

两信号源的相关性对 MUSIC 算法分辨性能的影响

樊 祥, 程正东, 马东辉, 朱 斌

(1. 中国科学技术大学六系, 安徽合肥 230027; 2. 合肥电子工程学院, 安徽合肥 230037)

摘 要: 平均信噪比分辨门限是特征结构算法分辨性能的一种度量, 本文给出了含有两信号源相关性的 MUSIC 算法的平均信噪比分辨门限表达式. 模拟结果表明, 当两信号源正相关时, MUSIC 算法分辨性能会下降; 当负相关时, 在一定条件下, MUSIC 算法分辨性能会提高. 本文也讨论了当两信号源的功率差异、方向夹角、阵元数和采样的快拍数变化时, 相关性对算法分辨性能的影响的变化规律.

关键词: MUSIC 算法; 分辨性能; 平均信噪比分辨门限; 相关性

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 12-2315-04

Effect of Correlation of Two Signal Sources on Resolution Performance of MUSIC Algorithm

FAN Xiang, CHENG Zheng-dong, MA Dong-hui, ZHU Bin

(1. University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China; 2. Electronic Engineering Institute, Hefei, Anhui 230037, China)

Abstract: The mean SNR resolution threshold is a kind of measurement of resolution performance of the eigenstructure algorithms. The formula of the mean SNR resolution threshold of MUSIC algorithm which includes the correlation of two signal sources is deduced. Simulation results show that the positive correlation may reduce the resolution performance of MUSIC algorithm, and that under some condition the negative correlation may improve the resolution performance. The rule of the effect change of correlation on the resolution performance is discussed when some parameters such as the power difference, direction cut angle, the number of array elements and the number of sampling snapshots are changed.

Key words: MUSIC algorithm; resolution performance; the mean SNR resolving threshold; correlation

1 引言

在阵列信号处理中, 一个算法的分辨性能是指该算法将两个靠得很近的信号源方向分辨出来的能力. 算法的分辨性能不仅与两信号源的方向夹角、信噪比、阵列天线的阵元数和采样的快拍数有关外, 还与两信号源的功率差异和相关性有关.

文献[1, 2]在假定两信号源不相关且功率一致的情况下, 定义了一种可以度量 MUSIC 算法和最小模算法的分辨性能的量——信噪比分辨门限; 文献[3, 4]给出了各种特征结构算法的信噪比分辨门限的近似表达式. 文献[5]在假定两信号源不相关的情况下, 定义了的平均信噪比分辨门限, 并以此为度量深入讨论了功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的影响.

本文针对的是两信号源相关的情形, 首先给出了含有相关系数的平均信噪比分辨门限表达式, 然后通过数据模拟定量讨论了信号源的相关性对 MUSIC 算法分辨

性能的影响. 模拟数据表明: 当两信号源正相关时, MUSIC 算法分辨性能会下降; 当负相关时, 在一定条件下, MUSIC 算法分辨性能会提高; 相关性对 MUSIC 算法分辨性能的影响随着其它的参量变化而变化.

2 MUSIC 算法的平均信噪比分辨门限表达式

2.1 MUSIC 算法的零谱估计的均值

考虑有 L 个阵元的均匀线性阵列只接收 2 个信号源的观测模型^[4]

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{y}(t)$ 为 L 维观测数据, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2))$ 为 $L \times 2$ 矩阵, θ_1, θ_2 为两信号源的方位参数, 向量 $\mathbf{a}(\theta_i) = (1, e^{j\theta_i}, \dots, e^{j(L-1)\theta_i})^T$, $(i = 1, 2)$, $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t))^T$ 为 2 维信号向量, $\mathbf{n}(t)$ 为 L 维测量噪声. 设测量噪声与信号不相关, 且相对于各个阵元独立同分布, 协方差阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}$, 则 $\mathbf{y}(t)$ 的协方差阵为

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{R}_s = E\{s(t)s^H(t)\}$ 为信号协方差阵. 对 $\mathbf{R}$ 作特征值分解, 记其特征值和相应的特征向量为 $\lambda_k, \mathbf{e}_k$, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$. 在实际问题中, $\mathbf{R}$ 一般用其样本协方差阵

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}(t_n) \mathbf{y}^H(t_n) \quad (3)$$

