

# 一种求解 Maxwell 方程组的无条件 稳定时域精细积分法

赵鑫泰, 马西奎

(西安交通大学电气工程学院, 陕西西安 710049)

**摘 要:** 本文提出了一种基于精细积分技术求解 Maxwell 旋度方程的半解析时域方法. 由于精细积分技术的引入, 该方法不仅摆脱了 Courant-Frenrich-Levy 稳定性条件对时间步长的限制, 而且使得数值色散与时间步长的选取无关. 文中分别推导了时域精细积分法在计算区域内和吸收边界处的差分格式, 时域递推的计算格式; 并提出了时域递推过程涉及的矩阵不可逆问题的解决方案. 进行了实例计算, 并与解析解和时域有限差分法的结果进行了对比.

**关键词:** 时域精细积分法; 时域有限差分法; 稳定性; 数值色散; 谐振腔

**中图分类号:** TM 15 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 09-1600-05

## An Unconditionally Stable Precise Integration Time Domain Method for Solving Maxwell's Equations

ZHAO Xin-tai; MA Xi-ku

(School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shanxi 710049, China)

**Abstract** This paper presents a time domain semi-analysis method based on the precise integration (PI) technique for solving Maxwell's curl equations. Due to the introduction of the PI technique, the time domain method can not only eliminate the limitation of the stability condition for the time step size  $\Delta t$  but also make the numerical dispersion being independent of  $\Delta t$ . The finite difference schemes of the precise integration time domain (PIFD) method are deduced in computational domain and on absorbing boundary, respectively, and the time domain recursion scheme is also deduced. Moreover, the resolving scheme of the invertible matrix problem involving the time domain iteration is presented. Practical calculation is carried out, and the results are compared with the ones of the analysis solution and finite difference time domain method. The results show that the PIFD method is free from the restriction of the Courant-Frenrich-Levy stability condition. At the same time, the larger time step size will not deteriorate the numerical dispersion.

**Key words** precise integration time-domain (PIFD) method; finite difference time-domain (FDTD) method; stability; numerical dispersion; resonator

### 1 引言

时域有限差分 (FDTD)<sup>[1,2]</sup>方法在电磁学领域是一种非常有效的数值计算方法, 已广泛应用于电磁散射、天线、电磁兼容、生物电磁场以及电波传播等问题的计算与模拟. 然而, 传统时域有限差分法要受到 Courant-Frenrich-Levy (CFL) 条件的约束, 这就使得 FDTD 的应用范围受到限制. 比如, 当要模拟的问题具有微细机构, 为了准确的模拟其电磁特性, 空间步长必须足够小. 为了保证解的稳定

性, 时间步长也需相应地取得很小, 这将使计算的总时间猛增, 有时甚至不可实现. 1956年, Peaceman和 Rachford提出了交替隐式差分方法 (Alternating Direction Implicit Method 简称 ADI方法), 将原来的一个时间步分成两个子时间步, 虽然每一子步的解仍然是条件稳定的, 但两步复合的结果使得时域递推无条件稳定. 1999年, 日本学者 Nanak 首先将此技术应用到 FDTD 中, 提出了时域交替隐式差分 (ADI-FDTD) 算法<sup>[3,4]</sup>, 并证明了该算法在时间上的无条件稳定性, 即时间步长不需要满足 CFL 条件, 还用

该方法计算了导体板上天线辐射问题. 这一方法的提出引起了学术界的广泛关注, 随后 Cheng Zhizhang 等利用软件完成了三维 AD-FDTD 方法的稳定性证明<sup>[5]</sup>, Liu 给出了 IML 吸收边界 AD-FDTD 的表达形式<sup>[6]</sup>. AD-FDTD 的提出虽然在一定程度上克服了稳定性的局限, 但是过大的时间步长却又会造成数值色散的增加<sup>[7]</sup>.

为克服 FDTD 和 AD-FDTD 本身固有的缺陷, 本文应用一种基于精细积分<sup>[8]</sup>的时域算法求解 Maxwell 方程组. 该方法仅对空间的微算子用差分算子近似代替, 将 Maxwell 方程组转化为以空间离散点场量为状态变量的一阶常微分方程组, 然后采用时程积分的方法得到电磁波的传播特性. 本文还将 EngquistM adja<sup>[9]</sup>吸收边界引入时域精细积分法. 时域精细积分法不但消除了 CFL 条件对时间步长的限制, 而且使数值色散不再受到时间步长的影响. 利用该方法分析电小尺寸问题, 较时域有限差分法更有效且更精确. 实例计算获得了满意的结果.

