^{[l]}(t), u_p^{*[l]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} \sin^2(\gamma_k) \cos^2(\gamma_k) e^{jm\omega_k} (e^{jp\omega_k})^* \end{aligned} \quad (33)$$

其中,  $\bar{m} = m + M + 1$ ,  $\bar{z}_1 = p + M + 1$ .

和获得式(22)类似, 定义

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_w(\bar{m}, \bar{z}_1) &= \mathbf{C}_5(\bar{m}, \bar{z}_1) + \mathbf{C}_6(\bar{m}, \bar{z}_1) + \mathbf{C}_7(\bar{m}, \bar{z}_1) + \mathbf{C}_8(\bar{m}, \bar{z}_1) \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_k} e^{jm\omega_k} (e^{jp\omega_k})^* \end{aligned} \quad (34)$$

式(34)的矩阵形式为

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{A} \mathbf{C}_{4s} \mathbf{A}^H \quad (35)$$

式(35)中,  $\mathbf{C}_{4s} = \text{diag}[c_{4,s_1}, \dots, c_{4,s_K}]$ . 显然地, 在有限的快拍下只能得到  $\mathbf{C}_w$  的估计值  $\hat{\mathbf{C}}_w$ . 令  $\hat{\mathbf{U}}_1$  代表  $\hat{\mathbf{C}}_w$  的  $L \times L$  右奇异值矩阵,  $\hat{\mathbf{U}}_{1,n}$  为  $\hat{\mathbf{U}}_1$  中  $L - K$  个小特征值对应的特征向量矩阵. 则根据子空间理论, 可得权值  $w_i$  为

$$w_i = \mathbf{a}^H(\bar{\theta}_i) \hat{\mathbf{U}}_{1,n} \hat{\mathbf{U}}_{1,n}^H \mathbf{a}(\bar{\theta}_i) \quad (36)$$

如果  $\bar{\theta}_i$  对应于某个信源的 DOA, 则由于信号子空间与噪声子空间的正交性, 权值  $w_i$  为小的系数. 最终 DOA 估计可通过如下加权最小化优化问题获得

$$\min \|\hat{\mathbf{C}}_{SV} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}_{SV}\|_F^2 + h \sum_{i=1}^N w_i |\bar{x}_i^{(\zeta)}| \quad (37)$$

优化问题(37)可直接通过内点法二阶锥规划 (SOCP)<sup>[24]</sup> 进行求解, 其标准形式为

$$\begin{aligned} \min \bar{p} + h \bar{q} \\ \text{s. t. } \quad \|(z_1^T, \dots, z_K^T)\|_2 \leq \bar{p}, \mathbf{w}^T \mathbf{r} \leq \bar{q} \end{aligned} \quad (38)$$

其中  $|\bar{x}_i^{(\zeta)}| \leq r_i, i = 1, \dots, N$

$$z_k = \hat{\mathbf{C}}_{SV}(k) - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}_{SV}(k), k = 1, \dots, K$$

式(38)中,  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_N]^T$ ,  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_N]^T$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_{SV}(k)$  和  $\mathbf{X}_{SV}(k)$  分别为矩阵  $\hat{\mathbf{C}}_{SV}$  和  $\mathbf{X}_{SV}$  的第  $k$  列.

### 3.2 极化角度估计

为获得极化角度估计, 本文构建三个特殊的累积

量向量,分别表示为式(39)~(41).

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1(\bar{m}, 1) &= \frac{2}{(3M+2)(M+1)} \sum_{n=-M}^0 \sum_{p=-M}^{M+n} \\ &\text{cum}\{u_m^{[I]}(t), u_n^{*[I]}(t), u_p^{[I]}(t), u_{p-n}^{*[I]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_1} \cos^4(\gamma_k) e^{jm\omega_k} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2(\bar{m}, 1) &= \frac{2}{(3M+2)(M+1)} \sum_{n=-M}^0 \sum_{p=-M}^{M+n} \\ &\text{cum}\{u_m^{[d]}(t), u_n^{*[d]}(t), u_p^{[d]}(t), u_{p-n}^{*[d]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_1} \sin^4(\gamma_k) e^{jm\omega_k} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_3(\bar{m}, 1) &= \frac{2}{(3M+2)(M+1)} \sum_{n=-M}^0 \sum_{p=-M}^{M+n} \\ &\text{cum}\{u_m^{[I]}(t), u_n^{*[I]}(t), u_p^{[d]}(t), u_{p-n}^{*[d]}(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{4,s_1} \cos^2(\gamma_k) \sin^2(\gamma_k) e^{jm\omega_k} \end{aligned} \quad (41)$$

