

高阶基函数与低阶基函数的混合建模

任 仪, 聂在平, 赵延文

(电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054)

摘 要: 提出一种在采用高阶基函数时将定义在大尺寸单元上的高阶基函数与定义在小单元上的低阶基函数混合使用的方法. 该方法可以合理的使用基函数的阶数与个数, 得到准确的计算结果, 并且较大幅度地提高了计算效率. 该方法适用于对复杂结构目标进行精确建模, 并同时具有高阶基函数与低阶基函数的优点.

关键词: 高阶叠层基函数; 电磁建模; 数值方法

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 09-1844-04

The Mixed Electromagnetic Modeling by Using the Higher Order Bases and Low Order Bases

REN Yi, NIE Zai-ping, ZHAO Yan-wen

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: A new method is introduced to model the complex structure object by using the higher order bases on the large patches and the low order bases on the small patches in this paper. This method will utilize the order of the different bases and the number of unknowns reasonably. Furthermore, this method will get the accurate results but not increase the burden in solution and keep the merit of the two kinds of bases.

Key words: higher order hierarchical bases; electromagnetic modeling; numerical method

1 引言

由于现代工程需要, 精确计算目标的电磁响应变的越来越重要. 通常, 计算导体目标的电磁响应主要采用矩量法 (MoM)^[1]. 而 MoM 需要对目标表面进行离散, 在每个子域单元上定义基函数描述感应电流, 再使用电磁场积分方程方法进行求解. 但是, 由于工程需求, 目前所计算的目标电尺寸越来越大, 因而在采用数值方法计算时, 所要求解的未知量和计算时间也越来越多. 长期以来, 计算电磁学一直在寻找更高效方法以使用更少的未知量, 存储量和计算时间求解电尺寸更大的目标^[2]. 一种行之有效的方法就是采用定义在大贴片上的高阶基函数. 该方法可有效的降低所求解的未知量和计算时间^[3]. 但是这种定义在大贴片上的基函数目前还难以普遍用于工程计算, 主要原因就是实际计算的工程目标都具有比较复杂的结构, 某些部分为精细结构, 而采用大贴片难以对这些精细结构进行几何剖分. 2004, Erik 等人提出了一种定义在高阶曲面四边形单元上的高阶叠层矢量基函数^[4~7]. 这种基函数可根据其叠层性在不同的单元上使用不同阶的基函数, 因而可以使得在目标的精细结构区采用小尺寸单元进行建模, 并采用低阶基函

数, 而目标表面的光滑结构区采用定义在大贴片上的高阶基函数. 但是由于传统方法需要满足电流的连续性条件, 必须保证剖分单元的连续, 因此该方法需要在目标表面的精细结构和光滑结构之间形成一个由大单元到小单元的过渡区, 而这个过渡区的单元形状将是非常不规则的, 会对求解矩阵方程造成一定困难; 并且在过渡区难以选择适当阶数的基函数, 也会影响所求解的未知量个数和解的精度^[8,9].

本文在充分研究了高阶叠层矢量基函数性质的基础上提出一种在精细结构区采用小尺寸单元进行建模并采用低阶基函数, 而光滑结构区采用定义在大贴片上的高阶基函数的方法. 该方法可以实现在网格剖分不连续的情况下, 仅对精细结构区与光滑结构区交界处基函数进行单独处理, 在不破坏电流连续性的同时, 即保留了低阶基函数的优点, 又保留了高阶基函数的优点, 并且得到了精确的计算结果, 极大地方便了几何建模, 而没有增加求解负担.

2 准正交高阶叠层矢量基函数

假设散射体表面由曲面四边形单元进行拟合. 若曲面四边形单元的局部参数坐标 (u, v) 定义区间为 -1

$(u, v) = 1$, 则单元上任一点的电流可表示为^[4]

$$J_s = J_{su}a_u + J_{sv}a_v \quad (1)$$

其中, a_u 和 a_v 为协变单位矢量: $a_u = \partial r / \partial u$, $a_v = \partial r / \partial v$. 以 u 方向的电流为例, 当采用准正交高阶叠层矢量基函数展开时, 可表示为

$$J_{su} = \frac{1}{s(u, v)} \sum_{m=0}^{M_u} \sum_{n=0}^{N_v} b_{mn}^u \tilde{C}_m \tilde{P}_m(u) C_n P_n(v) \quad (2)$$

其中, b_{mn}^u 为待求的未知量, M_u 与 N_v 分别表示该方向电流在纵向与横向的电流展开阶数, $s(u, v) = |a_u \times a_v|$ 为曲面建模的雅可比因子 (Jacobian factor).