## 2 精细积分法的原理与实现

### 2.1 Maxwell 方程组的空间离散化

时域精细积分法在空间域上的处理类似于 FDTD 的离散技术. 现在, 从 Maxwell 旋度方程出发, 采用 Yee 元胞进行空间离散. 在离散空间中, 用  $F_a(i, j, k)$  表示场分量

$$F_a(i, j, k) = F_a(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (1)$$

其中,  $a = x, y$  或  $z$ ;  $i, j, k$  分别表示离散后沿空间  $x, y, z$  方向的序号;  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  分别表示  $x, y, z$  方向的空间步长.

Maxwell 旋度方程表示为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \quad (2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2b)$$

利用中心差分近似 6 个场分量对空间坐标的偏导数, 则由式 (2) 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dE_y(i, j + \frac{1}{2}, k)}{dt} = & \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[ -\sigma(i, j + \frac{1}{2}, k) E_y(i, j + \frac{1}{2}, k) \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{H_x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{H_z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

上式就是 Maxwell 旋度方程  $E_y$  分量的空间离散形式. 它是  $E_y(i, j + \frac{1}{2}, k)$  满足的一阶常微分方程. 其余场分量的空间离散形式可用相同的方法得到.

### 2.2 吸收边界条件及激励源

为了将求解区域限制在有限的空间内, 我们取计算区域的边界为  $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = d$  其中,  $a > 0, b > 0$  和  $d > 0$  对边界的处理采用 EngquistM adja 一阶近似吸收边界条件, 以  $x = a$  边界为例

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f \Big|_{x=a} = 0 \quad (4)$$

下面讨论 EngquistM adja 一阶近似吸收边界条件的时域精细积分 (Precise-Integration-T in e-D o m a i n, PIID) 离散形式. 将式 (4) 在  $(i + 1/2, j + 1/2, k)$  点作空间离散, 得到

$$\frac{dE_y}{dx} \Big|_{i+1/2, j+1/2, k} \approx \frac{E_y(i+1, j+1/2, k) - E_y(i, j+1/2, k)}{\Delta x} \quad (5)$$

其中  $(i + 1)\Delta x = a$ . 再利用线性插值关系

$$E_y\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) = \frac{1}{2} \left[ E_y\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + E_y\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k\right) \right] \quad (6)$$

将式 (5)、(6) 代入到式 (4) 中, 得到

$$\begin{aligned} \frac{dE_y(i, j + 1/2, k)}{dt} + \frac{dE_y(i + 1, j + 1/2, k)}{dt} = & -2\alpha \left[ i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right] \frac{E_y(i + 1, j + 1/2, k) - E_y(i, j + 1/2, k)}{\Delta x} \quad (7) \end{aligned}$$

将式 (3) 代入式 (7), 得到

$$\begin{aligned} \frac{dE_y(i + 1/2, j + 1/2, k)}{dt} = & -2\alpha \left[ i + \frac{1}{2}, j + 1/2, k \right] \\ & \cdot \frac{E_y(i + 1, j + 1/2, k) - E_y(i, j + 1/2, k)}{\Delta x} - \\ & \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[ -\sigma\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) E_y\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) \right. \right. \\ & \cdot \left. \left. \frac{H_x\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - H_x\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{H_z\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - H_z\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} \right] \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

上式就是吸收边界上场分量  $E_y$  满足的 EngquistM adja 一阶近似吸收边界条件的 PIID 离散形式. 吸收边界上其余场分量满足的常微分方程可用相同的方法得到.

PIID 法激励源的引入与 FDTD 法相同. 如果激励源所在位置的场分量已被赋以特定的值, 那么这些场分量将无需再被求解, 故可以从被求解变量组中删除.

### 2.3 常微分方程组求解

综合计算区域内和吸收边界上场量满足的常微分方程 (如式 (8) 和式 (3)) 以及激励源的表达式, 不难得到如下矩阵形式的常微分方程组

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t) \quad (9)$$

其中,  $u$  包含待求解的全部场分量,  $M$  是系数矩阵,  $f(t)$  是由于激励源的引入产生的非齐次项。

对于常微分方程组式 (9), 时域精细积分法采用时程积分的方法求解。根据常微分方程组理论可知, 式 (9) 的通解可以表示为

$$u = e^{(t-t_0)M} u_0 + e^M \int_0^t e^{-Ms} f(s) ds \quad (10)$$

式中,  $u_0$  为  $u$  的初始值。

不失一般性, 这里假设非齐次项在时间步  $(t_n, t_{n+1})$  内是线性的, 即

$$f(t) = \eta_0 + \eta_1 \cdot (t - t_n) \quad (11)$$

现在令时间步长为  $t$  则一系列等步长  $t$  的时刻为  $t_n = nt (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 于是由式 (10) 得到逐步递推的计算公式

$$u_{n+1} = T^L u_n + M^{-1} (\eta_0 + M^{-1} \eta_1) - M^{-1} L \eta_0 + M^{-1} \eta_1 \cdot t \quad (12)$$

