

命题逻辑中的程度化方法

王国俊^{1,2}, 宋建社³

(1. 陕西师范大学数学研究所, 陕西西安 710062; 2. 西安交通大学基础科学
研究中心, 陕西西安 710049; 3. 西安高技术研究所, 陕西西安 710025)

摘 要: 在二值命题逻辑、各类 n 值命题逻辑和各类模糊命题逻辑中引入了命题的诱导函数的概念, 在此基础上分别就离散和连续情形利用均匀概率空间的无穷乘积和积分语义学方法引入了命题的真度概念. 其次, 基于演绎定理建立了程度化的近似推理理论. 最后, 提出了有限逻辑理论的相容度理论.

关键词: 命题逻辑; 诱导函数; 真度; 近似推理; 相容度

中图分类号: O 142 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 02-0252-06

Graded Method in Propositional Logic

WANG Guo-jun^{1,2}, SONG Jian-she³

(1. Institute of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi an, Shaanxi 710062, China;
2. Research Center for Science, Xi an Jiaotong University, Xi an, Shaanxi 710049, China;
3. Xi an HiTech Institute, Xi an, Shaanxi 710025, China)

Abstract: The concept of proposition induced functions is proposed in the present paper, then the concept of truth degrees is introduced by means of infinite product of evenly distributed probability spaces and integrated semantics respectively with discrete and continuous situations. Next, a graded approximate reasoning theory is established. Finally, theory of consistency degrees of finite theories is also proposed.

Key words: propositional logic; induced function; truth degree; approximate reasoning; consistency degree

1 引言

数理逻辑的特点在于形式化和符号化, 它注重形式推理而不重视数值计算. 数理逻辑是高度精细的学科, 但正因如此它又是很古板的概念两极化的学科. 比如, 设 A 是一个合式公式, 如果对每个赋值 v 均有 $v(A) = 1$, 则称 A 为重言式, 如果对每个赋值 v 均有 $v(A) = 0$, 则称 A 为矛盾式. 那么对大多数既非重言式又非矛盾式的合式公式而言, 如何去评价其真伪的程度呢? 又如, 一个逻辑理论被称为是相容的, 是指从它推不出矛盾式来, 否则这个理论就是不相容的. 那么相容的理论是否有相容程度不同的等级呢? 这些都是传统的数理逻辑理论所不关心的问题. 本文的目的则是要尝试对数理逻辑中的基本概念进行程度化, 从而建立起形式推理与数值计算之间的桥梁.

2 命题逻辑的语构理论

2.1 命题集

定义 1 设 $S = \{p_1, p_2, \dots\}$ 是可数集, 0 是特定元, $\&$, \vee 是二元运算, $F(S)$ 的组成如下:

$$(i) S \subseteq F(S), 0 \in F(S).$$

(ii) 若 $A, B \in F(S)$ 则

$$A \& B, A \vee B, A \neg B, A \rightarrow B \in F(S).$$

(iii) $F(S)$ 中的元都可用 (i) (ii) 在有限步之内得出. 称 S 中的元为原子命题或原子公式, 称 $F(S)$ 中的元为命题或公式或 wff. 称 0 为矛盾式. 又, $\forall A \in F(S)$, 规定 $A \neg \neg A = A$.

2.2 二值命题逻辑中的公理模式

在经典的二值命题逻辑 L 中, $\forall A, B \in F(S)$,

$$A \vee \neg A = A \vee B.$$

$$A \vee B = (A \vee B).$$

$$A \& B = A \& B.$$

L 中的公理模式如下:^[1]

$$(L1) A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

$$(L2) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

$$(L3) (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A).$$

L 中的推理规则为 MP, 即, 从 $A \rightarrow B$ 与 A 可得 B .

设 $C \in F(S), B \in F(S)$, 称 B 为 C 的推论并记为 $C \vdash B$. 若 $F(S)$ 中存在有限序列 $A_1, \dots, A_n = B$ 满足 $\forall i \leq n, A_i$ 是公理, 或 $A_i = C$ 或有 $j, k < i$ 使 A_i 是由 A_j 和 A_k 运用 MP 而得的结果. $C \vdash B$ 简记为 $C \vdash B$, 这时称 B 为 L 中的定理.

