

基于径向基-Galerkin 解的反馈粒子滤波器

张宏欣,周穗华,冯士民

(海军工程大学兵器工程系,湖北武汉 430033)

摘 要: 反馈粒子滤波器(FPF)是一种连续时间最优贝叶斯估计器.针对 FPF 对系统采样率要求较高的问题,提出一种基于径向基函数-Galerkin 法求解的反馈粒子滤波器.该算法推导了反馈增益势函数所满足偏微分方程的弱形式,结合径向基函数对势函数进行近似,利用 Galerkin 法和蒙特卡罗积分得到了反馈增益近似解,并给出了一种径向基参数选取方法,从数值上分析了径向基函数参数选取对于滤波精度的影响.仿真算例表明反馈粒子滤波器在低系统采样率下会严重发散,而本文算法能够避免这一问题,且提高了 FPF 在低系统采样率下的滤波精度和稳定性.

关键词: 非线性滤波;贝叶斯滤波;反馈粒子滤波器;Galerkin 法;径向基函数

中图分类号: TP202 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)01-0095-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.01.014

Feedback Particle Filter Using Radial Basis Functions Based Galerkin Method

ZHANG Hong-xin, ZHOU Sui-hua, FENG Shi-min

(Department of Weapon Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei 430033, China)

Abstract: A radial basis function(RBF) Galerkin solution based feedback particle filter is proposed to resolve the divergency problem existing in present particle filter when the continuity of system model is violated. A weak formulation of the PDE regarding to the potential of feedback gain is firstly derived, then the RBFs are employed to approximate the potential function. Finally the feedback gain solution is obtained using Galerkin method and Monte Carlo integral, also the method for choosing RBF parameters is provided and analyzed numerically. It is demonstrated that the present FPF diverges under low system sample rate, whereas our proposed feedback particle filter is nevertheless effective, with preferable tracking accuracy and stability under low system sample rate.

Key words: nonlinear filtering; Bayesian filtering; feedback particle filter(FPF); Galerkin method; radial basis functions(RBF)

1 引言

粒子滤波是一类基于递推贝叶斯法则,利用样本统计量对系统状态进行估计的方法.在处理非高斯非线性系统的参数/状态滤波问题方面具有独特的优势,已被广泛应用于目标跟踪、通信信号处理以及计算机视觉等领域^[1,2].

一般针对粒子滤波算法研究主要基于文献[3]中提出的自举滤波(Bootstrap Filter)框架,即序贯建议分布采样(SIS)或建议分布采样-重采样(SIR),若建议分布产生的样本中不能足量覆盖后验分布样本,则容易导致粒子贫化.针对贫化问题已有大量改进算法^[4-8],主要针对重采样改进或(和)建议分布改进.重采样改进,如马尔科夫蒙特卡洛(MCMC)采样、辅助粒子滤波(APF)、正则化粒子滤波(RPF)等,目的在于从建议样

本中更准确的抽取后验样本,并未从根本上克服贫化问题;建议分布改进,如无迹卡尔曼-粒子滤波(UKF-PF)、容积卡尔曼-粒子滤波(CKF-PF)及混合粒子滤波(MPF)等,目的是构造更接近后验概率密度的建议分布,这类改进方法对于不同系统模型的性能差异较大,难以达到贝叶斯意义下的最优估计.

根据以上研究发现,传统粒子滤波及其改进算法的主要问题在于建议分布难于构造,以及重采样方法在多维空间难于抽样^[5].反馈粒子滤波器^[9-13](Feedback Particle Filter, FPF)是一种连续时间最优贝叶斯估计器.通过对先验样本构造反馈,采用 Kullback-Leibler 散度(KLD)来度量反馈后概率分布与真实后验分布之间的差异,将最小化 KLD 等效为欧拉-拉格朗日边值题求解反馈增益,使得由先验样本能够直接得出后验样本,从而不需要再构造建议分布和进行重采样过程.

由于 FPF 在连续时间条件下导出,本身需要较小的采样间隔(≤ 0.05)来保证其精度,而现有算法在求解过程中采用了常数反馈增益近似,这种方法在不合适的采样间隔条件下将产生误差累积,导致精度下降甚至滤波发散,针对此问题,本文提出一种能适用于较大采样间隔的 FPF 算法.利用径向基函数^[14](Radial Basis Function, RBF)良好的多维非线性函数拟合能力近似反馈增益的势函数,结合稳定性较好的 Galerkin 法^[15-19],且 Galerkin 法基于积分形式,因此利用 Monte Carlo 积分即可以较小的计算代价将问题转化为矩阵方程.相比常数反馈近似,RBF-Galerkin 解提高了反馈增益近似精度,避免了常数反馈近似在较大采样间隔下的误差累积,放宽了 FPF 算法对采样间隔的要求,具有较高的滤波精度和较好的稳定性.

