

# 卫星联合定轨的参数化融合模型

赵德勇<sup>1,2</sup>,王正明<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学数学与系统科学系,湖南长沙 410073;2. 军械工程学院管理工程系,河北石家庄 050003)

**摘 要:** 针对基于双星定位系统的近地卫星的多星高精度联合定轨问题,首先建立了不同轨道高度的卫星动力学的物理参数模型与基于稀疏参数表示和时间序列分析的数学模型相结合的轨道动力学高精度表示模型,然后建立了基于测量系统误差参数建模和模型误差非参数分量表示相结合的非线性半参数联合观测模型,在此基础上建立了联合定轨的参数化融合模型,设计了联合定轨参数化融合模型的非线性半参数联合估计算法.理论分析和仿真计算结果表明,卫星轨道动力学模型的高精度表示方法能够进一步提高动力学模型的表示精度,非线性半参数联合观测模型优化建模方法能够进一步细化观测模型,而基于此设计的参数化融合模型的联合估计算法能够使最终的卫星联合定轨精度得到较大程度的改善.

**关键词:** 联合定轨;参数化融合模型;稀疏参数模型;非线性半参数联合估计算法

**中图分类号:** TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 12-2344-07

## Satellite Combined Orbit Determination Parameterized Fusion Model

ZHAO De-Yong, WANG Zheng-Ming

(1. Department of Mathematics and System Science, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China;

2. Department of Management Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang, Hebei 050003, China)

**Abstract:** Firstly, high precision denotation model of satellite orbit dynamics based on physics parameter model and mathematics model which associates sparse parameter representation with time sequence analysis, nonlinear semi-parametric combined observation model based on system error parameters modeling and non-parametric component denotation of model error, and combined orbit determination (COD) parameterized fusion model are established aiming at multi-satellite high precision COD based on bi-satellite positioning system and low earth orbit (LEO). Then parameters estimation algorithms of the former two kinds of models and the combined estimation algorithm of parameterized fusion model are designed. Theoretic analysis and simulated computation results show that the high precision denotation method of sparse parameters model and the optimized modeling method of observation model considering model error can improve modeling precision, and combined estimation algorithm of parameterized fusion model can synchronously ameliorate orbit determination precision ulteriorly.

**Key words:** combined orbit determination; parameterized fusion model; sparse parameter model; nonlinear semi-parametric combined estimation algorithm

## 1 引言

联合定轨,是指对于天基测量系统或具有星间链路的星座,联合星间测量和星地测量,通过统一融合处理,同时估计两颗或两颗以上航天器轨道参数的过程<sup>[1]</sup>,精确的运动模型、可靠的观测模型和合理的估计方法是获得高精度联合定轨结果的三个基本要素.现有联合定轨技术的研究继承了卫星精密定轨的传统研究方法,即寻求动力学模型的精确模制和待估参数的准确估计,而对于物理模型或参数不能完全确定的摄动力部分,则采用

经验处理手段对动力学建模误差进行补偿或修正,如引进每圈一次的经验加速度或求解随机过程的简化动力学方法来吸收动力学模型误差<sup>[2,3]</sup>,但大大增加了待估参数和计算量,且容易导致联合定轨模型病态.对于观测模型的构建,现有方法建立的是一种数据处理的紧致融合模型<sup>[4]</sup>,即这种模型只能刻画数据处理模型的主要部分,而对于模型误差或可以与真实信号分离的混合误差的建模则无能为力<sup>[5]</sup>.对于参数估计方法,受动力学模型和观测模型建模手段的局限,现有方法本质上是一种基于最小二乘估计或其改进型的线性化处理算法<sup>[6]</sup>,

收稿日期:2007-07-17;修回日期:2008-07-30

基金项目:国家自然科学基金(No. 60604020);航天支撑基金(No. 2006-HT-GFKD-02)

对影响联合定轨精度的非线性影响因素的考虑则相对较少<sup>[7]</sup>。综合可知,现阶段对联合定轨建模方法与估计算法的研究与“精确的运动模型、可靠的观测模型和合理的估计方法”的要求还有一定的差距。

本文以基于双星定位系统的近地卫星的联合定轨作为研究背景,通过对卫星轨道摄动特征的深入分析,提出一种基于稀疏参数表示和时间序列分析相结合的卫星轨道动力学模型的高精度表示方法;通过对观测模型误差性态和联合定轨非线性影响因素的分析,提出一种参数建模和非参数分量表示相结合的模型误差建模方法,建立非线性半参数的联合观测模型;在此基础上建立联合定轨的参数化融合模型,设计参数估计和非参数估计相结合的非线性半参数联合估计算法。

## 2 联合定轨的参数化融合模型

基于双星定位系统的近地卫星联合定轨原理可用下列数学模型简要描述<sup>[6,8]</sup>：

$$\begin{cases} Y = G(X, t) + \epsilon \\ \dot{X} = F(X, t) \end{cases} \quad (1)$$