2.3 Lukasiewicz 多值命题逻辑中的公理模式

在 Lukasiewicz n 值命题逻辑 $Lu(n)$ 中以及在 Lukasiewicz 连续值命题逻辑 $Lu([0, 1])$ 中, $\forall A, B \in F(S)$,

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &= (A \rightarrow B) \rightarrow B. \\ A \&B &= (A \rightarrow B) \rightarrow A. \\ A \vee B &= A \&(A \rightarrow B). \end{aligned}$$

$Lu(n)$ 与 $Lu([0, 1])$ 中的公理模式如下:^[12]

- (Lu1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
- (Lu2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
- (Lu3) $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.
- (Lu4) $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Lukasiewicz 命题逻辑中的推理规则仍为 MP, $C \vdash B$ 的意义同二值命题逻辑.

2.4 模糊命题逻辑系统 L^* 中的公理模式

为尝试给模糊推理奠定严格的逻辑基础, 作者引入了模糊命题逻辑系统 L^* (参看 [3~5]). 在 L^* 中,

$$\begin{aligned} \forall A, B \in F(S), \\ A \rightarrow B &= (A \rightarrow B) \rightarrow B. \\ A \&B &= (((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B). \end{aligned}$$

L^* 中的公理模式如下:^[15]

- (L^* 1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
- (L^* 2) $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.
- (L^* 3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$.
- (L^* 4) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
- (L^* 5) $A \rightarrow A$.
- (L^* 6) $A \rightarrow A \rightarrow B$.
- (L^* 7) $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow A$.
- (L^* 8) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$.
- (L^* 9) $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$.
- (L^* 10) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B)$.

L^* 中的推理规则仍为 MP, $C \vdash B$ 的意义同前.

2.5 Gödel n 值命题逻辑 $G(n)$ 与连续值命题逻辑 $G([0, 1])$

在 Gödel 系统 $G(n)$ 与 $G([0, 1])$ 中, $\forall A, B \in F(S)$, $A \&B = A \rightarrow B$.

Gödel 系统中的公理模式如下:^[21]

- (G1) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
- (G2) $A \&B \rightarrow A$.
- (G3) $A \&B \rightarrow B \&A$.
- (G4) $A \&(A \rightarrow B) \rightarrow (B \&(B \rightarrow A))$.
- (G5) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \&B \rightarrow C)$.
- (G6) $(A \&B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$.

$$(G7) \neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow C).$$

$$(G8) 0 \rightarrow A$$

$$(G9) A \rightarrow A \&A$$

Gödel 系统中的推理规则也是 MP, $C \vdash B$ 的意义也同前.

2.6 演绎定理

2.6.1 二值命题逻辑系统 L 中的演绎定理

定理 1 设 $C \in F(S), A, B \in F(S)$, 则当 $C \vdash A$ 时有 $C \vdash A \rightarrow B$. 反之亦然.

2.6.2 Lukasiewicz 命题逻辑系统 Lu 中的演绎定理

定理 2 设 $C \in F(S), A, B \in F(S)$ 则当 $C \vdash A$ 时存在自然数 n 使 $C \vdash A^n \rightarrow B$. 反之亦然.

$$\begin{aligned} \text{以上 } A^1 &= A, A^2 = A \&A = (A \rightarrow A), \\ A^{n+1} &= A^n \&A, (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

2.6.3 模糊命题逻辑系统 L^* 中的演绎定理

定理 3 设 $C \in F(S), A, B \in F(S)$, 则当 $C \vdash A$ 时有 $C \vdash A^2 \rightarrow B$. 反之亦然.

$$\text{以上 } A^2 = A \&A = (A \rightarrow A).$$

2.6.4 Gödel 命题逻辑系统 G 中的演绎定理

定理 4 设 $C \in F(S), A, B \in F(S)$ 则当 $C \vdash A$ 时有 $C \vdash A \rightarrow B$. 反之亦然.