2 反馈粒子滤波器

考虑如下连续时间非线性滤波问题:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = f(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{v}_{t-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^d$ 为 d 维状态矢量, $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^m$ 为 m 维观测矢量; 函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{v}_t \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统噪声和观测噪声,均服从互不相关的零均值高斯分布,协方差矩阵分别为 $E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T] = \mathbf{Q}$, $E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T] = \mathbf{R}$. 函数 h 的第 j 个分量为函数 h_j , $h_j: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $j=1,2,\dots,m$.

非线性滤波的目的是根据历史观测估计出状态 \mathbf{x}_t 的后验分布.连续时间条件下的后验分布 p^* 定义为,对于任意 \mathbb{R}^d 空间上的可测集 A ,有

$$\int_{\mathbf{x} \in A} p^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \text{Prob}(\mathbf{x} \in A | Z_t) \quad (3)$$

其中 Z_t 为历史观测的 σ 域,即 $Z_t := \sigma(Z_s; s \leq t)$.

令 $dt \approx \Delta t$, 此时后验分布 p^* 可写为离散时间的递推贝叶斯形式:

$$p^*(\mathbf{x}_t) = \frac{p_{y_t|x_t}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p_x(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{0:t-\Delta t})}{p_y(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{0:t-\Delta t})} \quad (4)$$

其中 $p_{y_t|x_t}$ 为似然函数, p_y 为与状态无关的归一化常数. p_x 为状态先验分布.在离散时间条件下,对先验粒子叠加反馈, t 时刻加入反馈后的粒子为:

$$\mathbf{x}_t^{i*} = \mathbf{x}_t^i + \mathbf{K}_t(\mathbf{x}_t^i) \mathbf{I}_t(\mathbf{x}_t^i), \mathbf{x}_t^i \sim p_x(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{0:t-\Delta t}) \quad (5)$$

其中 $\mathbf{K}_t: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ 为反馈增益函数, $\mathbf{K} = \{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_m\}$, $\mathbf{K}_j: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$; \mathbf{I}_t 为更新项 (Innovation Term), $i=1, 2, \dots, N$, N 为粒子个数,

$$\mathbf{I}_t(\mathbf{x}_t^i) = \mathbf{y}_t - \frac{1}{2}(h(\mathbf{x}_t^i) + \bar{h}) \quad (6)$$

其中, $\bar{h} = E[h(\mathbf{x}_t) | \mathbf{y}_{0:t-\Delta t}]$, 设 t 时刻叠加反馈后状态分

布为 $p(\mathbf{x}_t)$, 贝叶斯意义下, 最优增益函数为:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{K}} D(p \| p^*) \quad (7)$$

其中, D 为 p 与真实后验分布 p^* 的 K-L 信息散度:

$$D(p \| p^*) = \int_{\mathbb{R}^d} p(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{p(\mathbf{x})}{p^*(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} \quad (8)$$

式(8)是一个变分问题,可以导出^[11],当 $\Delta t \rightarrow 0$,若 $p(\mathbf{x}, 0) = p^*(\mathbf{x}, 0)$, 则 $p(\mathbf{x}, t) = p^*(\mathbf{x}, t)$, $t > 0$. 函数 $C_j(\mathbf{x}, t): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是满足如下偏微分方程(PDE)的解,

$$\nabla \cdot (p(\mathbf{x}, t) C_j(\mathbf{x}, t)) = -(h_j(\mathbf{x}) - \bar{h}_j) p(\mathbf{x}, t), \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

则最优反馈函数的每个元素为:

$$[\mathbf{K}]_{ls}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^m C_{lj}(\mathbf{x}, t) [\mathbf{R}^{-1}]_{js} = C(\mathbf{x}, t) \mathbf{R}^{-1} \quad (10)$$

其中 $C_{lj}(\mathbf{x}, t)$ 为 $C_j(\mathbf{x}, t)$ 的第 l 个元素, 函数矩阵 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = \{C_1(\mathbf{x}, t), C_2(\mathbf{x}, t), \dots, C_m(\mathbf{x}, t)\}$.