其中： $X = (X_{B1}, X_{B2}, X_U)^T$  表示双星  $B_1$ 、 $B_2$  和近地卫星  $U$  的位置速度状态向量及待估动力学参数， $Y$  表示实际观测向量， $G$  表示计算观测向量， $\epsilon$  表示观测噪声， $F$  表示卫星单位质量上的作用力。本节将通过动力学模型和观测模型的精确化建模，建立联合定轨参数化融合模型。

### 2.1 卫星轨道动力学的高精度表示模型

在惯性坐标系中，基于牛顿第二定律的卫星运动微分方程为<sup>[9]</sup>：

$$\begin{aligned} \dot{X} = F(X, t) = & \vec{f}_{TB} + \vec{f}_{NB} + \vec{f}_{NS} + \vec{f}_{TD} + \vec{f}_{RL} + \vec{f}_{SR} \\ & + \vec{f}_{AL} + \vec{f}_{DG} + \vec{f}_{TH} \end{aligned} \quad (2)$$

通过对不同类型卫星轨道摄动大小量级的分析，近地卫星主要考虑二体作用力、 $J_{20}$ 项地球非球形引力、大气阻力、日月引力以及太阳光压的物理模型，而双星则

主要考虑二体作用力、 $J_4$ 项地球非球形引力、日月引力以及太阳光压的物理模型，其余难以精确建模的部分考虑构建其数学表示模型。下图 1 中上图列出了某近地卫星  $U$  只考虑精确物理模型建模所得轨道和“真实轨道”之间两天的轨道摄动位置偏差，中图则列出了通过某种信号特征提取方式（本文采用基于 Symlets 小波分解方式）所得到的轨道摄动偏差信号的主要趋势项，而下图则是轨道摄动位置偏差信号与其主要趋势项之间的残差图。

根据对轨道摄动作用力和两类卫星轨道摄动偏差、残差图以及摄动偏差信号的小波分解结果可以看出：

(1) 在高精度的联合定轨建模中，轨道摄动偏差不能忽略，由于其具有较强周期性规律（一般为低频信号），可以考虑通过信号稀疏参数表示方法对其精确拟合。

(2) 近地卫星轨道摄动残差信号变化具有较强的随机性（一般为高频信号），可以将其作为随机噪声，考虑通过时间序列分析方法对其进行统计特性分析。

(3) 双星轨道摄动趋势项特征提取后的残差信号相对于原偏差信号来说很小（一般低四个以上数量级），可以不考虑残差信号的建模问题。

根据上面提出的轨道摄动建模思想，基于物理模型和数学模型相结合的卫星轨道动力学模型的高精度表示方法可统一表达成如下模型：

$$\dot{X} = F(X, t) = F_0 + F_S + e_F \quad (3)$$

其中： $F_0$  表示能够精确建模的作用力，如二体引力和低阶非球形摄动力等； $F_S$  表示轨道摄动作用力，主要包括模型准确但参数不能精确确定以及模型和参数均不能准确确定的卫星摄动力，拟通过稀疏表示方法建立其轨道摄动的稀疏参数模型； $e_F$  表示轨道摄动噪声，拟通过时间序列分析建立其时间序列模型。

### 2.2 轨道摄动偏差的稀疏参数模型

假设在惯性坐标系下，轨道摄动作用力  $F_S$  所产生的摄动偏差信号用  $X_{F_S}$  表示，则在传统信号表示框架下有<sup>[10]</sup>

$$X_{F_S} = \sum_r \phi_r \quad (4)$$

其中： $\phi_r \in R^N(r)$ ，为指标集， $D = \{\phi_r, r\}$ ， $r(r)$  为表示系数，这里称  $\phi_r$  为原子，相应地将称  $D$  为字典。字典  $D$  确定时，轨道摄动信号  $X_{F_S}$  稀疏表示问题即为求解稀疏表示系数  $r$ ，用数学语言表述即为  $(P_0)$  问题：

$$\begin{aligned} (P_0 - \text{noise}) \min \quad & \|X_{F_S} - D \cdot z\|_2 + \lambda \|z\|_1 \\ \text{满足} \quad & X_{F_S} = D \cdot z \end{aligned} \quad (5)$$