3 命题逻辑的语义理论

3.1 赋值域上的运算

在第 1 节中讨论的命题逻辑的语构理论从命题集自身中的公理集与 MP 规则以及演绎定理出发, 展开逻辑演绎理论, 不需要命题集 $F(S)$ 以外的其它数学结构的帮助. 但命题逻辑的语义理论则需要借助外来的工具, 即, 需要利用赋值域和赋值来判定公式的好坏. 这时赋值域 V 上应当有与 $F(S)$ 中的 $\&$, \rightarrow 和 \neg 等相对应的运算, 通常以 $*$ 记与 $\&$ 对应的运算. 下面是本文用到的 V .

$$3.1.1 \quad V = \{0, 1\}.$$

这时 $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, a \&b = 0$ 当且仅当 $a = 1$ 且 $b = 0. a * b = a \rightarrow b = ab, a \rightarrow b = \max\{a, b\}$.

$$3.1.2 \quad V = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1} \right\}.$$

除 Gödel 逻辑语义外, $a \rightarrow b = 1 - a, a \&b = \min\{a, b\}, a \rightarrow b = \max\{a, b\}$. 在 Lu 语义中, $a \rightarrow b = (1 - a + b) \rightarrow 1$, 在 L^* 的语义中当 $a \rightarrow b$ 时 $a \&b = 1$, 否则 $a \&b = (1 - a) \rightarrow b$.

在 Gödel 逻辑语义中, 当 $a \rightarrow b$ 时 $a \&b = 1$ 否则 $a \&b = b, a \rightarrow a = 0$, 所以当 $a > 0$ 时, $a \rightarrow a = 0$, 一般 $a \rightarrow a = a$.

$$3.1.3 \quad V = [0, 1]$$

各运算定义同上.

3.2 命题诱导的函数

定义 2 设 $A \in F(S)$, A 中含有的原子公式为 p_1, \dots, p_n . 如果 A 中含有 \neg , 则以 $(\neg p_i \rightarrow p_i)$ 取代 \neg . 这时 A 诱导一个 n 元函数 $\bar{A}: V^n \rightarrow V$ 如下: $\bar{A}(x_1, \dots, x_n)$ 的值是用与逻辑

辑连接词 & , , 和 相对应的 V 上的运算 * , , , 和 将 x_1, \dots, x_n 连接而成,其方式恰如用逻辑连接词 & , , 和 将 p_1, \dots, p_n 连接而得出 A 那样.称 \bar{A} 为 A 的诱导函数.

例 1 设 $V = \{0, 1\}, A = p_1 \ p_2 \ p_3$, 则 $\bar{A}: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ 的定义为

$$\bar{A}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \ x_2 \ x_3 = \max\{x_1, x_2\} (1 - x_3).$$

比如, $\bar{A}(0, 1, 1) = 1 \ 0 = 0,$

$$\bar{A}(0, 0, 1) = 0 \ 1 = 1, \bar{A}(1, 1, 1) = 1 \ 0 = 0 \text{ 等等.}$$

例 2 设 $V = [0, 1], A = p_1 \ (p_2 \ p_3)$ 则在 Lukasiewicz 系统中, $\bar{A}: [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]$ 为

$$\begin{aligned} \bar{A}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \ (x_2 \ x_3) \\ &= [1 - x_1 + (x_2 \ x_3)] \ 1 \\ &= [1 - x_1 + (1 - x_2 + x_3) \ 1] \ 1. \end{aligned}$$

比如,

$$\bar{A}(0.3, 0.8, 0.5) = [0.7 + (0.2 + 0.3)] \ 1 = [0.7 + 0.5] \ 1 = 1$$

$\bar{A}(0.9, 0.7, 0.2) = [0.1 + (0.3 + 0.2)] \ 1 = 1 = 0.6$ 等等.

例 3 设 $V = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}, A = p_1 \ p_2$, 则在 Gödel 系统中为 $\bar{A}: \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}^2 \rightarrow \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ 为 $\bar{A}(x_1, x_2) = x_1 \ x_2 = (x_1 \ 0) \ x_2$. 比如, $\bar{A}\left(0, \frac{2}{3}\right) = (0 \ 0) \ \frac{2}{3} = 1$
 $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \bar{A}\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{1}{3} \ 0\right) \ 0 = 0 \ 0 = 0$ 等等.

3.3 赋值

定义 3 设 $v: F(S) \rightarrow V$ 是映射. 如果 v 是同态, 即 $\forall A, B \in F(S), v(A \& B) = v(A) * v(B), v(A \ B) = v(A) \ v(B), v(A \ B) = v(A) _ v(B), v(A \ B) = v(A) \ v(B), v(\ A) = v(A), v(0) = 0$.

则称 v 为 $F(S)$ 的赋值. $F(S)$ 的赋值的全体之集记为 \mathcal{V} . $\forall A \in F(S)$, 也称 $v(A)$ 为 A 的赋值.