来代替, N 为快拍数. 当 $N \gg 1$ 时, MUSIC 算法的零谱估计的均值 $D(\theta)$ 的近似表达式为^[15]

$$D(\theta) = \left[1 - \frac{\sigma^2}{N} (\gamma_1 + \gamma_2) \right] (L - |\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{e}_1|^2 - |\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{e}_2|^2) + \frac{\sigma^2(L-2)}{N} (\gamma_1 |\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{e}_1|^2 + \gamma_2 |\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{e}_2|^2) \quad (4)$$

近似程度达到 $o(1/N)$. 式中 $\mathbf{a}(\theta) = (1, e^{j\theta}, \dots, e^{j(L-1)\theta})^T$, θ 为信号源的方位参数, 且

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \sigma^2)^2}, \quad k = 1, 2 \quad (5)$$

2.2 平均信噪比分辨门限及其表达式

定义^[5] 设有两个信号源, 其到达方向的方位参数分别为 θ_1 和 θ_2 ($\theta_2 - \theta_1$ 很小), 其功率分别为 1 和 r ($r > 0$), 定义两信号的平均信噪比为 $\xi = (1+r)/2\sigma^2$, 则满足下式

$$D\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \geq \frac{D(\theta_1) + D(\theta_2)}{2} \quad (6)$$

的最小的 ξ 称为 MUSIC 算法的平均信噪比分辨门限, 记为 ξ_r .

显然, $\Delta\theta = |\theta_2 - \theta_1|$ 可以描述两信号源方向的夹角. 由定义知, 对于给定的 $\Delta\theta$, ξ_r 越小, MUSIC 算法将两信号源分辨出来所需的最小信噪比就越小, 从而 MUSIC 算法的分辨性能就越强. 因此, 平均信噪比分辨门限 ξ_r 可以作为 MUSIC 算法分辨性能的度量.

设两信号源的协方差阵为

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} 1 & q\sqrt{r} \\ q\sqrt{r} & r \end{bmatrix} \quad (q \text{ 为相关系数}) \quad (7)$$

将 $\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H$ 的两个非零特征值记为 μ_1, μ_2 , 相应的特征向量记为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, 则

$$\mu_{1,2} = \frac{[L(1+r) + 2L\sqrt{r}q\cos\varphi] \left[1 \pm \frac{4r(1-\rho_1^2)(1-q^2)}{[L(1+r) + 2\sqrt{r}q\cos\varphi]^2} \right]}{2} \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_{1,2} = \frac{(L\rho_1 e^{j\varphi} + L\sqrt{r}q) \mathbf{a}_1 + (\mu_{1,2} - L - L\sqrt{r}q\rho_1 e^{-j\varphi}) \mathbf{a}_2}{c_{1,2}} \quad (9)$$

$$c_{1,2}^2 = L(\mu_{1,2} - L)^2 + L^2\rho_1^2(2\mu_{1,2} - L) + \sqrt{r}L^3q(1 - \rho_1^2)(\sqrt{r}q + 2\rho_1\cos\varphi) \quad (10)$$

其中 $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}(\theta_i)$ ($i = 1, 2$), 且

$$\rho_1 = \frac{\sin \frac{L}{2}(\theta_2 - \theta_1)}{L \sin \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)} \quad \text{和} \quad \varphi = \frac{L-1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \quad (11)$$

记 $\theta_m = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$, $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}(\theta_m)$, 则

$$|\mathbf{a}_1^H \mathbf{e}_i|^2 = \frac{\mu_1^2 L^2 \rho_1^2 + L^4 r q^2 (1 - \rho_1^2)^2 + 2\sqrt{r} q L^3 \mu_1 \rho_1 (1 - \rho_1^2) \cos \varphi}{c_i^2} \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

$$|\mathbf{a}_2^H \mathbf{e}_i|^2 = \frac{L^2 [L\rho_1^2 + (\mu_1 - L)]^2}{c_i^2} \quad (i = 1, 2) \quad (13)$$

$$|\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_i|^2 = \frac{L^3 \sqrt{r} q \rho_1^2 (1 - \rho_1^2) [L\sqrt{r} q (1 - \rho_1^2) + 2[L\rho_1 + (\mu_1 - L)] \cos \varphi]}{c_i^2} + \frac{L^2 \rho_1^2 [L\rho_1 + (\mu_1 - L)]^2}{c_i^2} \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

$$\text{其中} \quad \rho_2 = \frac{\sin \frac{L}{4}(\theta_2 - \theta_1)}{L \sin \frac{1}{4}(\theta_2 - \theta_1)} \quad (15)$$