其中： $X_{F_S}$  为含噪摄动信号 ( $\|z\|_2 \leq 2$ )， $\lambda = 0$

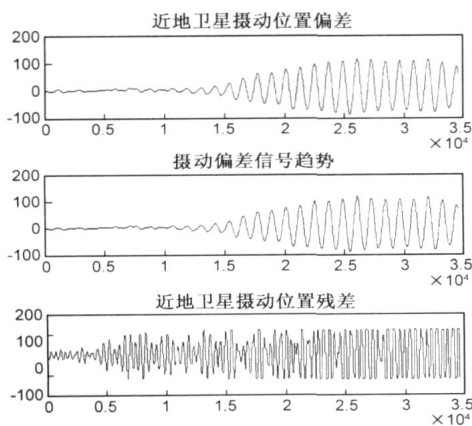


图1 近地卫星U轨道摄动位置偏差及残差图

$\#\{r: r \neq 0, r \in \mathbb{R}\}$  表示  $\mathbb{R}^n$  中非零成分的个数, 正则化参数  $\lambda$  控制着允许误差与稀疏性之间的平衡. 求解该  $(P_0 - \text{noise})$  问题是非常困难的, Donoho 研究小组开展了一系列关于  $(P_0)$  问题与  $(P_1)$  问题的等价性研究, 指出如果  $(P_0)$  问题的唯一解满足一定的稀疏性条件, 求解  $(P_1)$  问题等价于求解  $(P_0)$  问题<sup>[11,12]</sup>. 对于卫星动力学轨道摄动的含噪问题, 在满足稀疏性条件下, 卫星轨道摄动偏差信号  $X_{F_3}$  的稀疏参数模型(5)则可进一步表示为:

$$(P_1 - \text{noise}) \min_{\|x\|_1} \text{满足 } \|X_{F_3} - D x\|_2^2 \quad (6)$$

根据 Lagrange 乘数法, 以上稀疏参数模型可归结为求解以下优化问题:

$$\arg \min \left[ \frac{1}{2} \|X_{F_3} - D x\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \right] \quad (7)$$

### 2.3 轨道摄动残差的时间序列模型

假设在惯性坐标系下, 轨道摄动作用力  $e_F$  产生卫星位置、速度分量用  $X_{e_F}$  表示, 由于  $X_{e_F}$  可采用时间序列建模方法对其统计特性进行分析, 其残差序列  $\{X_{e_F}; e_i\}$  可用自回归滑动平均  $ARMA(p, q)$  模型很好地表示:  $e_i = \alpha_1 e_{i-1} + \dots + \alpha_p e_{i-p} + \epsilon_i - \beta_1 \epsilon_{i-1} - \dots - \beta_q \epsilon_{i-q}$ , 其中  $\forall t, E\epsilon_t = 0$ , 且  $E\epsilon_t \epsilon_{t-k} = 0 (\forall k > 0)$ . 在实际数据处理中, 对于序列  $E_1, E_2, \dots, E_N$ , 其自协方差函数  $r_k$ 、自相关函数  $\hat{r}_k$  以及偏相关函数  $\hat{c}_{kk}(k=1)$  的估计为:

$$\begin{cases} \hat{r}_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} E_i \cdot E_{i+k}, k=0, 1, \dots, N-1 \\ \hat{r}_k = \frac{\hat{r}_k}{\hat{r}_0}, j=1, 2, \dots, k \\ \hat{c}_{11} = 1, \hat{c}_{k+1, j} = \hat{c}_{k, j} - \hat{c}_{k+1, k+1} \cdot \hat{c}_{k, k+1-j} \\ \hat{c}_{k+1, k+1} = (\hat{c}_{k+1, j=1} - \hat{c}_{k+1-j, k, j}) (1 - \hat{c}_{j=1} \cdot \hat{c}_{k, j})^{-1} \end{cases} \quad (8)$$

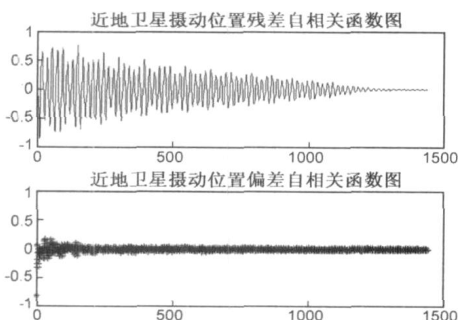


图2 近地卫星U轨道摄位置残差的自相关函数与偏相关函数

上图2给出了图1中基于 symmlet 小波分解尺度  $M=8$  下所得近地卫星  $U$  轨道摄动残差的自相关函数及偏相关函数图. 由于其自相关函数  $\hat{r}_k$  具有拖尾性, 而偏相关函数  $\hat{c}_{kk}$  具有截尾性, 因此近地卫星轨道摄动残差

序列可以用低阶 AR 模型很好地表示. 关于模型定阶, 其 AIC 准则是根据下面定义的量

$$AIC(k) = \log \hat{\sigma}^2(k) + \frac{2k}{N}, k=0, 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

其中:  $\hat{\sigma}^2(k)$  为对摄动残差数据  $AR(k)$  拟合时  $\hat{\sigma}^2$  的估计,  $P$  表示真值阶数  $p$  的某一公共上界, 最终的阶数一般将  $AIC(k)$  的最小值所对应的  $\hat{p}$  作为  $p$  的估计. 由图2中残差信号偏相关函数的低次截尾性, 令  $p=5$  寻找阶数不超过5的 AR 模型的  $AIC(k)$  的最小值, 计算结果如下表1. 从表中可以看出, 当  $p=3$  时模型的 AIC 值最小, 因此该近地卫星  $U$  轨道摄动位置残差是一个  $AR(3)$  模型, 这与图2中计算得到的其偏相关函数的三步截尾性是一致的.