定义 4 设 $A \in F(S)$ 如果 $\forall v \in \mathcal{V}, v(A) = 1$, 则称 A 为重言式. 若 $\forall v \in \mathcal{V}, v(A) = 0$ 则称 A 为矛盾式.

定义 4 只是刻画了最好与最差的两类公式, 自然是过于粗糙和不完整的. 有鉴于此, Glas 在文献 [7] 中引入了重言式的概念. 我们在文献 [8] 中引入了更广泛的 (重言式) 概念. 值得注意的是, 这种借助赋值对公式进行估计的方法只考虑了各种可能赋值的下界. 后来我们又分别就二值命题逻辑与连续值命题逻辑的情况提出了严格的命题的真度理论^[9,10]. 以下对 n 值赋值域提出逻辑公式的真度理论.

3.4 离散情形下逻辑公式的真度

设 $V = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$. 因为赋值 $v: F(S) \rightarrow V$ 是

同态, 所以设 $wff A = A(p_1, \dots, p_n)$, 则由定义 2 和定义 3 得

$$v(A) = \bar{A}(v(p_1), \dots, v(p_n)), v$$

这里 p_1, \dots, p_n 为原子公式, 0 不再出现, 因为它可用 $(p_1 \ p_1)$ 取代. 因为 $F(S)$ 是由 S 生成的自由代数, 所以任一映射 $v_0: S \rightarrow V$ 都可扩充为一个唯一的赋值 $v: F(S) \rightarrow V$. 即, $v(p_1), \dots, v(p_n)$ 可在 V 中任意取值. 所以当 v 在 \mathcal{V} 中变化时 $v(A) = \bar{A}(x_1, \dots, x_n)$ 是从 V^n 到 V 的函数. 由以上分析可见, \mathcal{V} 与 V 之间有一一对应关系, $\forall v \in \mathcal{V}, (v) = (v(p_1), v(p_2), \dots) \in V^n$.

定义 5 设 $V = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, 给 V 赋予均匀的概率测度, 设 μ 为 V^n 上的无穷乘积测度^[11]. 设 $A \in F(S)$, 令

$$(A) = \mu(\{v \in \mathcal{V} \mid v(A) = 1\}).$$

称 (A) 为公式 A 的真度.

例 4 设 $V = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. 在 Lukasiewicz 系统 L_u 中, 求

公式 $A = p_1 \ p_2 \ p_3$ 的真度.

解 设赋值 v 满足 $v(A) = 1$, 则

$$v(p_1 \ p_2) = v(p_1) \ v(p_2) \ v(p_3).$$

当 $v(p_3) = 0$ 时, 有 $v(p_1) = v(p_2) = 0$,

当 $v(p_3) = \frac{1}{2}$ 时, 有 $\{v(p_1), v(p_2)\} \subset \{0, \frac{1}{2}\}$ 这时 v

(p_1) 与 $v(p_2)$ 可分别取值 0, 0 或 $0, \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}, 0$ 或 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; 当 $v(p_3) = 1$ 时 $\{v(p_1), v(p_2)\}$ 可为 V 的任意 2 值或单值子集. 综上所述知 $(v(p_1), v(p_2), v(p_3))$ 可为下列三值向量之一:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ &(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 0, 1), (0, \frac{1}{2}, 1), (0, 1, 1), (\frac{1}{2}, 0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \\ &(\frac{1}{2}, 1, 1), (1, 0, 1), (1, \frac{1}{2}, 1), (1, 1, 1). \end{aligned}$$

因为各种可能的取值于 V 的三值向量共有 27 个, 所以由 V^n 上概率测度 μ 的均匀性知

$$(A) = \mu(\{v \in \mathcal{V} \mid v(A) = 1\}) = \frac{14}{27}$$

3.5 连续情形下逻辑公式的真度

设 $V = [0, 1]$ 若公式 $A = A(p_1, \dots, p_n)$ 含有 n 个原子公式, 0 已用 $(p_1 \ p_1)$ 所取代, 则 A 的诱导函数为 $\bar{A}: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$.

定义 6^[10] 设 $A \in F(S)$, 令 $(A) = \int_{[0, 1]^n} \bar{A} dw$, 称 (A) 为 A 的积分真度. 这里 $dw = dx_1 \dots dx_n$.