叠加反馈后的粒子的连续时间系统方程为:

$$\frac{d\mathbf{x}_t^i}{dt} = f(\mathbf{x}_t^i) + \mathbf{v}_t^i + \mathbf{K}_t(\mathbf{x}_t^i) \mathbf{I}_t^i(\mathbf{x}_t^i) \quad (11)$$

式(9~11)称为反馈式粒子滤波器(FPF).

3 反馈增益的 RBF-Galerkin 解

由前述可知, FPF 算法的关键在于求解 PDE(9). RBF 求解 PDE 常用的是配点法^[14](Collocation Methods), 即选取分别满足边界条件和 PDE 解的一组点直接代入 PDE 求解; 而对于本文中的二阶时变 PDE, 配点法会使得(1)系数矩阵条件数过大; (2)需要拟合出概率分布 $p(\mathbf{x}, t)$. 这均会导致求解过程中的数值不稳定. Galerkin 法基于双线性形式, 其系数矩阵是数值稳定的. 综合考虑 RBF 的拟合能力和 Galerkin 法的稳定性, 本节导出反馈增益的 RBF-Galerkin 解.

3.1 Galerkin 弱形式的导出

记 $p = p(\mathbf{x}, t)$, $C_j = C_j(\mathbf{x}, t)$, $h_j = h_j(\mathbf{x})$. 假设函数 C_j 代表的场是无旋的, 即 $\nabla \times C_j = \mathbf{0}$, 则存在势函数 $\varphi_j(\mathbf{x}, t)$ 使得 $C_j = \nabla \varphi_j$, 结合式(9)可得:

$$\nabla \cdot (p \nabla \varphi_j) = -(h_j - \bar{h}_j) p \quad (12)$$

记 $L^2(\mathbb{R}^d; p)$ 为 \mathbb{R}^d 中对概率密度 $p(\cdot, t)$ 平方可积的函数构成的希尔伯特空间; $H^k(\mathbb{R}^d; p)$ 为 \mathbb{R}^d 上 k 阶导数在 $L^2(\mathbb{R}^d; p)$ 中的函数构成的希尔伯特空间. 若存在 $\varphi_j \in H^1(\mathbb{R}^d; p)$, 使得对于任意 $H^1(\mathbb{R}^d; p)$ 中的函数 $\psi(\mathbf{x}, t): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (p \nabla \varphi_j) \psi = - \int_{\mathbb{R}^d} (h_j - \bar{h}_j) p \psi \quad (13)$$

式(13)为式(9)的弱形式, $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ 称为试函数. 式(13)左端可展开为:

$$\int_x \nabla \cdot (p \nabla \varphi_j) \psi = \int_x \nabla p \cdot \nabla \varphi_j \psi + \int_x p \nabla^2 \varphi_j \psi \quad (14)$$

对式(14)右端第一项利用高维分部积分可得:

$$\int_x \nabla p \cdot \nabla \varphi_j \psi = \int_{\Gamma} p \psi \nabla \varphi_j \mathbf{d}\mathbf{n} - \int_x p \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi_j) \quad (15)$$

其中 Γ 为积分边界,假设边界上的积分为 0,将式(15)代入式(14)得:

$$\int_x \nabla \cdot (p \nabla \varphi_j) \psi = \int_x p \nabla \varphi_j \cdot \nabla \psi \quad (16)$$

则(13)可重写为:

$$\int_x p \nabla \varphi_j \cdot \nabla \psi = \int_x (h_j - \bar{h}_j) p \psi \quad (17)$$

式(17)称为 PDE(12)在 $H^1(\mathbb{R}^d; p)$ 上的 Galerkin 弱形式, Galerkin 法的目的即是求解 $\varphi_j \in H^1(\mathbb{R}^d; p)$, 使得对任意 $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d; p)$ 满足式(17). 将式(17)写为期望形式如下:

$$\mathbb{E}[\nabla \varphi_j \cdot \nabla \psi] = \mathbb{E}[(h_j - \bar{h}_j) \psi] \quad (18)$$

文献[13]中给出的常数近似增益定义为:

$$C_j^* = \arg \min_{b_j \in \mathbb{R}^+} \mathbb{E}[\|\nabla \varphi_j - b_j\|] \quad (19)$$

可得 $C_j^* = \mathbb{E}[\nabla \varphi_j]$. 这可由在式(18)中令试函数 $\psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_i$ 得到,由此可知,常数反馈增益是以均值来近似精确解的.