向量  $\mathbf{c}_1$  到  $\mathbf{c}_3$  的稀疏表示为

$$\mathbf{c}_1 = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_1 \quad (42)$$

$$\mathbf{c}_2 = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_2 \quad (43)$$

$$\mathbf{c}_3 = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_3 \quad (44)$$

其中,  $\mathbf{x}_\kappa$  是  $K$  稀疏向量,  $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ . 如果信源信号  $k$  由  $\bar{\theta}_i$  入射到阵列, 则  $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_3$  的第  $i$  个元素非零且分别等于  $c_{4,s_1} \cos^4(\gamma_k), c_{4,s_1} \sin^4(\gamma_k), c_{4,s_1} \sin^2(\gamma_k) \cos^2(\gamma_k)$ . 显然地, 如果  $\mathbf{x}_\kappa$  被重构出来, 即可以得到极化角度的估计. 为提高估计精度, 克服 LASSO 或直接  $\ell_1$  范数约束重构方法估计偏的问题, 本文利用 Zhang 惩罚<sup>[25]</sup>来逼近  $\ell_0$  函数并相继地获得渐进无偏的极化角度估计. Zhang 惩罚可被看作是两步  $\ell_1$  范数惩罚优化问题, 第一步涉及的是一个 LASSO 问题, 然后根据 LASSO 的输出结果  $\bar{\mathbf{x}}_\kappa$  和用户定义的阈值  $\tau_\kappa$  构建第二步加权  $\ell_1$  范数惩罚优化问题, 即

$$\min \|\hat{\mathbf{c}}_\kappa - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_\kappa\|_2^2 + h \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_\kappa(i)| I(\bar{\mathbf{x}}_\kappa(i) \leq \tau_\kappa) \quad (45)$$

式(45)中,  $\hat{\mathbf{c}}_\kappa$  代表  $\mathbf{c}_\kappa$  的估计结果,  $I(\cdot)$  代表示性函数, 表示为

$$I(a \leq b) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } a \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (46)$$

在算法实施过程中, 阈值  $\tau_\kappa$  必须满足  $0 < \tau < \min\{\bar{\mathbf{x}}_\kappa(\bar{k})\}, \bar{k} \in X_0$ , 以保证 Zhang 惩罚逼近  $\ell_0$  函数的误差趋于 0.  $X_0$  代表  $\bar{\mathbf{x}}_\kappa$  中非零元素位置索引的集合.

如文献[25]所述, Zhang 惩罚可以获得  $\ell_0$  函数的很好逼近, 并且相应的估计器是无偏的, 这意味着本文在样本足够多的条件下可以获得  $\mathbf{x}_\kappa$  的渐进无偏估计. 令  $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$  代表由优化问题(45)获得的最终估计结果, 则极化角度可通过下式获得, 即

$$\hat{\gamma}_k = \frac{[\arctan(\sqrt{\hat{\mathbf{x}}_3(\bar{h})/\hat{\mathbf{x}}_1(\bar{h})}) + \arctan(\sqrt{\hat{\mathbf{x}}_2(\bar{h})/\hat{\mathbf{x}}_3(\bar{h})})]}{2} \quad (47)$$

式(47)中,  $k \in [1, K]$ ,  $\bar{h}$  为  $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$  中非零元素位置的索引. 此外, 根据已估计的  $\hat{\gamma}_k$ , 本文还可以得到信号的累积量估计值, 即

$$\begin{aligned} \hat{c}_{4,s_1} &= [\hat{\mathbf{x}}_1(\bar{h})/\cos^4(\hat{\gamma}_k) + \hat{\mathbf{x}}_2(\bar{h})/\sin^4(\hat{\gamma}_k) \\ &\quad + \hat{\mathbf{x}}_3(\bar{h})/\cos^2(\hat{\gamma}_k) \sin^2(\hat{\gamma}_k)]/3 \end{aligned} \quad (48)$$