例 5 在 L^* 系统中, 求公式 $A = p_1 \ p_2$ 的积分真度.

解 $\bar{A}(x_1, x_2) = x_1 \ x_2$. 当 $x_1 \ x_2$ 时 $\bar{A}(x_1, x_2) = 1$, 当

$x_1 > x_2$ 时 $\bar{A}(x_1, x_2) = (1 - x_1) \quad x_2 = \max\{1 - x_1, x_2\}$. 所以

$$\begin{aligned}
(A) &= \int_0^1 \int_0^1 (x_1 \quad x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_1} (x_1 \quad x_2) dx_1 dx_2 \\
&\quad + \int_0^1 \int_{x_1}^1 (x_1 \quad x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^1 dx_1 dx_2 + \int_0^1 \max\{1 - x_1, x_2\} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2} + \int_0^1 \max\{1 - x_1, x_2\} dx_1 dx_2 \\
&\quad + \int_0^1 \max\{1 - x_1, x_2\} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2} + \int_0^1 x_2 dx_1 dx_2 + \int_0^1 (1 - x_1) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

4 近似推理理论

4.1 二值命题逻辑系统中的近似推理

设 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\} \subset F(S)$, $B \in F(S)$, B 自然不必是 Γ 的推论. 由演绎定理 1 可以自然地给出“从 Γ 可推出 B ”的真度如下:

定义 7 设 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\} \subset F(S)$, $B \in F(S)$ 令

$$(\Gamma \vdash B) = (A_1 \quad (A_2 \quad \dots (A_n \quad B) \dots)),$$

称 $(\Gamma \vdash B)$ 为从 Γ 可推出 B 的真度.

显然 $0 \leq (\Gamma \vdash B) \leq 1$ (参看文献 [9]).

定理 5 在二值命题逻辑系统 L 中 $\Gamma \vdash B$ 成立的充要条件是 $(\Gamma \vdash B) = 1$.

证明 设 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$. 若 $\Gamma \vdash B$ 成立, 则由演绎定理 1 知 $(A_1 \quad (A_2 \quad \dots (A_n \quad B) \dots))$ 成立, 从而 $(\Gamma \vdash B) = 1$ 成立^[9]. 反过来, 设 $(\Gamma \vdash B) = 1$, 则 $A_1 \quad (A_2 \quad \dots (A_n \quad B) \dots)$ 为重言式, 从而由 L 的完备性^[11] 知该公式为定理. 那么由演绎定理 1 就得到 $\Gamma \vdash B$.

例 6 设 $\Gamma = \{p \quad q, \quad q \quad r\}$, $B = p$. 求从 Γ 可推出 B 的真度.

解 所求真度为 $(\Gamma \vdash B) = ((p \quad q) \quad ((q \quad r) \quad p))$. 容易验证在 (p, q, r) 的 8 种可能赋值中有 2 组赋值 $(1, 1, 0)$ 和 $(1, 1, 1)$ 使上式右边括号为 0, 所以 $(\Gamma \vdash B) = \frac{3}{4}$.

4.2 模糊命题逻辑系统 L^* 中的近似推理

在系统 L^* 中, 设 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\} \subset F(S)$, $B \in F(S)$, 则由演绎定理 3 知以下定义是合理的:

定义 8 设 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\} \subset F(S)$, $B \in F(S)$, 令 $(\Gamma \vdash B) = \int [A_1^2 \quad A_2^2 \quad \dots (A_n^2 \quad \bar{B}) \dots] dw$, 这里当 A_i ,

$\dots, A_n \in \Gamma$ 中共涉及 m 个原子公式时 $w = [0, 1]^m$, $dw = dx_1 \dots dx_m$. A_i^2 与 \bar{B} 分别是 A_i^2 与 B 的诱导函数, 且 $A_i^2 = A_i \odot A_i = (A_i \quad A_i)$, $(i = 1, \dots, n)$. 称 $(\Gamma \vdash B)$ 为从 Γ 可推出 B 的真度.

显然 $0 \leq (\Gamma \vdash B) \leq 1$ (参看文 [10]).

定理 6 在模糊命题逻辑系统 L^* 中, 若 $\Gamma \vdash B$ 成立, 则 $(\Gamma \vdash B) = 1$. 反过来, 设 $(\Gamma \vdash B) = 1$, 则 $E = A_1^2 \quad (A_2^2 \quad \dots (A_n^2 \quad \bar{B}) \dots)$ 为几乎重言式, 即, 从 $[0, 1]^m$ 中除去一个零测度集后, E 恒等于 1.