其中,  $T = \exp(Mt)$ ,  $u_n = u(t_n)$ 。可见, 求得指数矩阵  $T$  后, 代入初值  $u_0$ , 就可以方便地逐步递推出  $u$  在各个时刻的值。

### 2.4 指数矩阵的精细计算<sup>[8]</sup>

利用指数函数的加法定理, 有

$$T = \exp(M \cdot t) = [\exp(M \cdot t/n)]^n \quad (13)$$

一般取  $m = 2^N, N = 20$ 。由于  $t$  本身是不大的时间区段, 则  $\Delta t = t/n$  将是非常小的时间区段。因此对于  $\Delta t$  的区段, 有

$$\exp(H \cdot \Delta t) \approx I + M \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} (M \cdot \Delta t)^2 + \frac{1}{3!} (M \cdot \Delta t)^3 + \frac{1}{4!} (M \cdot \Delta t)^4 = I + T_\alpha \quad (14)$$

其中

$$T_\alpha = M \cdot \Delta t + \frac{1}{2} (M \cdot \Delta t)^2 + \frac{1}{3!} (M \cdot \Delta t)^3 + \frac{1}{4!} (M \cdot \Delta t)^4 \quad (15)$$

对式 (13) 做分解

$$T = (I + T_\alpha)^n = (I + T_\alpha)^{2^{N-1}} \times (I + T_\alpha)^{2^{N-2}} \quad (16)$$

这种分解一直做下去共  $N$  次。又因为

$$(I + T_\alpha) \times (I + T_\alpha) = I + 2T_\alpha + T_\alpha \times T_\alpha \quad (17)$$

相当于以下语句

```
for i = 1:N
    Tα = 2Tα + Tα × Tα
end
(18)
```

当循环结束后再做

$$T_\alpha = I + T_\alpha \quad (19)$$

式 (15)、(18)、(19) 便是指数矩阵  $T$  的精细计算公式。可以看出, 按式 (18) 进行递推计算, 排除了  $I$  参与加法运算, 因此避免了  $T_\alpha$  中元素的严重丧失有效数字, 从而保证了各  $T_\alpha$  和  $T$  的极高精度。

### 3 矩阵不可逆的解决方案

在某些情况下, 常微分方程组式 (9) 中的矩阵  $M$  是不可逆的, 这使得式 (12) 的迭代便无法进行, 因此, 寻找  $M$  矩

阵不可逆的原因, 并设法将其消除, 是实现精细积分法数值计算之关键。由线性代数理论知, 矩阵不可逆意味着矩阵的行 (列) 向量之间线性相关。在精细积分法中, 行向量之间的线性相关表明待求解的各离散电磁场分量之间存在着某种线性关系。因此, 寻找离散场分量之间的线性关系就成为解决矩阵不可逆问题的关键。

实际上, 这种各场分量之间线性相关的表现形式在计算区域内、吸收边界处以及吸收边界相交的棱边的邻域内都有所不同, 下面分别讨论。

#### 3.1 计算区域内的线性相关

由 Maxwell 方程组不难知道, 与同一节点相关联的三个电场分量只有两个是独立的, 第三个可以根据高斯定理由前两个的线性组合得到。例如, 取一个节点, 与之相联

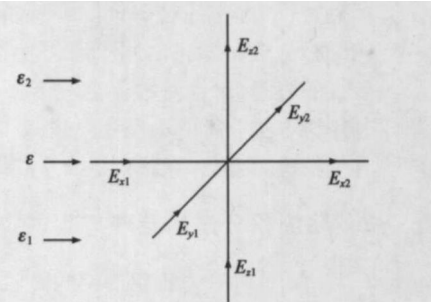


图 1 离散电通量图示

系的电场分量满足高斯定理, 空间离散形式如图 1 所示。其中,  $xoy$  平面的介电常数为  $\epsilon_2, z > 0$  空间的介电常数为  $\epsilon_1, z < 0$  空间的介电常数为  $\epsilon_2$ 。在无源区域中, 高斯定理  $\nabla \cdot D = 0$  在该节点邻域可以表示为

$$\epsilon_2 E_{x2} \Delta y \Delta z - \epsilon_1 E_{x1} \Delta y \Delta z + \epsilon_2 E_{y2} \Delta x \Delta z - \epsilon_1 E_{y1} \Delta x \Delta z + \epsilon_2 E_{z2} \Delta x \Delta y - \epsilon_1 E_{z1} \Delta x \Delta y = 0 \quad (20)$$