令 $2D(\theta_m) = D(\theta_1) + D(\theta_2)$, 可得 MUSIC 算法的平均信噪比分辨门限表达式:

$$\xi_r = \frac{(1+r) \left[(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) + \sqrt{(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2)^2 + 8h_0(h_1 + h_2)} \right]}{8h_0} \quad (16a)$$

$$\text{其中} \quad h_0 = L - |\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_1|^2 - |\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_2|^2 \quad (16b)$$

$$h_i = \frac{1}{N\mu_i^2} \left[(L-2) \left(|\mathbf{a}_1^H \mathbf{e}_i|^2 + |\mathbf{a}_2^H \mathbf{e}_i|^2 - 2|\mathbf{a}_m^H \mathbf{e}_i|^2 \right) + 2h_0 \right] \quad (i = 1, 2) \quad (16c)$$

3 相关性对 MUSIC 算法分辨性能的影响

显然, 式(7)中的相关系数 q 是两信号源相关性的度量, 称 $q > 0$ 时的相关性为正相关, $q < 0$ 时的相关性为负相关. 式(7)中的 r 描述了两信号源功率的差异, 但功率的差异一般用 $\gamma = 10\lg r$ 来度量, 这样做一是因为 γ 的单位是分贝(dB), 二是因为 ξ_r 关于 γ 对称, 从而只需讨论 $\gamma \geq 0$ 的情形.

由式(16)知, 平均信噪比分辨门限 ξ_r 不仅与相关系数 q 和功率差异 γ 有关, 还与方向夹角 $\Delta\theta$ 、阵元数 L 和快拍数 N 有关, 因此可记 $\xi_r = \xi_r(q, \gamma, \Delta\theta, L, N)$. 为讨论相关性对算法分辨性能的影响, 引入如下比值函数:

$$k(q) = \frac{\xi_r(q, \gamma, \Delta\theta, L, N)}{\xi_r(0, \gamma, \Delta\theta, L, N)} = \frac{\xi_r(q, \gamma, \Delta\theta, L, N) - \xi_r(0, \gamma, \Delta\theta, L, N)}{\xi_r(0, \gamma, \Delta\theta, L, N)} \quad (17)$$

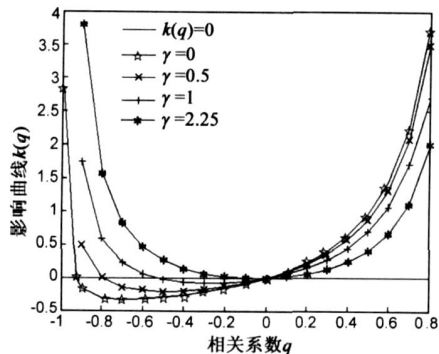
显然, 相对于不相关情形的平均信噪比门限 $\xi_r(0, \gamma, \Delta\theta, L, N)$, 若 $k(q) > 0$, 则表明相关性使算法的分辨性能下降; 若 $k(q) < 0$, 则表明相关性使算法的分辨性能提高, 即 $k(q)$ 的正负反映了相关性对算法分辨性能的影响趋势. 进一步, 若 $|k(q)|$ 的值大, 则表明相关性对算法分辨性能的影响大; 若 $|k(q)|$ 的值小, 则表明相关性对算法分辨性能的影响小, 即 $k(q)$ 的大小反映了相关性对算法分辨性能的影响程度. 因此, $k(q)$ 可以作为相关性对算法分辨性能的影响描述函数.

由于参量 $\gamma, \Delta\theta, L, N$ 对 $k(q)$ 的值也有作用, 因此本文分两种情况来讨论相关性对算法分辨性能的影响.

3.1 $\gamma, \Delta\theta, L, N$ 固定时相关性对算法分辨性能的影响

固定 $\gamma = 0, \Delta\theta = 0.03, L = 30$ 和 $N = 1000$, 可以得到 $k(q)$ 关于 q 的函数曲线(图 1).

图 1 表明, 当 $q > 0$ 时, MUSIC 算法的分辨性能下降, 且随着 q 的增加, 分辨性能的下降程度增大; 而当 $q < 0$ 时, $k(q)$ 除在 $q = 0$ 外还存在一个零点 q_0 , 在 $q \in (q_0, 0)$ 内, 负相关会使算法的分辨性能提高, 且存在一个最小值点 $q_{\min}$ 在 $q_{\min}$ 处, 算法的分辨性能提高程度最大; 而在 $q \in (-1, q_0)$ 内, 负相关会使算法的分辨性能下降.