证明 当 $\Gamma \vdash B$ 时由演绎定理 3 即得 $(\Gamma \vdash B) = 1$. 反过来, 若 $(\Gamma \vdash B) = 1$, 则由 $\int E dw = 1$ 知 E 几乎处处等于 1.

例 7 设 $\Gamma = \{p\}$, $B = q$, 则由 R_0 算子的性质知当 $x > \frac{1}{2}$ 时 $x \odot x = x$, 当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时 $x \odot x = 0$. 由此得^[12]

$$\begin{aligned}
(\Gamma \vdash B) &= \int_0^1 \int_0^1 (x \odot x \quad (1 - y)) dx dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (x \odot x \quad (1 - y)) dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^1 (x \odot x \quad (1 - y)) dx dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x \quad (1 - y)) dx dy \\
&= \frac{1}{2} + \frac{7}{24} = \frac{19}{24}.
\end{aligned}$$

4.3 Gödel 值逻辑系统 $G(n)$ 中的近似推理

因为 Gödel 系统中的演绎定理 4 与二值命题逻辑中的演绎定理 1 相同, 所以可沿用定义 7 去刻画从 Γ 可推出 B 的真度. 但值得注意的是, 与 Gödel 逻辑相配套的赋值域上的否定运算有如下性质:

$$x = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \end{cases}$$

所以一旦 Γ 中含有一个原子公式的否定式, 则不论 B 取什么公式, 由定义 7 算出的 $(\Gamma \vdash B)$ 都会很大.

例 8 设 $n = 5$, $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, \quad p_4\}$, $B = 0$ 求 $(\Gamma \vdash B)$.

解 令 $E = p_4 \quad (p_3 \quad (p_2 \quad (p_1 \quad 0)))$ 注意 $V = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ 且 $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 1 = 0$, 所以在 (p_1, p_2, p_3, p_4) 的 $5^4 = 625$ 种赋值中, 仅有一种赋值 $(1, 1, 1, 0)$ 才可使 E 的值为 0, 即, $(\Gamma \vdash B) = \frac{624}{625} \approx 0.9984$.

4.4 两点说明

说明 1 以上基于演绎定理而将 Γ 中的公式逐项右移来定义从 Γ 推出 B 的真确程度的方法不适用于 Lukasiewicz 系统. 原因在于 Lukasiewicz 系统中的演绎定理 2 含有不确定的自然数 n 只知道存在一个自然数 n , 但

不能确定 n 等于多少,所以无法计算 (\underline{B}) .

说明 2 从例 8 看出,在离散情形的 Gödel 系统 $G(n)$ 中,只要 \underline{H} 中含有一个 $p(p \in S)$,则对任一 $B \in F(S)$,甚至对于矛盾式 $\underline{0}$,从 \underline{H} 推出 B 的真度就很大,特别是当 n 很大时, (\underline{B}) 就非常接近于 1. 容易证明,对于连续赋值域而言,在 Gödel 系统中,只要 \underline{H} 中含有一个 p ,则 $(\underline{B}) = 1$ 对所有的 B 都成立. 换句话说,从这种 \underline{H} 推出任一公式 B 的真度都等于 1. 这显然是不合常理的病态的结论. 可见 Gödel 的连续值逻辑系统 $G([0, 1])$ 是不可取的,不宜作为模糊命题逻辑的模型.

5 相容度理论

$F(S)$ 的一个子集 \underline{H} 也叫做一个理论. 如果从理论 \underline{H} 可推出矛盾式 $\underline{0}$,这时从 \underline{H} 就可推出每一个公式,称为不相容理论. 反之,只要 $F(S)$ 中有一个公式不能被 \underline{H} 推出,就称为相容理论. 这种两极化的定义是很粗糙的,因为同为相容理论的 \underline{H} 与 \underline{H}' , 推论之集 $D(\underline{H})$ 与 $D(\underline{H}')$ 可以大不相同^[13,14]. 比如,令 \underline{H} 为全体定理之集, $\underline{H}' = S$,则 $D(\underline{H})$ 仍为全体定理之集,即 $D(\underline{H}) = D(\underline{H}')$. 但 $D(\underline{H}) = D(S)$ 则是一个体形庞大的集,按文献 [13] 中的伪距离, $D(S)$ 的直径已达到最大值 1. 所以应当对所有的相容理论进行划分. 文献 [14] 中给出了 Lukasiewicz 系统 L_u 中有限理论的相容度概念. 本文则要给出经典二值命题逻辑系统 L 与模糊命题逻辑系统 L^* 中有限理论的相容度理论.