表1 不同阶数下的 AR 模型参数比对

参数	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
AIC 值	- 2.5284	- 3.8999	- 3.9287	- 3.873	- 3.7878
$\hat{\sigma}^2$ 值	0.0796	0.0201	0.0195	0.0206	0.0224

### 2.4 联合定轨参数化融合模型

在基于天地基测量信息的卫星联合定轨数据处理中, 除了可建模的测量系统误差和随机误差外, 往往还存在其他非线性影响因素导致的模型误差, 如观测数据的有色噪声、截断误差等. 半参数回归模型的发展<sup>[13]</sup>, 为我们研究模型误差提供了一种全新的思路, 即由于非线性影响因素的存在, 导致模型误差性态的复杂性和奇异特征的多样性, 难以用基于基函数的少量参数表达, 而引入参数过多往往会导致法方程系数矩阵病态甚至亏秩, 因此考虑给每个观测方程增加一个待定量, 即非参数分量, 进而建立联合定轨的非线性半参数回归模型. 基于系统误差参数建模的联合定轨观测模型的矩阵形式为<sup>[6,8]</sup>:

$$Y = G(X_0) + g(a) + \epsilon \quad (10)$$

其中:  $Y$  表示观测值,  $X_0$  表示待估轨道初值,  $a$  表示待估系统误差系数. 考虑存在于观测值中的模型误差向量  $s$ , 对于双星定位系统的两个距离和测量通道, 其非线性半参数联合观测模型可表示为:

$$\begin{cases} Y_1 = S_1(X_0) + g_1(a_1) + s_1 + \epsilon_1 \\ Y_2 = S_2(X_0) + g_2(a_2) + s_2 + \epsilon_2 \end{cases} \quad (11)$$

模型(11)待估参数中既含有轨道参数, 又包括部分系统误差参数, 与经典半参数回归模型的参数内涵并不完全一致, 因此称为广义的非线性半参数联合观测模型.

本质上讲, 参数化融合技术是指通过对测量信息的参数化建模和融合处理, 提高测量数据处理精度和可靠性的一种信息处理技术, 而基于参数化融合的卫星联合定轨则是卫星轨道动力学的稀疏参数模型和跟踪测量

系统的参数化模型所提供信息的融合处理过程. 综合通过卫星轨道摄动的稀疏参数建模和时间序列分析得到的卫星轨道动力学高精度表示模型, 以及通过模型误差建模得到的非线性半参数联合观测模型, 经典的联合定轨模型(1)便可以扩展为如下的联合定轨参数化融合模型:

$$\begin{cases} Y_1 = S_1(X_0) + g_1(a_1) + s_1 + \dots \\ Y_2 = S_2(X_0) + g_2(a_2) + s_2 + \dots \\ \dot{X}_{B1} = F_{01}(X_{B1}, t) + F_{S1}(X_{B1}, t), & X_{B1}(t_0) = X_{B1}^0 \\ \dot{X}_{B2} = F_{02}(X_{B2}, t) + F_{S2}(X_{B2}, t), & X_{B2}(t_0) = X_{B2}^0 \\ \dot{X}_U = F_{0U}(X_U, t) + F_{SU}(X_U, t) + e_{FU}(X_U, t), & X_U(t_0) = X_U^0 \end{cases} \quad (12)$$

### 3 参数化融合模型的联合估计算法

#### 3.1 基于小波分解的加权迭代稀疏参数估计方法

对于卫星轨道摄动偏差信号, 基于多分辨小波分析可以将分解到子空间  $V_0, W_0, W_1, \dots, W_{j-1}$ , 中, 这里下标  $0 \sim j-1$  对应于从低频到高频不同的分辨空间. 给定尺度函数  $\phi(t)$  和小波函数  $\psi(t)$ , 卫星轨道摄动偏差信号  $X_{F_s}$  可以唯一分解为(以二尺度小波变换为例):

$$\begin{aligned} X_{F_s} &= g_j(t) + g_{j-1}(t) + g_{j-2}(t) + f_{j-2}(t) \\ &= \sum_l d_{j-1,l} \psi_{j-1,l}(t) + \sum_l d_{j-2,l} \psi_{j-2,l}(t) \\ &\quad + \sum_l d_{j-2,l} \psi_{j-2,l}(t) + \sum_l c_{j-2,l} \phi_{j-2,l}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

在二尺度小波变换下, 对于第  $j$  子空间有:  $(2^j)^{1/2+}$ , 则:  $\psi_{j-1} / \psi_{j-2} = (2)^{1/2+}$ , 设  $\lambda_0$  为子空间  $V_0$  的惩罚系数, 对于子空间有如下关系<sup>[14]</sup>:  $\lambda_j = (\lambda_0)^{j+1} \cdot \lambda_0$ . 定义一个具有可分性的稀疏性度量函数:  $\lambda_j = \sum_{i=0}^k (\lambda_0)^{j+1} \cdot \lambda_0$ . 基于小波分解, 此时我们可以将优化问题式(7)修改为如下形式:

$$\arg \min \left[ \frac{1}{2} \left\| X_{F_s} - \sum_{j=0}^k \lambda_j \right\|_2^2 + \sum_{j=0}^k \lambda_j \right] \quad (14)$$