由上式, 得到

$$E_{y2} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} E_{x2} + \frac{\Delta y}{\Delta x} E_{x1} + E_{y1} - \frac{\epsilon_2 \Delta y}{\epsilon_1 \Delta z} E_{z2} + \frac{\epsilon_1 \Delta y}{\epsilon_2 \Delta z} E_{z1} \quad (21)$$

显然, 式 (21) 中任一电场分量都可以用其余的电场分量来线性表示。

计算区域中磁场分量的线性关系可根据磁通连续性原理用相同的方法得到。

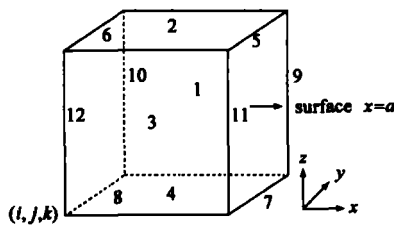
#### 3.2 吸收边界处的线性相关

在吸收边界处, 由于切向场分量满足的微分方程的形式发生了变化, 故 3.1 节中的线性相关不再满足。现在, 以  $x = (i+1)\Delta x = a$  吸收边界面上的场分量为例, 分析边界处及其邻域内电、磁场分量之间的线性关系。该吸收边界处及其邻域内的电、磁场分量的离散分布如图 2 所示。

首先, 写出吸收边界处电场分量满足的常微分方程组。由式 (7) 知, 在  $x = (i+1)\Delta x = a$  边界上,  $E_y$  满足的关系式为

$$\frac{dE_y(8)}{dt} + \frac{dE_y(7)}{dt} = -2c(4) \frac{E_y(7) - E_y(8)}{\Delta x} = -2 \frac{\eta(4) E_y(7) - E_y(8)}{\mu(4) \Delta x} \quad (22)$$

和



- 1:  $i+\frac{1}{2}, j+1, k+\frac{1}{2}$     2:  $i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1$     3:  $i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}$     4:  $i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k$
- 5:  $i+1, j+\frac{1}{2}, k+1$     6:  $j, j+\frac{1}{2}, k+1$     7:  $i+1, j+\frac{1}{2}, k$     8:  $i, j+\frac{1}{2}, k$
- 9:  $i+1, j+1, k+\frac{1}{2}$     10:  $j, j+1, k+\frac{1}{2}$     11:  $i+1, j, k+\frac{1}{2}$     12:  $i, j, k+\frac{1}{2}$

图 2  $x=a$  边界处电磁场分量分布

$$\frac{dE_y(6)}{dt} + \frac{dE_y(5)}{dt} = -2c(2) \frac{E_y(5) - E_y(6)}{\Delta x}$$

$$= -2 \frac{\eta(2)E_y(5) - E_y(6)}{\mu(2) \Delta x} \quad (23)$$

其中,  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  是媒质的波阻抗. 在  $x = (i+1)\Delta x = a$  边界上,  $E_z$  满足的关系式为

$$\frac{dE_z(11)}{dt} + \frac{dE_z(12)}{dt} = -2c(3) \frac{E_z(11) - E_z(12)}{\Delta x}$$

$$= -2 \frac{\eta(3)E_z(11) - E_z(12)}{\mu(3) \Delta x} \quad (24)$$

和

$$\frac{dE_z(9)}{dt} + \frac{dE_z(10)}{dt} = -2c(1) \frac{E_z(9) - E_z(10)}{\Delta x}$$

$$= -2 \frac{\eta(1)E_z(9) - E_z(10)}{\mu(1) \Delta x} \quad (25)$$

然后, 给出边界邻域内磁场分量满足的常微分方程. 由  $H_x, H_y$  的 PFD 空间离散格式得

$$\frac{dH_x(4)}{dt} = -\frac{1}{\mu(4)} \left[ \frac{E_y(7) - E_y(8)}{\Delta x} - \frac{E_x\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right) - E_x\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta y} \right] \quad (26)$$