5.1 二值命题逻辑系统 L 中理论的相容度

定义 9 设 \underline{H} 是二值命题逻辑系统 L 中的有限理论,则称 $(\underline{H}) = 1 - (\underline{0})$ 为 \underline{H} 的相容度. 当 $(\underline{H}) = 1$ 时称 \underline{H} 完全相容.

定理 7 设 \underline{H} 是系统 L 中的有限理论,则

- (i) $0 \leq (\underline{H}) \leq 1$.
- (ii) 完全相容的充要条件是 \underline{H} 全由定理组成.
- (iii) 不相容的充要条件是 $(\underline{H}) = 0$.

证明 (i) 因为 $0 \leq (\underline{B}) \leq 1$ 对任意的 \underline{H} 和 B 都成立,所以 $0 \leq (\underline{H}) \leq 1$.

(ii) 设 \underline{H} 全由定理组成, $\underline{H} = \{A_1, \dots, A_n\}$ 则对任意赋值 v 均有 $v(A_1) = \dots = v(A_n) = 1$. 又 $v(\underline{0}) = 0$, 所以由定义 7 得 $(\underline{H}) = 1$. 反之,只要有一个 A_i 不是定理,则有赋值 v 使 $v(A_i) = 0$, 从而 $v(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = 0$. 那么由定义 5 (取 $n=2$) 知 $(\underline{H}) < 1$.

所以 $(\underline{H}) = 1$, \underline{H} 不是完全相容的.

(iii) 设 \underline{H} 不相容,则 $\underline{0} \in \underline{H}$ 成立,所以由定理 5 得 $(\underline{H}) = 0$. 反之,当 $(\underline{H}) = 0$ 时 $\underline{0} \in \underline{H}$, 那么由定理 5 得 \underline{H} 不相容.

例 9 在系统 L 中求理论 $\underline{H} = \{p, q\}$ 的相容度 $(p, q \in S)$.

解 易证 $(p \wedge (q \rightarrow 0)) = \frac{3}{4}$, 所以 $(\underline{H}) = \frac{1}{4}$.

5.2 模糊命题逻辑系统 L^* 中理论的相容度

定义 10 设 \underline{H} 是模糊命题演算系统 L^* 中的有限理论,则称 $(\underline{H}) = 1 - (\underline{0})$ 为 \underline{H} 的相容度,当 $(\underline{H}) = 1$ 时称 \underline{H} 完全相容.

定理 8 设 $\underline{H} = \{A_1, \dots, A_n\}$ 是系统 L^* 中的有限理论,则

- (i) $0 \leq (\underline{H}) \leq 1$.
- (ii) 全由定理组成的理论 \underline{H} 是完全相容的,即 $(\underline{H}) = 1$. 反过来,设 $(\underline{H}) = 1$, 则 \underline{H} 中的公式都是几乎重言式.
- (iii) 设 \underline{H} 不相容,则 $(\underline{H}) = 0$. 反过来,设 $(\underline{H}) = 0$, 则 $\underline{H} = A_1^2 \odot \dots \odot A_n^2$ 为几乎矛盾式,即, \underline{H} 是几乎重言式.

证明 (i) 是明显的. 对于 (ii) 和 (iii), 也只需证明“反过来”的一半. 设 $(\underline{H}) = 1$, 则由 $(\underline{0}) = 0$ 知 \underline{E} 几乎处处为 0, 这里 $\underline{E} = A_1^2 \odot (A_2^2 \odot \dots \odot (A_n^2 \odot 0) \dots)$, 所以 A_1^2, \dots, A_n^2 几乎处处为 1, 即, A_1, \dots, A_n 都是几乎重言式. 由 $\underline{E} = A_1^2 \odot \dots \odot A_n^2 \odot 0 = \underline{H} \odot 0 = \underline{H}$ 可证 (iii) 中的后半部分.