$\tilde{P}_m(u)$ 与 $P_n(v)$ 分别对应纵向与横向的展开多项式. $\tilde{P}_m(u)$ 为修正勒让德多项式, 表示为

$$\tilde{P}_m(u) = \begin{cases} 1 - u, & m = 0 \\ 1 + u, & m = 1 \\ P_m(u) - P_{m-2}(u), & m \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $P_m(u)$ 为勒让德多项式.

\tilde{C}_m 和 C_n 分别为 \tilde{P}_m 和 P_n 的尺度因子, 其作用是使得展开多项式在单位边长单元上的欧几里德范数 (Euclidean norm) 单位归一. 式 (2) 所对应的尺度因子可表示为

$$\tilde{C}_m = \begin{cases} 0.25\sqrt{6}, & m = 0, 1 \\ 0.5 \sqrt{(2m-3)(2m+1)/(2m-1)}, & m \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

式 (2) 中的 $P_n(v)$ 与 C_n 为

$$P_n(v) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dv^n} (v^2 - 1)^n \quad (5)$$

$$C_n = \sqrt{n+0.5}, \quad n = 0, 1, \dots, N_v \quad (6)$$

类似地, 若将式 (2) 中的 u 与 v 互换即可得到向 v 的感应电流表达式.

在式 (2) 中, 当 $M_u = 1, N_v = 0$ 时, 该基函数就变为常用的 Roof-top 基函数

$$J_{su} = \frac{1}{s(u, v)} \left(b_{00}^u \tilde{C}_0 C_0 (1 - u) + b_{10}^u \tilde{C}_1 C_0 (1 + u) \right) \quad (7)$$

本文将同时使用高阶的准正交叠层矢量基函数和式 (7) 所示的 Roof-top 基函数.

3 高阶叠层矢量基函数与 Roof-top 基函数的混合建模

复杂结构目标总是包含了一定的精细结构. 对于目标的精细结构, 由于其电流变化迅速, 因而当采用常规的低阶基函数 (如 RWG, Roof-top 基函数) 进行建模时, 往往需要在这些精细结构区域进行加密剖分, 以保证求解精度. 而若采用定义在大贴片单元上的高阶基函数描述这些精细结构的感应电流, 则首先在几何建模上就存在困难. 这是因为大尺寸单元难以描述这些精细结构的几何形状; 其次, 由于在精细结构区的电流变化迅速, 若

采用高阶基函数来描述电流, 则需要采用较高阶的基函数, 而高阶的基函数除了会增加未知量的个数外还将增加迭代求解的难度. 这也是长期以来阻碍高阶基函数应用的主要问题^[2]. 因而本文提出一种方法解决此问题.

对于任意复杂结构目标, 其表面总可以分解成精细结构区和光滑结构区, 如图 1 所示. 图 1 中, S_1 表示目标表面的精细结构区, S_2 表示光滑结构区. 对于传统方法, 在 S_2 区使用定义在大单元上的高阶基函数, 而 S_1 区使用定义在小单元的上低阶基函数. 由于需要满足连续性条件, 这便要求每个 S_2 区的大单元严格的与 S_1 区的一个小单元相邻. 但是由于这两个区域单元的尺寸不相同, 因而难以直接做到单元的完全连续, 这便在两个区域的交界处形成一个由大单元到小单元的过渡过区, 而在这个过渡过区内单元的形状非常不规则, 并且难以选定基函数的阶数, 这将对迭代求解以及精度均有较大影响^[9]. 本文中, 对于 S_1 , 为保证求解精度, 采用小贴片的单元进行拟合, 并定义 Roof-top 基函数; 对于 S_2 , 为减少未知量并保证求解精度, 采用大贴片单元拟合, 并定义准正交高阶叠层矢量基函数. 因而, 定义在 S_1 和 S_2 区的基函数及其相互作用只需要按照通常的方法处理即可. 而对于 S_1 和 S_2 的交界处则需要单独处理. 该问题可以简单化为对图 1 中黑线所示单元的处理.