优化问题式(14)的矩阵表达式为:  $\arg \min (1/2) \cdot$

$X_{F_s} - D \sum_{j=0}^k \lambda_j \text{diag}\{ \lambda_0 \}$ , 其中:  $\text{diag}\{ \lambda_0 \}$  为对角加权矩阵. 基于小波分解的加权迭代法是在迭代过程中假定  $\lambda_0$  保持固定, 记  $W(\lambda_0) = \text{diag}\{ \lambda_0 \}$ , 令  $J(\lambda_0) = (1/2) \cdot (X_{F_s} - D)^T (X_{F_s} - D) + \sum_{j=0}^k \lambda_j$ , 则  $\nabla J(\lambda_0) = (D^T D + 2 \cdot W(\lambda_0)) \cdot D^T X_{F_s}$ , 于是当  $\lambda_0 > 0$  和  $D^T D > 0$  时, 对以上优化问题可用近似的牛顿迭代法求解. 由  $\nabla J(\lambda_0) = 0$  可得,  $(D^T D + 2 \cdot W(\lambda_0)) \cdot D^T X_{F_s}$ , 则有  $\lambda_0 = (D^T D + 2 \cdot W(\lambda_0))^{-1} D^T X_{F_s}$ . 令  $Q(\lambda_0) = (2 \cdot W(\lambda_0))^{-1}$ , 变形可得:

$$= Q(\lambda_0) D^T (I_M \times M + DQ(\lambda_0) D^T)^{-1} X_{F_s} \quad (15)$$

因此, 求解优化问题式(14)的迭代格式具体如下:

$$\begin{cases} \text{给定初值 } \lambda_0, D, \\ \lambda_{(n+1)} = Q(\lambda_{(n)}) D^T (I_M \times M + DQ(\lambda_{(n)}) D^T)^{-1} X_{F_s} \end{cases} \quad (16)$$

#### 3.2 基于正则矩阵的非线性半参数估计方法

对于非线性半参数回归模型式(11), 由最小二乘原理  $V^T P V = \min$  可得法方程,

$$\begin{bmatrix} B^T P B & B^T P \\ P B & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P l \\ P l \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中:  $P$  为对称正定矩阵, 是观测值的权矩阵. 法方程式(17)的解不唯一, 需要修改最小二乘准则, 于是 Green and Silverman 提出了补偿最小二乘原则<sup>[13]</sup>:

$$v^T P v + s^T R s = \min \quad (18)$$

其中:  $R$  为正则矩阵, 二次型  $s^T R s$  反映对向量  $s$  的某种度量, 可以利用矩阵构造法加以定义<sup>[15]</sup>;  $\lambda$  称为光滑因子, 可以通过基于光滑参数  $\lambda$  的信号范数与噪声范数表示的  $L$  曲线法求取<sup>[16]</sup>. 在假定动力学模型精确的情况下, 对于模型(11)的参数估计, 有如下定理:

**定理 1** 对于非线性半参数联合定轨模型  $Y = S(X_0) + g(a) + s$ , 其极小值问题为:

$$\begin{aligned} M(X_0, a, s) &= \sum_{i=1}^n W_i (Y_i - S(t_i, X_0) \\ &\quad - g(a) - s(t_i))^2 + s^T R s \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $W$  为观测权矩阵,  $R$  为正则矩阵,  $\lambda$  为光滑参数, 令  $N$  是数组  $\{s_1, s_2, \dots, s_q\}$  与  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  的  $n \times q$  维关联矩阵, 则极小值问题式(19)可表示为:  $M(X_0, a, s) = W (Y - S(X_0) - g(a) - Ns)^2 + s^T R s$ , 则半参数联合定轨模型解的一般迭代格式为:

$$\begin{bmatrix} X_0^{(j+1)} \\ a^{(j+1)} \\ s^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0^{(j)} \\ a^{(j)} \\ s^{(j)} \end{bmatrix} - (A)^{-1} (X_0^{(j)}, a^{(j)}, s^{(j)}) \cdot u(X_0^{(j)}, a^{(j)}, s^{(j)}) \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned} u(X_0, a, s) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial X_0} \\ \frac{\partial M}{\partial a^T} \\ \frac{\partial M}{\partial s^T} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} V^T \\ Z^T \\ N^T \end{bmatrix} W^T W (Y - S(X_0) \\ &\quad - g(a) - Ns) + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R s \end{bmatrix}, \\ V &= \frac{\partial S(X_0)}{\partial X_0^T}, Z = \frac{\partial g(a)}{\partial a^T}, \end{aligned}$$



$$A(X_0, a, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 M}{\partial X_0 \partial X_0^T} & \frac{\partial^2 M}{\partial X_0 \partial a^T} & \frac{\partial^2 M}{\partial X_0 \partial s^T} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial a \partial X_0^T} & \frac{\partial^2 M}{\partial a \partial a^T} & \frac{\partial^2 M}{\partial a \partial s^T} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial X_0^T} & \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial a^T} & \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial s^T} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} V^T W^T W V & V^T W^T W Z & V^T W^T W N \\ Z^T W^T W V & Z^T W^T W Z & Z^T W^T W N \\ N^T W^T W V & N^T W^T W Z & N^T W^T W N + R \end{pmatrix} \quad (21)$$