**定理 1** 假定信号的累积量值相等, 即  $c_{4,s_1} = c_{4,s_2} = \dots = c_{4,s_K}$ , 定义  $\rho_k = [\mathbf{x}_1(\bar{h})\mathbf{x}_2(\bar{h}) - \mathbf{x}_3^2(\bar{h})]/c_{4,s}^2$ , 若只有一个信源信号由方向  $\theta$  入射到阵列, 则  $\rho_k = 0$ . 如果有两个信源信号由相同的方向  $\theta$  入射到阵列, 而极化角度  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  不同, 则  $1 > \rho_k > 0$ , 并且  $\rho_k$  随着  $\gamma_1 \rightarrow \pi/2, \gamma_2 \rightarrow 0$  或  $\gamma_2 \rightarrow \pi/2, \gamma_1 \rightarrow 0$  而趋于最大值 1.

**证明** 当只有一个信源信号由方向  $\theta$  入射到阵列时, 有

$$\rho_k = \cos^4(\gamma) \sin^4(\gamma) - (\cos^2(\gamma) \sin^2(\gamma))^2 = 0 \quad (49)$$

当有两个信源信号由相同的方向  $\theta$  入射到阵列时, 有式(50).

$$\begin{aligned} \rho_k &= [(\cos^4(\gamma_1) + \cos^4(\gamma_2))(\sin^4(\gamma_1) + \sin^4(\gamma_2)) \\ &\quad - (\cos^2(\gamma_1) \sin^2(\gamma_1) + \cos^2(\gamma_2) \sin^2(\gamma_2))^2] \\ &= \cos^4(\gamma_1) \sin^4(\gamma_2) + \cos^4(\gamma_2) \sin^4(\gamma_1) \\ &\quad - 2\cos^2(\gamma_1) \sin^2(\gamma_1) \cos^2(\gamma_2) \sin^2(\gamma_2) \\ &= (\cos^2(\gamma_1) \sin^2(\gamma_2) - \cos^2(\gamma_2) \sin^2(\gamma_1))^2 \\ &= \sin^2(\gamma_2 + \gamma_1) \sin^2(\gamma_2 - \gamma_1) \end{aligned} \quad (50)$$

由于  $\gamma \in [0, \pi/2)$ , 并且  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  不同, 则  $\gamma_1 + \gamma_2 \in (0, \pi), \gamma_1 - \gamma_2 \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$ , 因此  $1 > \rho_k > 0$ , 并且  $\rho_k$  随着  $\gamma_1 \rightarrow \pi/2, \gamma_2 \rightarrow 0$  或  $\gamma_2 \rightarrow \pi/2, \gamma_1 \rightarrow 0$  而趋于最大值 1. 证毕.

**注 1:** 定理 1 说明当极化角度不同时, 本文所提算法可有效地区分两个入射角度相同的信源信号, 并且区分性能随着  $\gamma_1 \rightarrow \pi/2, \gamma_2 \rightarrow 0$  或  $\gamma_2 \rightarrow \pi/2, \gamma_1 \rightarrow 0$  而变好.

**注 2:** 本文极化参数估计的目的是为了在极化域区分两个入射角度相同的信源信号, 由于在实施过程中只依靠极化角度即可完成区分(见定理 1), 故本文未进行极化相位差的估计.

### 3.3 算法步骤

本文所提算法步骤可总结如下:

**步骤 1** 构建累积量矩阵  $\mathbf{C}, \mathbf{C}_w$  及累积量向量  $\mathbf{c}_\kappa$ ;

**步骤 2** 对矩阵  $\mathbf{C}$  进行奇异值分解(SVD)来降低计算复杂度, 得到  $\mathbf{C}_{sv} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}_{sv}$ ;