例 10 在系统 L^* 中求理论 $\underline{H} = \{p, q\}$ 的相容度 $(p, q \in S)$.

解 因为

$$\begin{aligned}
 (\underline{H}) &= \int_0^1 \int_0^1 (x \wedge (y \rightarrow 0)) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (x \wedge (1 - y)) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 dx dy + \int_{x>1-y}^1 \int_0^1 ((1-x) \wedge (1-y)) dx dy \\
 &= \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

所以 $(\underline{H}) = \frac{1}{4}$.

6 结论

本文中,将文献 [9] 中提出的二值逻辑中命题的真度理论扩充到了一般的 n 值命题逻辑系统之中,这种真度理论对 $L, G(n)$ 和 $L_u(n)$ 都是适用的. 基于此,本文通过将有限公式集中的公式逐个“右移”的方法引入了“从 \underline{H} 可推出公式 B 的真度的概念. 这种方法适用于经典的二值逻辑系统 L 和模糊命题逻辑系统 L^* . 当 n 不大时,用于 Gödel 系统 $G(n)$ 也是恰当的. 但由于 Lukasiewicz 系统 L_u 中演绎定理带有不确定性以及 Gödel 系统中否定运算的特殊性,“右移法”不宜用于系统 L_u 和 $G([0, 1])$. 最后,本文引入了有限理论的相容度概念,既适用于经典的二值逻辑系统 L , 也适用于模糊命题逻辑系统 L^* .

谓词逻辑中的程度化问题十分复杂,文献 [15] 中的内容只是一个初步的尝试.

参考文献:

[1] HAM ILTON A. G. Logic for Mathematicians [M]. London



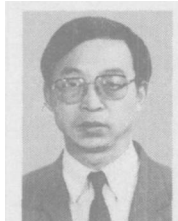
- don: Cambridge University Press, 1978
- [2] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic [M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] Wang G J. A formal deductive system for fuzzy propositional calculus [J]. Chinese Science Bulletin, 1997, 42 (18), 1521 - 1525.
- [4] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [5] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [6] Wang S M, Wang B S, Wang G J. A triangular norm based propositional fuzzy logic [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136 (1): 55 - 70.
- [7] GLAS M D. Knowledge representation in a fuzzy setting [R]. Paris: Université Paris VI, 1989. 48 - 67.
- [8] WANG G J. Theory of \neg -tautologies in revised Kleene systems [J]. Science in China, Ser E, 1998, 41 (2): 188 - 195.
- [9] Wang G J, Fu L, Song J S. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic [J]. Science in China, Ser A, 45 (9): 1106-1116.
- [10] Wang G J, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136 (1): 71 - 91.
- [11] Halmos P R. Measure Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1974. 157 - 158.
- [12] 王国俊, 宋庆燕. 一种新型的三值算法及其逻辑基础 [J]. 自然科学进展, 2003, 13 (6): 575 - 581.
Wang G J, Song Q Y. A new type of triple-1 method and its logic foundation [J]. Progress in Natural Science, 2003, 13 (6): 575 - 581. (in Chinese)
- [13] 王国俊, 任燕. Lukasiewicz命题集的发散性与相容性 [J]. 工程数学学报, 2003, 20 (3): 13 - 18.
Wang G J, Ren Y. Divergency and consistency in Lukasiewicz system [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2003, 20 (3): 13 - 18. (in Chinese)
- [14] Wang G J, Zhang W X. Consistency degrees of finite theories in Lukasiewicz fuzzy logic [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 149 (3): 275 - 284.
- [15] 王国俊, 秦晓燕, 周湘南. 一类二值谓词逻辑中公式的准真度理论 [J]. 陕西师范大学学报, 2005, 33 (1): 1 - 6.
Wang G J, Qing X Y, Zhou X N. Theory of quasi-truth degrees of formulas in two-valued predicate logic [J]. Journal of Shaanxi Normal University, 33 (1): 1 - 6. (in Chinese)

作者简介:



王国俊 男, 1935年 11月出生于北京, 现为陕西师范大学数学研究所教授, 西安交通大学理学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为非经典数理逻辑与近似推理.

E-mail: gjwang@snnu.edu.cn



宋建社 男, 1954年 10月出生于陕西富平县, 博士生导师, 现为西安高技术研究所教授, 主要研究方向为信号与信息处理.

E-mail: jssong@pub.xaonline.com