(a) $\Delta\theta=0.03, L=30, N=1000$ 时, $k(q)$ 随 γ 的变化

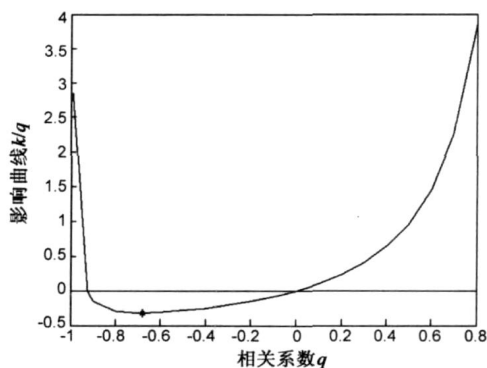
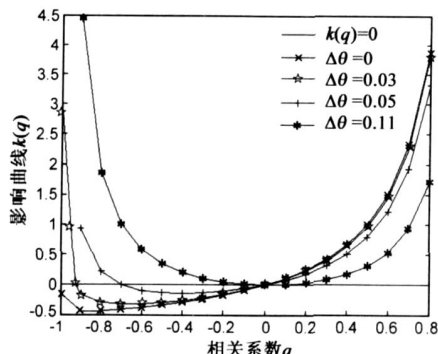


图 1 $\gamma, L, N, \Delta\theta$ 固定时 q 对分辨性能的影响曲线

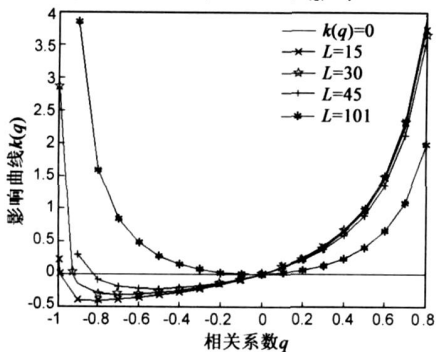
由数据模拟可得, 当 $\gamma = 0, \Delta\theta = 0.03, L = 30$ 和 $N = 1000$ 时, 零点 $q_0 = -0.922$; 最小值点 $q_{\min} = -0.68$, 相应的 $k_{\min} = -0.319$. 这就是说, 当两信号源的相关性为 $q = -0.68$ 时, MUSIC 算法的分辨性能被提高 31.9%.

3.2 $\gamma, \Delta\theta, L, N$ 变化时相关性对算法分辨性能的影响的变化

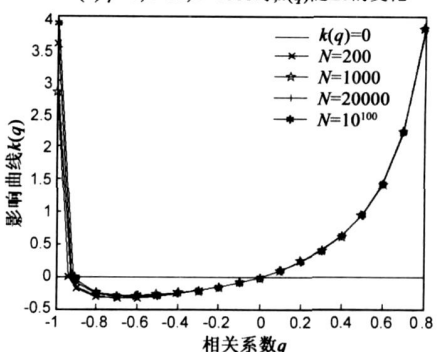
相关性虽对算法的分辨性能有影响, 但这种影响随着功率差异 γ 、方向夹角 $\Delta\theta$ 、阵元数 L 和快拍数 N 的变化而变化. 分别固定参量 $\gamma, \Delta\theta, L, N$ 中的三个而让另一个变化, 可以研究当 $\gamma, \Delta\theta, L, N$ 的变化时相关性对算法分辨性能的影响的变化, 模拟结果见图 2.



(b) $\gamma=0, L=30, N=1000$ 时, $k(q)$ 随 $\Delta\theta$ 的变化



(c) $\gamma=0, \Delta\theta=0.03, N=1000$ 时, $k(q)$ 随 L 的变化



(d) $\gamma=0, \Delta\theta=0.03, L=30$ 时, $k(q)$ 随 N 的变化

图 2 $\gamma, L, N, \Delta\theta$ 变化时, 相关性对分辨性能的影响的变化

由图 2 可看出, 随着 $\gamma, \Delta\theta, L$ 的增加, 曲线 $k(q)$ 在 $q > 0$ 的部分不断下降, 在 $q < 0$ 的部分不断上升; 相应地, $k(q)$ 的第二零点 q_0 的位置不断右移; 在 $q \in (q_0, 1)$