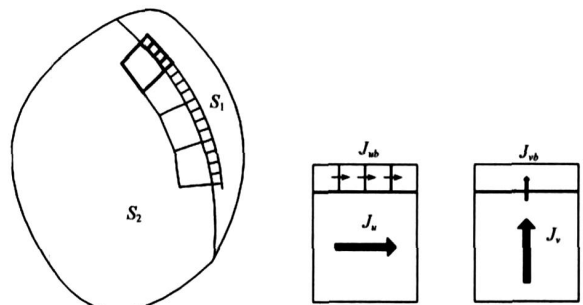


图 1 复杂结构目标建模

图 2 精细结构区与光滑结构区的交界处单元的电流描述

由于采用的是四边形基函数, 因而, 电流可分解为 u 和 v 两个方向单独考虑, 如图 2 所示. 当考虑 u 向电流时, 采用式 (2) 和式 (7) 进行描述, 此时 J_u 与 J_v 均不会跨过 S_1 和 S_2 的交线, 对交线处电流的法向分量没有贡献, 此时 S_2 区的大单元与 S_1 区的小单元互不相关, 因而对于 u 向电流, 因而只需要按通常的处理方法进行处理, 即 S_2 区使用高阶基函数, 而 S_1 区使用 Roof-top 基函数. 而对于 v 向电流, 当采用 v 向基函数进行描述时, 必须满足电流连续性条件, 而此时光滑结构区的大单元与精细结构区的 4 个小单元相邻, 若按通常的方法处理, 将不满足电流连续性条件. 本文所采用的方法中将与 S_2 区相邻的小单元作为总体, 看成一长条形单元, 并在其与 S_1 区相交的边上定义高阶基函数, 与 S_2 区相统一. 因而, 此时即可以满足公共边上的电流连续性条

件,又可以保证交界单元上的求解精度。

4 数值算例

首先,为说明该方法的正确性,我们以一矩形 PEC 平板为例来说明该方法的实现过程及其正确性。图 3 (a) 为一 $2\text{m} \times 4\text{m}$ 的平板,建模时将左边采用大尺寸单元建模,单元边长为 0.5m ,而右边采用小单元进行建模,单元边长为 0.125m 。300MHz 水平方向极化入射波的入射方向为 45° 斜入射。图 3 (b) 分别给出了采用 Roof-top 基函数,3 阶基函数和混合基函数时得到的结果。当采用 Roof-top 基函数时,共 976 未知量,采用 CG 迭代需 28 次;而采用大贴片建模时,使用 3 阶的基函数,需要 540 个未知量,迭代 60 次。若采用本文方法,并按照图 3 (a) 所示进行剖分,将得到 756 个未知量,迭代 51 次。当采用本文方法时,由于一部分采用高阶基函数,一部分采用低阶基函数,因而,迭代法求解时,迭代次数会介于完全采用 Roof-top 基函数和完全采用高阶基函数的结果。而后面的两个算例将不能完全采用高阶基函数进行了计算,因而,后面的算例仅对采用本文方法和完全采用 Roof-top 基函数时的迭代次数进行比较。通过图 3 (b) 可以看出,采用混合阶的基函数所得到的结果与 Roof-top 基函数所得结果完全吻合,并且采用混合阶基函数将兼顾两种基函数的优点。

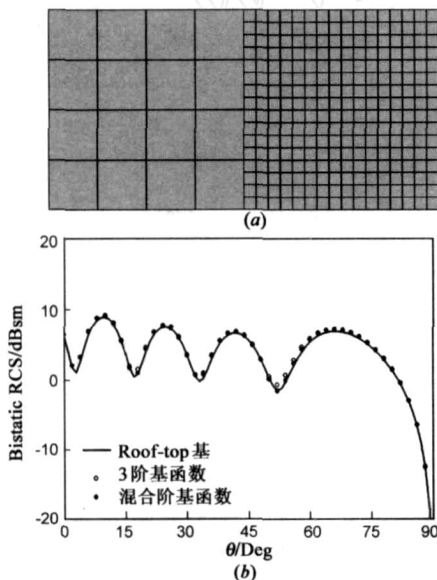


图 3 (a) $2\text{m} \times 4\text{m}$ 平板的建模示意图;
(b) $2\text{m} \times 4\text{m}$ 平板的 RCS 计算结果