**步骤 3** 对矩阵  $\mathbf{C}_w$  进行奇异值分解, 并利用信号子空间与噪声子空间的正交性构建权值矩阵  $\mathbf{w}$ ;

**步骤 4** 基于加权  $\ell_1$  范数最小化方法和 SOCP 获得 DOA 估计;

**步骤 5** 借鉴 Zhang 惩罚思想, 在 LASSO 估计初值的基础上, 利用式(45)进行稀疏信号重构获得极化角度估计;

**步骤 6** 通过  $\rho_k$  的值判断是否有两个信源信号由相同的方向入射到阵列。

事实上,除算法本身外,正则化参数  $h$  同样严重影响算法的估计性能. 大的  $h$  会将非零元素压缩为零而导致错误的估计,小的  $h$  又会产生许多伪峰. 本文通过大量仿真实验得出:在  $0 \sim 15\text{dB}$  SNR 下, $h = 1$  是一个很好的选择. 而在低 SNR 下,为选择合理的正则化参数  $h$ ,则采用统计中一种较为成熟的基于后验选取的参数选择方法,即留一交叉验证来确定  $h$ <sup>[26]</sup>. 将  $\hat{\mathbf{c}}_k$  均分为  $L$  份,包含训练序列和验证序列. 对于每个序列  $g = 1, 2, \dots, L$ ,用参数  $h$  去匹配剩下的  $L - 1$  个序列. 给定  $\hat{\mathbf{x}}_{k,g}$  后计算第  $g$  个部分的预测误差,最终得到交叉验证误差为

$$e(h) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^3 \sum_{g=1}^L \|\hat{\mathbf{c}}_k^g - \bar{\mathbf{A}}^g \hat{\mathbf{x}}_{k,g}(h)\|_2^2 \quad (51)$$

式(51)中, $\hat{\mathbf{c}}_k^g$  和  $\bar{\mathbf{A}}^g$  分别代表  $\hat{\mathbf{c}}_k$  和  $\bar{\mathbf{A}}$  的第  $g$  个部分. 在 1 附近以一定的步长选择不同的  $h$  值进行验证,并选定使  $e(h)$  最小的  $h$  值作为最终的正则化参数值.

## 4 仿真与分析

本章通过仿真实验验证所提算法的性能,并与交叉偶极子阵下最具代表性的 ESPRIT 算法和 COLD 阵下的 MUSIC 算法以及 MODE 算法进行比较. 仿真中采用由 7 个阵元组成的均匀线阵,阵元间距  $d = \lambda/2$ ,入射信号功率相等,建模为  $e^{j\zeta}$ ,其中相位  $\zeta$ ,均匀分布在  $[0, 2\pi]$ . 除实验 3 外,噪声均假定为高斯白噪声. 以  $1^\circ$  间隔先对  $-90^\circ$  到  $90^\circ$  的空间进行粗网格划分,进而在估计出的角度周围逐步细化网格. DOA 估计的均方根误差 (RMSE) 通过 500 次独立的 Monte Carlo 仿真实验获得,定义为

$$e_{\text{rmse}} = \sqrt{\frac{1}{500K} \sum_{c=1}^{500} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{k,c} - \theta_k)^2} \quad (52)$$

式(52)中, $K$  为信源个数, $\hat{\theta}_{k,c}$  为第  $c$  次实验获得的 DOA 估计值.

### 实验 1 角度分辨率性能比较

为展示本文所提算法的角度分辨率性能,考虑两个空间间隔很近的信源信号入射情况,入射角度分别为  $\theta_1 = 25^\circ, \theta_2 = 30^\circ$ ,相对应的极化参数  $(\gamma, \eta)$  分别为  $(20^\circ, 0^\circ)$  和  $(60^\circ, 0^\circ)$ . SNR = 5dB,快拍数为 500 条件下的空间谱输出如图 2(a) 所示,可以看到本文所提算法和 MUSIC 算法均能分辨两个信源信号. 然而当把 SNR 降为 -5dB 时,如图 2(b) 所示,只有本文所提算法仍能很好地区分两个信源信号,而 MUSIC 算法则模糊了两个信号的谱峰. 这说明本文所提算法具有更高的分辨率特性.