证明:对于非线性半参数联合定轨模型  $Y = S(X_0) + g(a) + s + v$ , 其补偿最小二乘原则为:  $v^T P v + s^T R s = \min$ , 而

$$v = W(S(X_0) + g(a) + Ns - Y) = W(V \ Z \ N) \begin{pmatrix} x_0 \\ a \\ s \end{pmatrix}^T - W y,$$

$y = Y - S(X_0^*) - g(a^*) - Ns^*$  ( $X_0^*, a^*, s^*$  为对应分量的初始概略值), 即有:

$$\begin{bmatrix} W(V \ Z \ N) \begin{pmatrix} x_0 \\ a \\ s \end{pmatrix}^T - W y \\ \begin{pmatrix} X_0 \\ a \\ s \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ a \\ s \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \min,$$

根据拉格朗日乘数法, 对该极小值问题求导可得:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (WV)^T \\ (WZ)^T \\ (WN)^T \end{pmatrix} W(V \ Z \ N) \begin{pmatrix} x_0 \\ a \\ s \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} (WV)^T \\ (WZ)^T \\ (WN)^T \end{pmatrix} W y \\ + 2 a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0^* + x_0 \\ a^* + a \\ s^* + s \end{pmatrix} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{即有} \begin{pmatrix} x_0 \\ a \\ s \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} V^T W^T W V & V^T W^T W Z & V^T W^T W N \\ Z^T W^T W V & Z^T W^T W Z & Z^T W^T W N \\ N^T W^T W V & N^T W^T W Z & N^T W^T W N + R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R s^* \end{pmatrix}$$

考虑非线性半参数回归模型, 可得解的迭代格式为:

$$\begin{pmatrix} X_0^{(j+1)} \\ a^{(j+1)} \\ s^{(j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0^{(j)} \\ a^{(j)} \\ s^{(j)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ a \\ s \end{pmatrix},$$

$$\text{此即:} \begin{pmatrix} X_0^{(j+1)} \\ a^{(j+1)} \\ s^{(j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0^{(j)} \\ a^{(j)} \\ s^{(j)} \end{pmatrix} - (A)^{-1} (X_0^{(j)}, a^{(j)}, s^{(j)}) \cdot u$$

$(X_0^{(j)}, a^{(j)}, s^{(j)})$ .

### 3.3 参数化融合模型的联合估计算法

对于联合定轨参数化融合模型(12), 可将其卫星轨道动力学高精度表示模型和非线性半参数联合观测模型分别表示为如下统一的形式:

$$Y = S(X_0) + g(a) + s + v \quad (22)$$

$$\dot{X} = F_0(X_0) + F_S(X_S) + v \quad (23)$$

当  $v$  为高斯白噪声序列时, 求解卫星轨道参数  $X_0$ 、系统误差参数  $a$ 、模型误差参数  $s$  以及稀疏参数模型系数  $X_S$ , 即为同时求解如下两个极小值问题:

$$Y - S(X_0) - g(a) - s = \min \quad (24)$$

$$\dot{X} - F_0(X_0) - F_S(X_S) = \min \quad (25)$$

在观测随机误差  $v$  的方差  $\sigma_v^2$  和轨道摄动随机噪声  $v$  的方差  $\sigma_v^2$  已知的情况下, 联合估计算法具体步骤如下:

**Step 1** 给定卫星轨道初值  $X_0^{(0)}$ 、稀疏参数模型系数初值  $X_S^{(0)}$  及常数  $\sigma > 0$ .

**Step 2** 代入卫星轨道动力学模型(23), 可求得任意时刻各类卫星的瞬时状态向量  $X^{(0)}(t_i)$ .

**Step 3** 给定可建模系统误差系数初值  $a^{(0)}$  以及模型误差向量初值  $s^{(0)}$ , 结合卫星瞬时状态向量  $X^{(0)}(t_i)$ , 将其代入联合观测模型(22) 求解极小值问题(25), 利用 Gauss-Newton 迭代求解算法可解出待估参数  $X_0^{(j)}$ 、 $a^{(j)}$ 、 $s^{(j)}$ , 其具体迭代格式见公式(20).

**Step 4** 将轨道参数  $X_0^{(j)}$  再代入动力学模型(23), 求解极小值问题(25), 采用基于小波分解的加权迭代算法解出轨道参数  $X_0^{(j+1)}$  和稀疏参数模型系数  $X_S^{(j+1)}$ , 其具体迭代格式见公式(16).