内, $|k(q)|$ 的值不断减小, 在 $q \in (-1, q_0)$ 内, $|k(q)|$ 的值不断加大. 由此可以得到以下几点结论:

(1) 相关性对 MUSIC 算法分辨性能的影响几乎不

随快拍数 N 的变化而变化;

(2) 随着 $\gamma, \Delta\theta, L$ 的增加, 在 $q \in (q_0, 1)$ 内, 相关性对算法分辨性能的影响不断减弱; 在 $q \in (-1, q_0)$ 内, 相关性对算法分辨性能的影响不断加强. 反之, 随着 $\Delta\theta, L$ 的减小, 在 $q \in (q_0, 0)$ 内, 负相关对算法分辨性能的提高不断增强.

(3) 当 $\gamma, \Delta\theta, L$ 增加到一定程度 (见表 1) 时, q_0 与原点重合. 此时, 随着 $\gamma, \Delta\theta, L$ 的增加, 正相关对分辨性能的影响不断减弱, 负相关对分辨性能的影响不断加强.

表 1 q_0 与原点重合的情形

$q_0 = 0$	$q_0 = 0$	$q_0 = 0$
$\Delta\theta = 0.03,$ $L = 30, \gamma \geq 2.55$	$\gamma = 0, L = 30,$ $\Delta\theta \geq 0.11$	$\gamma = 0, \Delta\theta = 0.03,$ $L \geq 101$

4 结束语

本文通过对平均信噪比分辨门限的数据模拟讨论了两信号源的相关性对 MUSIC 算法分辨性能的影响. 模拟结果表明: 当两信号源正相关时, 算法的分辨性能会下降; 当负相关时, 在 $q \in (q_0, 0)$ 内, 算法的分辨性能不降反升; 在 $q \in (-1, q_0)$ 内, 算法的分辨性能又下降. 随着 $\gamma, \Delta\theta, L$ 的不断增加时, 在 $q \in (q_0, 1)$ 内, 相关性对算法分辨性能的影响减弱; 而在 $q \in (-1, q_0)$ 内, 相关性对算法分辨性能的影响增强.

致谢: 在本文的写作和修改过程中, 电子工程学院罗景青教授给予了很多有益的指导, 学报编辑部孙老师给予了极大的帮助, 在此表示衷心的感谢!

参考文献:

- [1] M Kaveh, A J Barabell. The statistical performance of the MUSIC and minimum norm algorithms in resolving plane waves in noise[J]. IEEE Trans, 1986, ASSP 34(2): 331-341.
- [2] D R Farrier, D J Jeffries, R Mardani. Theoretical performance prediction of the MUSIC algorithm[J]. IEEE Proc F, 1988, RSP 135(3): 216-224.
- [3] 罗景青, 保铮. 特征结构法的分辨性能[J]. 电子科学学报, 1991, 13(4): 337-344.
Luo Jingqing, Bao Zheng. The resolution performance of eigenspace approach[J]. Journal of Electronics, 1991, 13(4): 337-344. (in Chinese)

[4] 罗景青. 阵列信号处理基本理论与应用[M]. 北京: 解放军出版社, 2007.

[5] 程正东, 罗景青, 樊祥, 马东辉. 两信号源功率不一致对 MUSIC 算法分辨性能的影响[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(5): 1088-1091.

Cheng Zhengdong, Luo Jingqing, Fan Xiang, Ma Donghui. Effect of power difference of two signal sources on resolution performance of MUSIC algorithm[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2008, 30(5): 1088-1091. (in Chinese)

作者简介:



樊祥 男, 1963 年生于安徽滁州, 教授, 博士生导师. 主要研究方向: 光电对抗, 信号与信息处理.

Email: fanxiangxl@163.com



程正东 男, 1972 年生于安徽舒城, 博士生. 主要研究方向: 信号与信息处理, 红外图像处理.

Email: czd06@mails.tsinghua.edu.cn



马东辉 男, 1973 年生于安徽合肥, 硕士, 讲师. 主要研究方向: 光电对抗, 红外图像处理.

Email: kmh1418@sina.com



朱斌 男, 1982 年生于湖南湘潭, 博士生. 主要研究方向: 光电信号处理, 红外图像处理.

Email: zhubin0201@163.com