### 实验 2 高斯白噪声下角度估计性能比较

考虑两个窄带不相关信源 DOA 估计情况,入射角

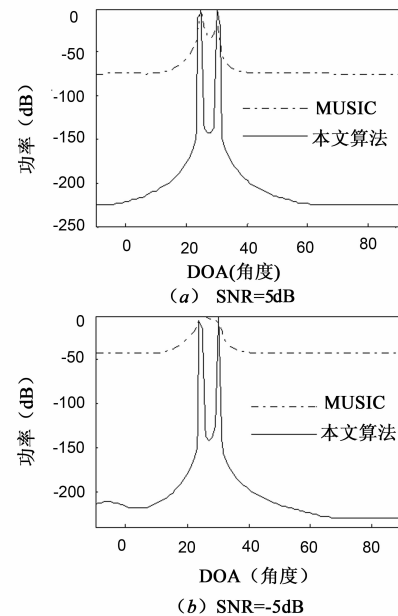


图2 不同SNR下的空间谱输出

度分别为  $\theta_1 = -10^\circ, \theta_2 = 30^\circ$ ,相对应的极化参数与实验 1 相同. DOA 估计均方根误差随 SNR 和快拍数的变化关系分别如图 3(a) 和图 3(b) 所示. 可以看出,本文所提算法的 DOA 估计性能虽然略低于 MODE 算法,但在整个 SNR 和采用快拍数域全面优于 ESPRIT 算法. 同时需要说明的是,MODE 算法需要一个较好的初始估计才能保证全局最优性,而本文所提算法由于基于凸优化理论框架,无需较好的初始条件.

### 实验 3 高斯色噪声下角度估计性能分析

除背景噪声假定为高斯色噪声外,其它实验条件与实验 2 相同. 噪声协方差矩阵  $\mathbf{N}$  的第  $(i_1, i_2)$  个元素为

$$\mathbf{N}(i_1, i_2) = \sigma_n^2 \mathbf{0}. 9^{(i_1 - i_2)} e^{j\pi(i_1 - i_2)/16} \quad (53)$$

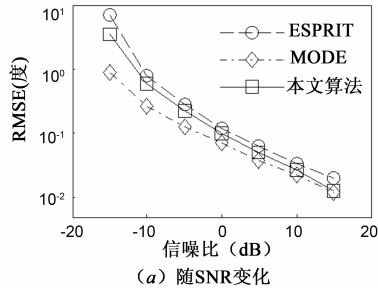
其中, $\sigma_n^2$  为噪声功率. DOA 估计均方根误差随 SNR 和快拍数的变化关系分别如图 4(a) 和图 4(b) 所示. 可以看出,在高斯色噪声背景下,ESPRIT 算法和 MODE 算法由于不能有效地区分信号子空间和噪声子空间而使估计性能明显下降. 作为对比,本文算法则保持了较好的估计性能.

### 实验 4 两种特殊入射情况下的估计结果

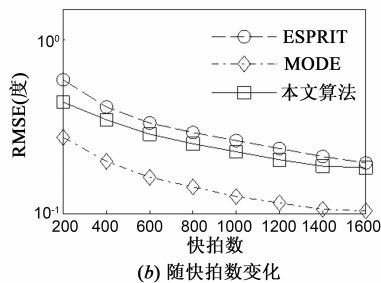
考虑两种特殊的信源信号入射情况,即(1)入射角度不同,极化参数相同;(2)入射角度相同,极化角度不同. SNR = 10dB,快拍数为 1000 下 10 次独立的仿真结果分别如图 5(a) 和图 5(b) 所示. 图 5(a) 中三个信源的入射角度分别为  $\theta_1 = -10^\circ, \theta_2 = 30^\circ, \theta_3 = 45^\circ$ ,极化参数  $(\gamma, \eta)$  均为  $(30^\circ, 0^\circ)$ ,可以看出信号入射角度不同时本文算法不仅可以很容易地区分三个信源信号,而且

可以获得很好的极化角度估计. 图 5(b) 中三个信源的入射角度分别为  $\theta_1 = -10^\circ, \theta_2 = 30^\circ, \theta_3 = 30^\circ$ , 相对应的极化参数  $(\gamma, \eta)$  为  $(30^\circ, 0^\circ), (45^\circ, 0^\circ)$  和  $(0^\circ, 0^\circ)$ . 可以看出, 虽然图 5(b) 中只出现了两个信源位置信息, 但我

们发现  $\rho_1 \ll \rho_2 = 0.2480$ , 这说明在极化角度不同时, 即便两个信源的入射角度一致, 所提算法仍能有效地区分它们. 换句话说, 本文算法可以更好的利用极化信息, 这是其它算法无法比拟的.