**Step 5** 定义极小值问题的费用函数  $P(X_0, a, s) = (Y - S(X_0) - g(a) - s)^T \cdot (Y - S(X_0) - g(a) - s)$  以及  $Q(X_0, X_S) = (\dot{X} - F_0(X_0) - F_S(X_S))^T \cdot (\dot{X} - F_0(X_0) - F_S(X_S))$ , 对于给定  $\sigma$ , 若  $P(X_0^{(j)}) - P(X_0^{(j+1)}) < \sigma$  且  $Q(X_0^{(j)}) - Q(X_0^{(j+1)}) < \sigma$  则  $X_0 = X_0^{(j+1)}$ ; 否则令  $X_0^{(0)} = X_0^{(j+1)}$  返回 step1.

**Step 6** 根据 Step5 的迭代收敛准则重复以上步骤, 直到关于参数  $X_0, a, s, X_S$  的迭代过程收敛, 此时迭代结果记为  $\hat{X}_0$ , 即为参数化融合模型中各待估参数的最终估计结果.

## 4 仿真应用及精度分析

### 4.1 距离和仿真数据生成及仿真条件

卫星“真实”轨道: 考虑全部摄动模型(地球引力场 JGM2 模型、日月引力、大气阻力、太阳光压、固体潮模型等), 分别生成近地卫星和双星的理论“真实”轨道.

**距离和仿真数据:**根据双星星历计算得到理论距离和数据,在此基础上加上由观测残差系统误差模型仿真产生的测距误差和 10 米随机误差模拟生成距离和仿真数据,并考虑距离和数据切换周期和双星定位系统的观测区域选用可观测弧段的距离和数据。

**卫星物理模型参数:**双星(J4 地球引力场 JGM2 模型以及日月引力、太阳光压);近地卫星(J20 地球引力场 JGM2 模型以及大气阻力、日月引力、太阳光压)。

**卫星稀疏参数模型:**稀疏参数模型的字典采用标准的小波函数 symmlet-8 构造。

4.2 联合定轨仿真结果及说明

**CASE 1** 选用总长度为 172800 秒、每 5 秒一个采样点的距离和仿真数据,根据双星定位系统的工作区域得到其实际可用数据为 2940 秒,此时仅考虑利用轨道摄动物理模型进行联合定轨。

**CASE 2** 距离和仿真观测数据同上,通过参数化融合联合估计方式解算稀疏参数模型系数、常值系统误差和模型误差  $s$ ,在 J2000 坐标系中定轨误差如下图 3 所示。

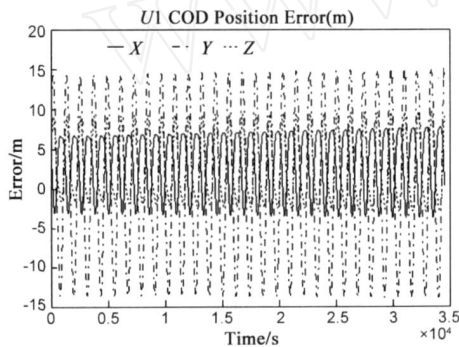


图3 CASE2 近地卫星U1联合定轨位置误差

以下是上面三种情况下的仿真条件以及对应的联合定轨仿真计算结果,具体见表 2 所示。

表 2 不同情况下的联合定轨仿真结果

仿真情况	观测数据(可用观测量)	仿真数据所加误差源(距离和) / $s$	联合定轨方式	卫星类型	卫星定轨精度(RMS)			
					X 轴	Y 轴	Z 轴	位置误差(m)
1	172800 (2940)	A = 30 S = 5	物理模型联合定轨	近地卫星 U1	23.63	10.47	24.24	35.44
				双星 B1	127.3	115.7	19.25	173.1
				双星 B2	46.65	54.33	18.69	74.01
2	172800 (2940)	A = 30 S = 5	参数化融合模型联合定轨	近地卫星 U1	4.08	8.04	4.14	9.92
				双星 B1	23.12	27.03	5.72	36.03
				双星 B2	14.32	11.44	22.26	28.83

4.3 简要结论

(1) 仅仅采用物理模型进行联合定轨,由于距离和观测数据所隐含的卫星动力学模型(卫星实际运行轨迹)与实际建模所采用的模型之间存在较大的动力学建模误差,因此定轨精度难以提高,特别是近地卫星的精度难以满足其高精度应用需求。

(2) 采用卫星轨道动力学高精度表示模型进行联合定轨,同时通过采用参数化融合联合定轨方式同时估计参数化的系统误差和非参数表示的模型误差以及轨道摄动模型参数,可以进一步改善近地卫星的定轨精度。