3.2 增益解的 RBF-Galerkin 近似

RBF 为一组在 \mathbb{R}^d 中径向对称的标量值函数,为了在由 RBF 张成的子空间 $V_n \subset H^1(\mathbb{R}^d; p)$ 中逼近目标函数,将增益函数的势近似为 RBF 的线性组合,略去与求解无关的变量下标,则:

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^L \lambda_j \theta_\varepsilon(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|) \quad (20)$$

其中, $\theta_\varepsilon(\cdot)$ 为 RBF, $\{\mathbf{c}_j\}_{j=1}^L \in \mathbb{R}^d$ 为 RBF 的中心点, $\lambda_j, j=1, 2, \dots, L$ 为 RBF 下待求解的坐标, ε 为形参数,由于 Galerkin 法求解要求 $\theta_\varepsilon(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}^d; p)$. 因此选择高斯型径向函数,

$$\theta_\varepsilon(\cdot) = e^{-\varepsilon^2(\cdot)^2} \quad (21)$$

若要在 V_n 中近似 φ_j ,则需对任意试函数 $\psi \in V_n$ 满足式(18),为此试函数选择为 RBF 的任意线性组合:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^L a_i \theta_\varepsilon(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) \quad (22)$$

其中 $a_j, j=1, 2, \dots, L$ 为任一组不为零的常数,记 $\theta_\varepsilon(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|) = \theta_\varepsilon^j, \theta_\varepsilon(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) = \theta_\varepsilon^i$,并将式(22)和(20)代入(18),得到

$$\sum_{i=1}^L a_i \sum_{j=1}^L \lambda_j \mathbb{E}[\nabla \theta_\varepsilon^j \cdot \nabla \theta_\varepsilon^i] = \sum_{i=1}^L a_i \mathbb{E}[(h_i - \bar{h}_i) \theta_\varepsilon^i] \quad (23)$$

消去 a_i ,式(23)可转化为关于 λ 的线性方程组 $\mathbf{A}\lambda = \mathbf{b}$,

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \mathbb{E}[\nabla \theta_\varepsilon^j \cdot \nabla \theta_\varepsilon^i] \quad (24)$$

$$[\mathbf{b}]_i = \mathbb{E}[(h_i - \bar{h}_i) \theta_\varepsilon^i]$$

此时系数矩阵 \mathbf{A} 是对称的. 进一步利用 Monte-Carlo 积分,式(24)可以由粒子闭合地得出,

$$[\mathbf{A}]_{ij} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nabla \theta_\varepsilon(\|\mathbf{x}_i^k - \mathbf{c}_i\|) \cdot \nabla \theta_\varepsilon(\|\mathbf{x}_i^k - \mathbf{c}_j\|)$$

$$[\mathbf{b}]_i \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (h(\mathbf{x}_i^k) - \bar{h}) \theta_\varepsilon(\|\mathbf{x}_i^k - \mathbf{c}_i\|) \quad (25)$$

由上式可解出 λ ,并注意到 $C_j = \nabla \varphi_j$,可对每个粒子求得 RBF-Galerkin 反馈增益近似解:

$$C_j(\mathbf{x}_i^t) = \sum_{j=1}^L \lambda_j \nabla \theta_\varepsilon(\|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{c}_j\|) \quad (26)$$

3.3 RBF 参数选择

RBF-Galerkin 方法需要选择的参数为基函数个数 L ,形参数 ε 以及中心点 $\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_L\}$. 目前关于 ε 和 \mathbf{c}_j 的选择已有广泛研究,文献[18]中采用贪心算法给出了一种最优的 \mathbf{c}_j 选择方法,但计算量较大,不适合滤波求解. 而对于基中心点的选择,一方面需使其位于增益解较大的区域^[19],此时形参数 ε 的选择可以放宽;另一方面由于滤波算法执行必须基于离散化模型,在高维和低采样率条件下,FPF 算法必须在较小的区域进行求解,初始状态误差需取得较小,否则会出现严重发散,此时解是足够平滑的,这要求基中心点靠近积分边界,在此条件下,RBF 应足够“平”,即参数 ε 需取很小的值以保证求解稳定性. 对于基个数,较大的 L 会使得系数矩阵条件数过大,数值上不稳定;过小则会使精度下降甚至滤波发散.