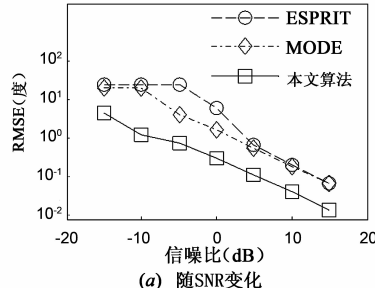


(a) 随SNR变化

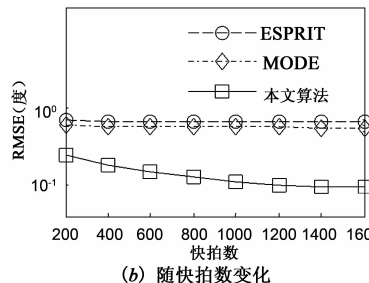


(b) 随快拍数变化

图3 白噪声下DOA估计的RMSE随SNR和快拍数的变化

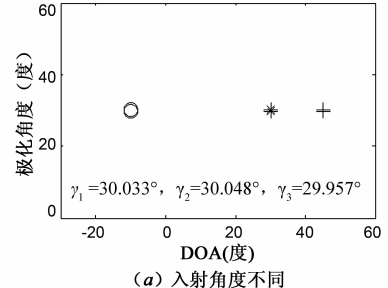


(a) 随SNR变化

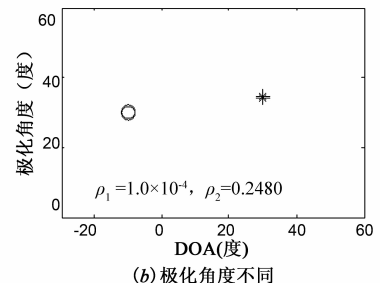


(b) 随快拍数变化

图4 色噪声下DOA估计的RMSE随SNR和快拍数的变化



(a) 入射角度不同



(b) 极化角度不同

图5 信源入射角度或极化角度不同时的估计结果

## 5 结论

本文在稀疏信号重构理论框架下提出了一种新的DOA和极化角度估计算法. 该算法在累积量域构建稀疏表示模型, 并分别基于加权  $\ell_1$  范数最小化和 Zhang 惩罚策略实现高斯白/色噪声下的DOA和极化角度估计. 借助估计的极化角度信息, 该算法还可以有效区分两个入射角度一样的信源信号. 计算机仿真实验验证了所提算法的有效性, 并展示了其在分辨率、色噪声下估计精度等方面的优势.

## 参考文献

[1] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94.

[2] Yaqoob M A, Mannesson A, Bemhardsson B, et al. On the performance of random antenna arrays for direction of arrival estimation[A]. Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC) [C]. USA: IEEE Press, 2014. 193-199.

[3] Qian C, Huang L, So H C. Improved unitary root-MUSIC for DOA estimation based on pseudo-noise resampling[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(2): 140-144.

[4] Xi N, Li L. A computationally efficient subspace algorithm for 2-D DOA estimation with L-shaped array[J]. IEEE

Signal Processing Letters, 2014, 21(8): 971-974.

[5] Gou X, Liu Z, Xu Y. Biquaternion cumulant-MUSIC for DOA estimation of noncircular signals[J]. Signal Processing, 2013, 93(4): 874-881.

[6] Manikas A, Ng J W. Cross-dipole arrays for asynchronous DS-CDMA systems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(1): 122-131.

[7] Giuli D. Polarization diversity in radars[J]. Proceedings of the IEEE, 1986, 74(2): 245-269.

[8] Nehorai N, Paldi E. Vector-sensor array processing for electro-magnetic source localization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(2): 376-398.

[9] Li J, Compton Jr R T. Angle and polarization estimation using ESPRIT with a polarization sensitive array[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(9): 1376-1383.