$$\frac{dH_x(2)}{dt} = -\frac{1}{\mu(2)} \left[ \frac{E_y(5) - E_y(6)}{\Delta x} - \frac{E_x\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k+1\right) - E_x\left(i+\frac{1}{2}, j, k+1\right)}{\Delta y} \right] \quad (27)$$

$$\frac{dH_x(3)}{dt} = \frac{1}{\mu(3)} \left[ \frac{E_z(11) - E_z(12)}{\Delta x} - \frac{E_x\left(i+\frac{1}{2}, j, k+1\right) - E_x\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta z} \right] \quad (28)$$

$$\frac{dH_y(1)}{dt} = \frac{1}{\mu(1)} \left[ \frac{E_z(9) - E_z(10)}{\Delta x} - \frac{E_x\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k+1\right) - E_x\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right)}{\Delta z} \right] \quad (29)$$

最后分别将式 (22) 代入式 (26)、式 (23) 代入式 (27)、式 (24) 代入式 (28)、式 (25) 代入式 (29), 假设初始条件为 0. 磁导率在各个位置均相同, 其余介质参数只在  $Z$  方向发生变化, 经过简单的运算有

$$H_y|_1 = -\frac{1}{2\eta|_{k+1/2}} [E_z|_9 + E_z|_{10}]$$

$$- \frac{\Delta y}{\Delta z} \left[ H_z|_2 - \frac{1}{2\eta|_{k+1}} E_y|_5 - \frac{1}{2\eta|_{k+1}} E_y|_6 \right]$$

$$+ \frac{\Delta y}{\Delta z} \left[ H_z|_4 - \frac{1}{2\eta|_k} E_y|_7 - \frac{1}{2\eta|_k} E_y|_8 \right]$$

$$+ \left[ H_z|_2 + \frac{1}{2\eta|_{k+1/2}} (E_z|_{11} + E_z|_{12}) \right] \quad (30)$$

利用相同的数学推导过程, 可以得到  $y = (j+1)\Delta y = b$  面和  $z = (k+1)\Delta z = d$  面及其邻域中离散场分量的线性相关关系式.

### 3.3 棱边邻域中的线性相关

在两个吸收边界相交的棱边的邻域内, 场分量满足的线性关系与单一吸收边界的情况又有所不同. 但棱边邻域中各场分量满足的线性关系仍可用 3.2 节中的方法得到. 这里不再赘述.

将 3.1, 3.2, 3.3 小节中得到的线性关系式直接代入式 (9), 并将可用线性关系计算的场分量的全微分方程从原常微分方程组中删除. 最后, 强加激励源和良导体的条件, 即可得到可逆的  $M$  矩阵.

## 4 误差分析

时域精细积分法用解析法对时间变量进行求解, 此外所有的近似 (包括空间离散、吸收边界) 均沿用时域有限差分法已有的成果. 关于求解时间变量引入的误差的分析, 可参考文献 [8], 这里就不再赘述了.

## 5 数值结果和分析

为说明时域精细积分法的正确性和优越性, 本文分别用时域精细积分法和时域有限差分法对矩形谐振腔进行了计算, 并对两种方法得到的结果进行了比较.

谐振腔几何尺寸为 6cm、8cm 和 4cm. 其中充满空气, 并假设腔壁为良导体. PFD 和 FDTD 的空间步长均为 1cm. 根据 CFL 稳定性条件  $t \leq 19.25\text{ps}$  FDTD 的时间步长取为  $t_{\text{FDTD}} = 1\text{ps}$  迭代 3000 步; 而 PFD 的时间步长分别取为  $t_{\text{PFD1}} = 1\text{ps}$  和  $t_{\text{PFD2}} = 60\text{ps}$  迭代 3000 步和 50 步. 图 3 给出谐振腔中心处电场分量  $E_z$  的幅值, 可以看出 PFD 保持

稳定. 迭代更多的时间步未出现不稳定现象.

表 1 给出了取不同时间步长  $t$  时, 采用 P1TD 方法计算得到的谐振腔谐振频率的计算结果. 可以看出, 谐振频率的相对误差并没有因时间步长的增加而增大, 它只与空间离散的数值色散有关. 图 4 分别给出采用 FDTD 和 P1TD 方法计算矩形谐振腔主模的相对误差. 为清楚起见, 这里采用相对时间步长  $t/t_{FDTDMAX}$  作为横坐标. 可以看到, 当  $t/t_{FDTDMAX} \leq 1$  时, FDTD 和 P1TD 两者的相对误差差异不大; 但当  $t/t_{FDTDMAX} > 1$  时, FDTD 则发散, 而 P1TD 仍然稳定且相对误差保持不变. 表 2 给出了分别用 FDTD 和 P1TD2 (不满足稳定性条件的 P1TD) 得到的五个谐振频率点.