滤波问题通常希望参数能够在每个时刻通过样本统计特性确定,综上,本文选择基中心点为,

$$\mathbf{c}_i = \bar{\mathbf{x}}_i + (\sqrt{(d+\kappa)\mathbf{P}_i})_i \quad (27)$$

其中, $\bar{\mathbf{x}}_i = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{x}_i p(\mathbf{x}_i) \mathbf{d}\mathbf{x}_i$ 为状态均值, $\mathbf{P}_i = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i)^T]$ 为状态误差矩阵; $(\sqrt{(\cdot)})_i$ 为矩阵 Cholesky 分解^[20]的第 i 列, κ 为一个可调节的尺度参数,该参数决定了 RBF 远离求解区域的程度. 此时,基函数个数 $L = d$.

对于形参数,采用与文献[19]中类似的选取方法,引入无量纲的 Mahalanobis 距离,选取形参数

$$\varepsilon = \alpha / r_{\text{avg}}$$

$$r_{\text{avg}} = \mathbb{E}_{i,j} \left[\sqrt{(\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_j^t)^T \mathbf{P}_t^{-1} (\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_j^t)} \right] \quad (28)$$

其中 r_{avg} 为状态粒子的平均 Mahalanobis 距离, α 为尺度因子,该参数决定了 RBF 的平滑程度.

RBF 相关参数选择将在数值仿真部分中进一步分析. 需要指出,RBF 参数与具体问题模型有关,目前仍未有确定的通用方法.

4 结果及分析

本节通过对一个非线性目标运动模型^[13]进行仿真实验,对比分析 FPF 算法和本文算法的滤波性能. 该模型描述目标以恒定角速度做平面螺旋运动, 状态矢量 $\mathbf{x}_t = [x_t, y_t]^T \in \mathbb{R}^2$ 为 t 时刻目标的平面直角坐标, 目标状态满足如下随机微分方程,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_t}{dt} &= -\mathbf{y}_t + f_1(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_{t,1} \\ \frac{d\mathbf{y}_t}{dt} &= \mathbf{x}_t + f_2(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_{t,2} \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $v_{t,1}, v_{t,2}$ 为相互独立的状态噪声分量, 且 $v_{t,i} \sim N(0, \sigma_v^2), i=1, 2, \sigma_v$ 为状态噪声标准差;

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}_t) &= \lambda \frac{\mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}_t\|_2} - \Theta \frac{\mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}_t\|_2} 1_{(\rho, \infty)}(\|\mathbf{x}_t\|_2) \\ f_2(\mathbf{x}_t) &= \lambda \frac{\mathbf{y}_t}{\|\mathbf{x}_t\|_2} - \Theta \frac{\mathbf{y}_t}{\|\mathbf{x}_t\|_2} 1_{(\rho, \infty)}(\|\mathbf{x}_t\|_2) \end{aligned} \quad (30)$$

其中, λ, Θ 和 ρ 为实值参量; $1_{(\rho, \infty)}(\cdot)$ 为指示函数

$$1_{(\rho, \infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\rho, \infty) \\ 0, & x \notin (\rho, \infty) \end{cases} \quad (31)$$

观测模型为

$$Y_t = \arctan\left(\frac{y_t}{x_t}\right) + w_t, \quad (32)$$

其中, $w_t \sim N(0, \sigma_w^2 dt), \sigma_w$ 为观测噪声标准差.

仿真初始条件为 $\mathbf{x}_0 = [0.5, -0.5]^T$; 模型参数 $\lambda = 2, \Theta = 50, \rho = 9$. 状态初始分布为 $p_0 = N([0, 0]^T, 4^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}), \sigma_v = 0.1, \sigma_w = 0.27$, 粒子数为 100. 仿真时间 T 为 15s. RBF 参数为 $\alpha = 0.0006, \kappa = 20$.

图 1 为 $\Delta t = 0.06$ 时, 目标轨迹与两种算法一次跟踪轨迹对比, 可见, FPF 算法在该采样间隔下出现了偏差; 而本文算法则能够准确地跟踪目标轨迹.

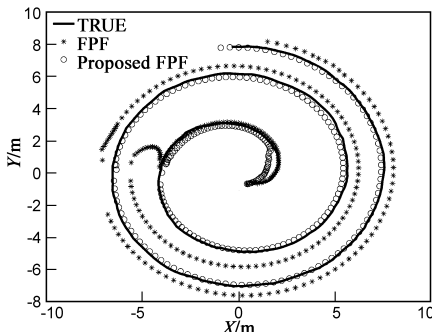


图1 FPF算法与本文算法一次跟踪轨迹对比

为分析 FPF 算法和本文算法在不同采样间隔下的滤波性能, 在相同初始条件下 Δt 分别取 0.04, 0.06, 0.08, 0.1 时对两种算法进行 100 次 Monte