另一算例为图 4 (a) 所示 PEC 板状结构。如图中所示,为说明该方法在复杂结构建模中的有效性,将该目标采用花式边缘,圆孔以及“CEM”的刻字表示目标的精细结构。而当我们采用 300MHz 水平方向极化的平面波垂直照射时,目标右边的复杂结构不能采用大尺寸的单元进行剖分,而目标左边则为大面积的连续光滑表面,

适宜采用大尺寸的单元建模。因而,充分利用目标的特点,将目标表面按图 4 (a) 中的黑线所示分解为两部分,右边为精细结构区,左边为光滑结构区。采用本文方法,在精细结构区,采用 Roof-top 基函数,得到 483 个单元,而左边采用大尺寸单元剖分,得到 83 个单元,并在这些单元上定义 2 阶的准正交高阶叠层矢量基函数。图 4 (b) 则给出了采用本文方法和完全采用 Roof-top 基函数计算得到的结果。当完全采用 Roof-top 基函数时,得到 3422 个未知量,填充阻抗矩阵用时 833.9s,而采用 CG 迭代法求解共迭代了 67 次,求解时间为 80.95s;而采用本文方法时,仅使用了 1446 个未知量,填充阻抗矩阵用时 65.6s,迭代法求解时共迭代了 83 次,求解时间为 17.26s。从图 4 (b) 可以看出,采用本文方法与采用传统方法所得结果是相吻合的。

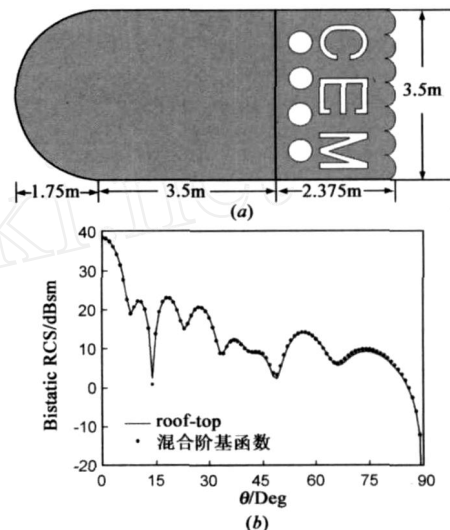


图 4 (a) CEM 板的几何结构示意图;
(b) CEM 板的 RCS 计算结果

第三个算例为图 5 (a) 所示三维 PEC 目标,其下半部分为半径 1.5m 的球体,上半部分为带有半径 0.25m 圆孔的柱状结构。此目标下半部分为光滑结构,适宜用大贴片的高阶基函数建模,而上半部分则由于存在一些精细结构不能采用大贴片单元进行了拟合,只能使用小尺寸单元进行拟合。因而,对目标上半部分采用边长 0.125m 的单元进行剖分,并定义 Roof-top 基函数,而下半部分采用边长 0.5m 的单元进行剖分,并定义 2 阶的准正交高阶叠层矢量基函数。所得的剖分单元如图 5 (a) 所示。而图 5 (b) 则给出了在完全采用 Roof-top 基函数和采用本文方法所得到的 RCS 结果的比较。此时入射波频率为 300MHz,由 $\theta = 45^\circ$, $\phi = 0^\circ$ 方向入射,水平方向极化。当完全采用 Roof-top 基函数时,需要使用 3064 个未知量,填充阻抗矩阵用时 581.5s,采用 CG 迭代法求解需迭代 65 次,求解时间为 66.06s,而采用本文方法时,需要未知量 1376 个,填充阻抗矩阵用时 66.2s,迭代

求解次数为 81 次,求解时间为 14.78s.可见本文方法即考虑到了目标表面精细结构的建模问题,又大幅度减少了未知量个数和求解时间.