[10] Lin C, Fang W, Yang W, et al. SPS-ESPRIT for joint DOA and polarization estimation with a COLD array[A]. Proceedings of the IEEE International Symposium on Antennas and Propagation [C]. USA: IEEE Press, 2007. 1136-1139.

[11] 齐子森, 郭英, 姬伟峰, 等. 锥面共形阵列天线盲极化DOA估计算法[J]. 电子学报, 2009, 37(9): 1919-1925.

Qi Zi-sen, Guo Ying, Ji Wei-feng, et al. Blind DOA estimation algorithm for conical conformal array antenna with

- respect to polarization diversity[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(9): 1919 – 1925. (in Chinese)
- [12] Miron S, Le B N, Mars J I. Quaternion-MUSIC for vector-sensor array processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(4): 1218 – 1229.
- [13] Le B N, Maron S, Mars J I. MUSIC algorithm for vector-sensors array using biquaternions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(9): 4523 – 4533.
- [14] 龚晓峰, 等. 电磁矢量传感器阵列信号波达方向估计: 双模 MUSIC[J]. 电子学报, 2008, 36(9): 1698 – 1703.  
Gong Xiao-feng, et al. Direction-finding with electromagnetic vector-sensor array: dual-mode MUSIC [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(9): 1698 – 1703. (in Chinese)
- [15] Li J, Stoica P, Zheng D. Efficient direction and polarization estimation with a COLD array[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, 44(4): 539 – 547.
- [16] Malioutov D, et al. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3010 – 3022.
- [17] Xu X, Wei X H, Ye Z F. DOA estimation based on sparse signal recovery utilizing weighted  $\ell_1$ -norm penalty[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(3): 155 – 158.
- [18] 田野, 孙晓颖, 秦宇楠. 基于两步加权  $L_1$  范数约束的高分辨率波达方向和功率估计[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(7): 1637 – 1641.  
Tian Ye, Sun Xiao-ying, Qin Yu-di. High-resolution direction-of-arrival and power estimation using two-stage weighted  $L_1$  penalty[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(7): 1637 – 1641. (in Chinese)
- [19] Hyder M M, Mahata K. Direction-of-arrival estimation using a mixed  $\ell_{2,0}$  norm approximation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(9): 4646 – 4655.
- [20] Tian Y, et al. DOA and power estimation using a sparse representation of second-order statistics vector and  $\ell_{2,0}$ -norm approximation[J]. Signal Processing, 2014, 105: 98 – 108.
- [21] Gorodnitsky I F, Rao B D. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: A re-weighted minimum norm algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(3): 600 – 616.
- [22] Gasso G, Rakotomamonjy A, Canu S. Recovering sparse signals with a certain family of non-convex penalties and DC programming[J]. IEEE Transactions on signal processing, 2009, 57(12): 4686 – 4698.
- [23] Wax M, Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985, 33(2): 387 – 392.
- [24] Nemirovski A, Ben T A. Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms and Engineering Applications[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 2001.
- [25] Zhang T. Some sharp performance bounds for least squares regression with  $\ell_1$  regularization[J]. Annals of Statistics, 2009, 37(5A): 2109 – 2144.
- [26] Shao J. Linear model selection by cross-validation[J]. Journal of the American Statistical Association, 1993, 88(422): 486 – 494.

#### 作者简介



田野 男, 1985 年 12 月生于河北省平泉县, 2014 年于吉林大学通信与信息系统专业获得博士学位, 现为燕山大学信息科学与工程学院讲师, 主要研究方向为阵列信号处理、稀疏信号重构等。

E-mail: tianye@ysu.edu.cn



练秋生 男, 1969 年 8 月生于江西遂川, 工学博士, 现为燕山大学信息科学与工程学院教授、博士生导师, 主要研究方向为稀疏表示、压缩感知等。

E-mail: lianqs@ysu.edu.cn



徐鹤 女, 1989 年 12 月生于辽宁省丹东市, 2013 年于吉林大学通信与信息系统专业获硕士学位, 主要研究方向为阵列信号处理、空间谱估计等。

E-mail: xuhebest@sina.com