5 结束语

本文在分析现有的联合定轨动力学模型和观测模型建模手段以及参数估计方法不足的基础上,针对动力学模型提出了一种基于物理模型和数学模型相结合的卫星轨道动力学模型的高精度表示方法;针对观测模型,提出了一种参数建模和非参数分量表示相结合的非线性影响因素的模型误差建模方法。在此基础上,建立了卫星联合定轨的参数化融合模型,设计了相应的联合估计算法。仿真计算结果表明,联合定轨的参数化融合模型是对单一建模方法的融合,采用联合估计算法能够进一步改善单一建模方法的联合定轨精度。

本文的讨论是以基于双星定位系统的近地卫星联合定轨作为研究背景,但考虑到未来全球导航卫星系统 GNSS 可能的发展,因此可以将现有的卫星联合定轨参数化融合技术进一步加以扩展和完善,应用于基于天基测控卫星星座的多近地卫星组成的联合定轨卫星网的精密定轨问题,这是我们后续的研究方向与重点之一。

参考文献:

- [1] T P Yunck et al. First assessment of GPS-based reduced-dynamic orbit determination on Topex/ Poseidon [J]. Geophysics research Letters, 1994, 21 (7) :541 - 544.
- [2] D Svehla, M Rothacher. Kinematic and reduced-dynamic precise orbit determination of low earth orbiters [J]. Advances in Geosciences, 2003, 1 (1) :47 - 56.
- [3] Montenbruck O, van Helleputte T, Kroes R, Gill E. Reduced dynamic orbit determination using GPS code and carrier measurements [J]. Aerospace Science and Technology, 2005, 9(3) : 261 - 271.
- [4] Zhao Deyong, Pan Xiaogang. The model and algorithm of LEO satellite combined orbit determination based on Bi-satellite positioning system [A]. Progress in Intelligent Computation and Its Application [C]. Wuhan: China University of Geosciences Press, 2005. 619 - 624.
- [5] 易东云. 动态测量误差的复杂特征研究与数据处理结果的精度评估 [D]. 长沙:国防科技大学博士学位论文, 2003, 5.
- [6] Yi Dongyun. Research on complicated characteristics of dynamic measurement errors and precision evaluation of data processing results [D]. Changsha: National University of Defense Technology doctoral dissertation, 2003. 5. (in Chinese)
- [7] 赵德勇, 王炯琦, 周海银, 等. 基于双星定位系统的近地卫

- 星联合定轨建模及精度分析[J]. 电子学报, 2006, 34(9): 1681 - 1685.
- Zhao Deyong, Wang Jiongqi, Zhou Haiyin, et al. LEO combined orbit determination modeling and precision analysis based on bi-satellite positioning system[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(9): 1681 - 1685. (in Chinese)
- [7] 赵德勇, 王正明, 潘晓刚, 等. 基于半参数回归的联合定轨误差估计仿真算法[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(8): 1692 - 1695.
- Zhao Deyong, Wang Zhengming, Pan Xiaogang, et al. Combined orbit determination error estimation simulation algorithm based on semi-parametric regression[J]. Journal of System Simulation, 2007, 19(8): 1692-1695. (in Chinese)
- [8] Zhao Deyong, Wang Jiongqi, Zhou Haiyin et al. Research on LEO range sum observation data simulation and precise orbit determination fusion algorithm based on Bi-satellite positioning system[J]. 模糊系统与数学, 2005, 19(4): 28 - 35.
- [9] 刘林. 航天器轨道理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000. Liu lin. Aerospace-Craft Orbit Theory [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000. (in Chinese)
- [10] S Chen, D L Donoho, M A Saunders. Atomic decomposition by Basis Pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129 - 159.
- [11] D L Donoho, X Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2001, 47(7): 2845 - 2862.
- [12] D L Donoho, Michael Elad. Optimally sparse representation in general dictionaries via  $l_1$  minimization[J]. PNAS, 2003, 100(5): 2197 - 2202.
- [13] Green P J, Silverman B W. Nonparametric regression and generalized linear models [M]. London: CHAPMAN and HALL, 1994.
- [14] 傅霆, 尧德中. 稀疏分解的加权迭代方法及其初步应用[J]. 电子学报, 2004, 32(4): 567 - 570.
- Fu Ting, Yao Dezhong. Iterative weighted method of sparse decomposition and preliminary application[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(4): 567 - 570. (in Chinese)
- [15] 丁士俊. 测量数据建模与半参数估计[D]. 武汉: 武汉大学博士学位论文, 2005, 4.
- Ding Shijun. Measurement data modeling and semi-parametric evaluation [D]. Wuhan: Wuhan University doctoral dissertation, 2005, 4. (in Chinese)
- [16] Craven P Wahba. Smoothing noisy data with spline function [J]. Numer Math, 1979, 31(1): 377 - 403.

#### 作者简介:



赵德勇 男, 1977年2月出生于湖北孝感, 2007年12月获国防科技大学控制科学与工程专业工学博士学位, 博士后, 主要研究方向为数据融合与试验评估。  
E-mail: zdy77218@sina.com

王正明 男, 1962年出生于湖南岳阳, 现为国防科技大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为数据融合与试验评估、数字图像处理的数学理论与技术。