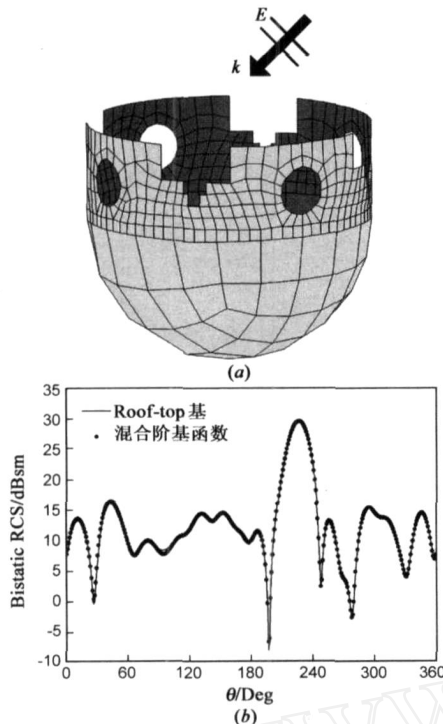


图 5 (a) 三维半球柱体的建模示意图;(b) 三维半球柱体的建模示意图的 RCS 计算结果

需要说明的是,为说明该方法的有效性,以上算例在建模时,光滑结构区的大单元均与四个精细结构区的小单元相邻.但实际上这些大单元可以与任意个数的小单元相邻,而并不仅仅是四个.

5 结束语

本文提出一种在采用定义在大贴片上的高阶基函数情况下对复杂结构目标进行精确建模的方法.该方法针对复杂结构目标的几何特点,在不同的区域采用了不同阶数的基函数,即使得在精细结构区能够采用低阶基函数精确建模,又使得在光滑结构区采用高阶基函数以减少未知量,因而充分利用了高阶基与低阶基的优点.并且,该方法满足电流连续性条件,保证了解的精确性.本文还给出适当算例,说明了该方法的高效性与精确性.

参考文献:

- [1] Harrington R F. Field Computation by Moment methods [M]. New York: Macmillan, 1968, 32 - 66.
- [2] W C Chew, J M Jin, E Michielssen, J Song. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetic [M]. Norwood, MA: Artech House, 2001, 637.

- [3] L R Hamilton, P A Macdonald. Electromagnetic scattering computations using high-order basis functions in the method of moments [A]. IEEE Antennas Propagat Symp Dig [C]. Orlando: IEEE Press 1994, 3. 2166 - 2169.
- [4] E Jorgensen, J L Volakis, P Mencke, O Breinbjerg. Higher order hierarchical Legendre basis functions for electromagnetic modeling [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 2004, 52 (11): 2985 - 2995.
- [5] E Jorgensen, O S Kim, P Meincke, O Breinbjerg. Higher order hierarchical discretization scheme for surface integral equations for layered media [J]. IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing, 2004, 42 (4): 764 - 772.
- [6] E Jorgensen, J L Volakis, P Meincke, O Breinbjerg. Higher order hierarchical Legendre basis functions for iterative integral equation solvers with curvilinear surface modeling [A]. IEEE Antennas Propagat Symp Dig [C]. Orlando: IEEE Press, 2002, 4. 618 - 621.
- [7] E Jorgensen, P Meincke, O Breinbjerg. A hybrid PO-Higher-order hierarchical MOM formulation using curvilinear geometry modeling [A]. IEEE Antennas Propagat Symp Dig [C]. Orlando: IEEE Press, 2003. 98 - 101.
- [8] E Jorgensen. Higher order equation methods in computational electromagnetics [D]. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark Ørsted-DTU, 2003.
- [9] M E Kowalski, B Singh. Application on the integral equation-asymptotic phase (IE-AP) method to three-dimensional scattering [J]. J. of Electromagn. Waves and Appl, 2001, 5 (7): 885 - 900.

作者简介:



任 仪 男,1983 年 1 月出生于安徽巢湖.现为电子科技大学博士研究生,研究方向为计算电磁学.
E-mail: renyi @uestc.edu.cn



聂在平 男,1946 年 10 月生于陕西西安,电子科技大学教授,博士生导师.1987 ~ 1989 年曾在美国伊利诺依大学电磁实验室从事研究工作.先后主持并完成 20 余项科研项目,获国家科技进步二等奖一项,省、部级一、二、三等科技进步奖七项,在国内外发表学术论文 300 余篇.主要研究兴趣:计算电磁学,电磁散射与逆散射,非均匀介质中的场与波,新一代移动通信中的多天线技术等. E-mail: zpnie @uestc.edu.cn