Carlo 计算, 按下式统计状态估计的均方根误差 (RMSE),

$$\text{RMSE} = \sqrt{\Delta t / T \sum_{k=1}^{T/\Delta t} \|\mathbf{x}_{k\Delta t} - \hat{\mathbf{x}}_{k\Delta t}\|^2} \quad (33)$$

对比结果如图 2(a) ~ (d) 所示, 图中横坐标为 Monte Carlo 仿真序号, 纵坐标为 RMSE. 由图中可以看出, 随着 Δt 增大, FPF 算法由于误差累积产生了较大的估计误差, 逐渐出现了滤波发散现象, $\Delta t = 0.1$ 时, FPF 算法在大部分实验中严重发散, 在第 63 次和 76 次仿真实验中出现了超过 20m 的 RMSE 值(出于整体直观考虑未在图中示出), 而本文算法在不同采样间隔条件下的 RMSE 是稳定的, 且在所有实验中都保持了较小的估计误差.

图 3(a) ~ (b) 分别给出了 $\Delta t = 0.05$ 条件下, 两种算法叠加反馈后粒子的归一化似然函数值. 从图中可看出, 约在 10.5s 之后, FPF 反馈后的粒子的似然函数值均接近于 0, 这表明在一定观测噪声方差条件下, 由于常数反馈增益解的不精确性, 使得反馈后的部分粒子仍位于低值似然区域, 在逐步迭代的过程中引起了误差累积, 导致在某一时刻全部粒子均位于似然区域之外; 而本文算法反馈后的粒子在全仿真时间内都具有较高似然值, 表明 RBF-Galerkin 反馈增益解精度高于常数增益解.

表 1 中给出了不同采样间隔条件下两种算法 100 次 Monte Carlo 计算的 RMSE 均值和方差. 从表中数据可知, 采样间隔越大, FPF 的滤波精度和稳定性越差, 在较大采样间隔时均出现了严重发散; 而本文算法在不同采样间隔条件下都保持了较高的滤波精度和稳定性, 且两者均较大幅度优于 FPF 算法. 同时可以看到, 采样间隔越小, 两种算法的滤波精度差异越小, 且均能取得较高的滤波精度. 由此可见: (1) 反馈增益函数所满足的 PDE 是在连续时间条件下导出的, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, PDE(9) 本身是精确的, 在此条件下, 常数增益近似产生的反馈误差并不会导致误差累积; (2) 作为滤波问题“最优”准则的最小均方误差 (MMSE) 等同于贝叶斯方法中的后验均值估计, 若反馈增益能使得粒子“移动”到显著似然区域, 则此时反馈增益解的不精确对滤波解精度的影响是较小的^[21]. (3) 在采样间隔较小时, 精确求解 PDE(9) 能够避免误差累积.

表 1 中同时给出了各个采样间隔条件下两种算法的平均计算时间, 该时间在 MATLAB R2011b (7.13.0.564) 仿真软件和 2.5GHz 双核计算机环境下测得. 可知本文算法对采样时间的放宽和精度的提高是以增加计算量为代价的. 与经典 FPF 算法相比, 需要计算出 Galerkin 系数矩阵, 因此其时间复杂度要一定程度地高于经典 FPF 算法.