表 1 不同情况下 P1TD 的谐振频率的计算结果

解析解 (GHz)	P1TD 方法					
	$t_1 = 40t_{FDTD}$		$t_2 = 60t_{FDTD}$		$t_3 = 80t_{FDTD}$	
	结果 (GHz)	相对 误差	结果 (GHz)	相对 误差	结果 (GHz)	相对 误差
3.125	2.983	4.544%	2.983	4.544%	2.983	4.544%

表 2 P1TD, FDTD 不同谐振频率计算结果比较

解析解 (GHz)	FDTD 法		P1TD 法	
	数值结果 (GHz)	相对误差	数值结果 (GHz)	相对误差
3.125	2.983	4.544%	2.983	4.544%
4.881	4.750	2.684%	4.750	2.684%
5.340	5.450	2.060%	5.450	2.060%
7.208	6.917	4.037%	6.917	4.037%
7.289	7.333	0.604%	7.333	0.604%

矩形谐振腔算例表明, P1TD 法的计算精度不会由于时间步长的增大而降低. 这一特性也是由时程积分的运算决定的. 总之, 由于时域精细积分法在时域上的求解不是

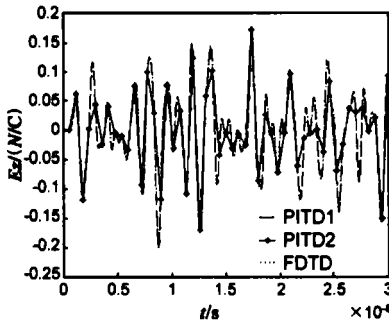


图 3 P1TD、FDTD 计算  $E_z$  的结果对比

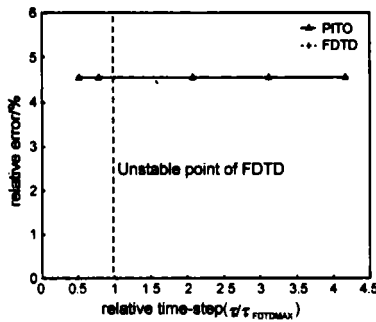


图 4 FDTD、P1TD 相对时间步长的相对误差示意图

采用差分近似, 而是利用积分直接得到计算机精度范围内的解析解, 因此只要满足奈奎斯特抽样准则, 那么时间步长的大小对该数值方法不会有影响.

### 6 结论

利用 P1TD 法求解 Maxwell 方程, 不仅时间步长  $t$  不受 CFL 稳定性条件的限制, 而且计算精度不会受到时间步长取值的影响. 数值结果表明, 与 FDTD 方法相比较, 该算法不仅稳定, 在增大时间步长的情况下仍然可以保持较高的精度.

### 参考文献:

- [1] Yee K S Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell equations in isotropic media [J]. IEEE Trans Antennas Propagat 1966 14(3): 302-307
- [2] Taflov A. Computational Electrodynamics [M]. Boston, MA: Artech House, 2000. 1-30, 349-372
- [3] Takefumi N, Aki A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. IEEE Trans MTT, 1999 47(10): 2003-2007
- [4] Takefumi N, Aki 3-D ADI-FDTD method-unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equation [J]. IEEE Trans MTT, 2000 48(10): 1743-1748
- [5] Zheng F H, Chen Z Z, Zhang J Z Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite difference time-domain method [J]. IEEE Trans MTT, 2000 48(9): 1550-1558
- [6] Liu G. Perfectly matched layer media for an unconditionally stable three dimension ADI-FDTD method [J]. IEEE Microwave and Guided Letter, 2000 10(7): 261-263
- [7] Zhen F H, Chen Z Z. Numerical dispersion analysis of the unconditionally stable 3-D ADI-FDTD method [J]. IEEE Trans MTT, 2001, 49(5): 1006-1009
- [8] Zhong W X, Williams F W. A precise time-step integration method [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science 1994 208(6): 427-430
- [9] Engquist B, Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves [J]. Math Comput 1977, 31(139): 629-651

### 作者简介:

赵鑫泰 男, 1976年生, 博士研究生, 目前从事电磁场数值计算方面的研究工作. E-mail: zxtlew@ma.ist.xjtu.edu.cn