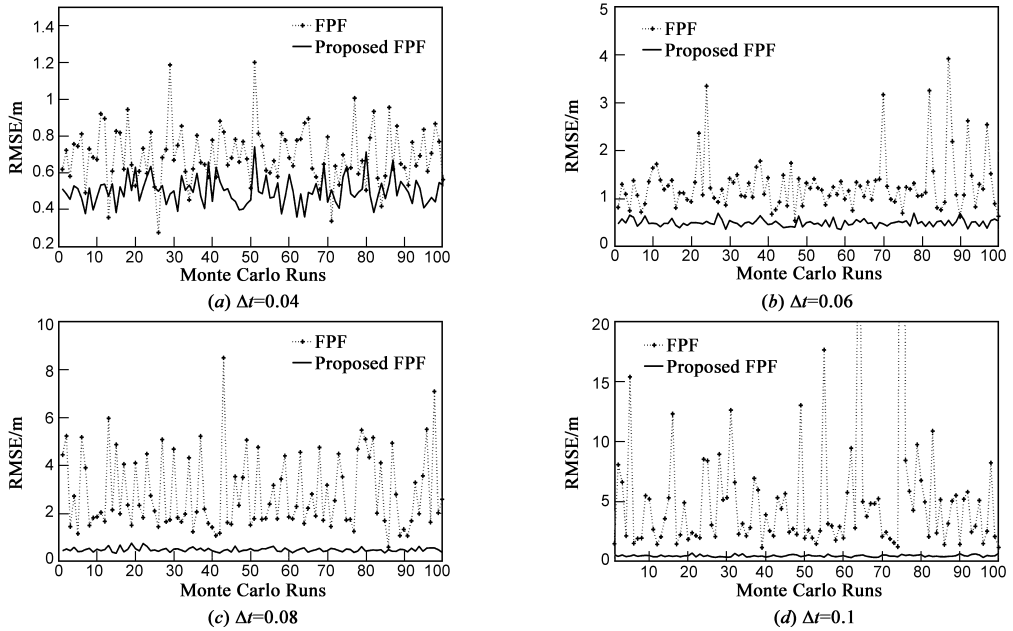


图2 不同采样间隔条件下RMSE的Monte Carlo计算结果

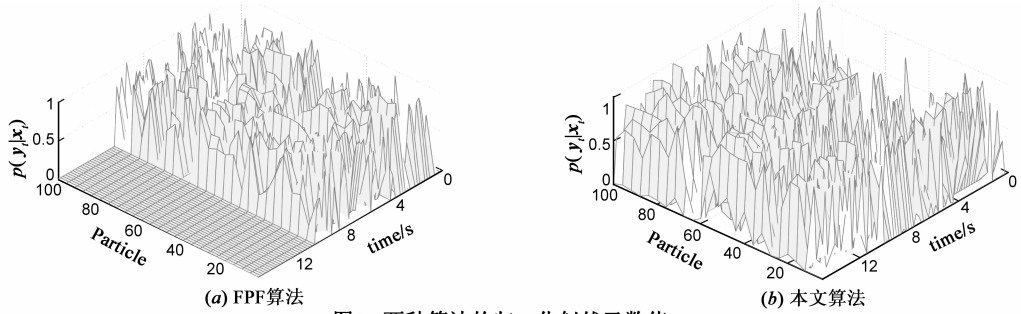


图3 两种算法的归一化似然函数值

表 1 100 次 Monte Carlo 计算结果:RMSE 均值,方差及计算时间

	均值 (m)		方差 (m ²)		计算时间 (s)	
	FPF	本文算法	FPF	本文算法	FPF	本文算法
$\Delta t = 0.2$	380	0.814	3830000	0.063	0.091	0.145
$\Delta t = 0.1$	5.27	0.483	53.9	0.009	0.181	0.285
$\Delta t = 0.08$	2.90	0.462	2.86	0.006	0.241	0.378
$\Delta t = 0.06$	1.25	0.469	0.156	0.005	0.293	0.479
$\Delta t = 0.04$	0.693	0.501	0.024	0.005	0.443	0.707
$\Delta t = 0.02$	0.466	0.318	0.041	0.006	0.877	1.42
$\Delta t = 0.01$	0.291	0.234	0.02	0.005	1.76	2.85

为分析不同 RBF 参数设置对滤波精度的影响,取 $\Delta t = 0.06$,取 α 和 κ 为在一定范围内的变化值,对于每个参数取值进行 100 次 Monte Carlo 计算,得到每个参数取值条件下的 RMSE 均值如图 4 所示,从图中可看出,当 κ 值较小(20)时,在 0.002 ~ 0.0004 的 α 值范围内均能取得较高的滤波精度,但在 α 值进一步减小时,较小的 κ 值会导致滤波结果不稳定;而随着 κ 值增大和 α 减小,可取得较平稳且精度较高的结果;图中同时

给出了 FPF 算法独立于参数取值进行 100 次 Monte Carlo 计算结果,可以看出在较大参数范围内,本文算法均能取得高于 FPF 算法的滤波精度。

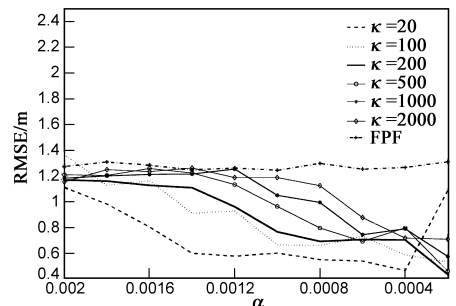


图4 不同RBF参数对滤波精度的影响

5 总结

针对反馈粒子滤波器中常数反馈增益近似方法在较大采样率下滤波发散的问题,本文通过径向基函数拟合反馈增益的势函数,结合 Galerkin 法和 Monte Carlo

积分推导了反馈增益的 RBF-Galerkin 解,给出了一种径向基函数参数选取方法,得出了一种适用于较大采样间隔的 FPF 算法,仿真结果表明算法精度较高,稳定性好,复杂度适中,同时也表明:(1)本文算法的反馈增益精度高于常数近似方法,能显著提高 FPF 算法在低系统采样率下的滤波性能,放宽了 FPF 算法对于采样间隔要求;(2)系统采样率较低时,精确求解反馈增益函数能够避免误差累积导致滤波发散;(3)对于滤波问题,RBF 参数与问题模型、状态噪声、观测噪声以及初始条件都有关,如何完全自适应的选取最优 RBF 参数是一个十分复杂的问题,这是需要进一步研究的问题。

参考文献

- [1] Djuric P M, Kotecha J H, Zhang J Q. Particle filtering[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 20(5): 19-38.
- [2] Micheal I, Andrew B. Conditional density propagation for visual tracking[J]. International Journal of Computer Vision, 1998, 29(1): 5-28.
- [3] Gordon J. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[A]. IEEE Proceedings on Sensor Fusion[C]. IEEE, 1993. 107-113.
- [4] Zhe Chen. Bayesian filtering: from Kalman filters to particle filters[J]. Statistics, 2003, 182(1): 1-69.
- [5] Arulampalam M S, Simon M, Neil G. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.
- [6] Fred D. Nonlinear filters; beyond Kalman filter[J]. IEEE Aerospace and Electronic System Magazine, 2005, 43(8): 57-69.
- [7] Rudolph M. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models[D]. Oregon: Oregon Health & Science University, 2004. 251-256.
- [8] Yardim C, Michalopoulou Z H, Gerstoft P. An overview of sequential Bayesian filtering in ocean acoustics[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2011, 36(1): 71-89.
- [9] Tao Y, Mehta P G, Meyn S P. Feedback particle filter with mean-field coupling[A]. IEEE 50th Conference on Decision and Control[C]. Florida: IEEE, 2011. 7909-7916.
- [10] Tao Y, Mehta P G, Meyn S P. A mean-field control-oriented approach to particle filtering[A]. American Control Conference[C]. San Francisco, 2011. 2037-2043.
- [11] Tao Y, Richard S, Sean M, et al. Multivariable feedback particle filter[A]. IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control[C]. Florida: IEEE, 2012. 4063-4070.
- [12] Tao Y, Mehta P G, Meyn S P. Feedback particle filter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(10): 2037-2043.
- [13] Tilton A. A comparative study of nonlinear filtering techniques[A]. IEEE 16th International Conference on Information Fusion[C]. Istanbul: IEEE, 2013. 1827-1834.
- [14] Larsson E. A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2003, 46(1): 891-902.
- [15] Zienkiewicz C. The Finite Element Method for Solid and Structure Mechanics[M]. Oxford: Elsevier Press, 2005. 17-25.
- [16] Chen J S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(2): 435-466.
- [17] Wenland H. Meshless Galerkin methods using RBFs[J]. Mathematics of Computation, 1999, 68(228): 1521-1531.
- [18] Ling L, Schaback R. An improved subspace selection algorithm for meshless collocation methods[J]. International Journal of Numerical Methods Engineering, 2009, 80: 1623-1639.
- [19] Katharina K, Elisabeth L. A Galerkin radial basis function method for the Schrodinger equation[J]. SIAM Journal of Scientific Computations, 2013, 35(6): 2832-2855.
- [20] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: Springer-清华大学出版社, 2005. 225-227.
Zhang XianDa. Matrix Analysis and Application[M]. Beijing: Springer-Tsinghua University Press, 2005. 225-227. (in Chinese)
- [21] Daum F. Coulomb's law particle flow for nonlinear filter[A]. Proceedings of SPIE on Signal Processing and Sensor Fusion[C]. San Diego: SPIE, 2011. 3351-3362.

作者简介



张宏欣 男, 1987 年 12 月出生, 陕西汉中
人. 2010 年毕业于西安理工大学, 现为海军工程
大学博士生, 从事统计信号处理及目标跟踪
相关研究.



周穗华 男, 1962 年 10 月出生, 广东五华
人, 1984 年毕业于海军工程学院, 1990 年在海军
工程学院获得博士学位. 现为海军工程大学教
授, 从事军用目标特性信息处理及武器系统总
体设计方面研究.