

基于正交距离的变形超二次曲线的拟合计算

文富荣,袁保宗

(北京交通大学信息科学研究所,北京 100044)

摘要: 对于一般几何模型的非线性最小均方误差拟合,首先必须定义拟合误差,然后采用非线性最优化方法求解最小误差意义下的最优解.本文针对变形超二次曲线拟合,给出了一种基于给定点到拟合几何模型的正交距离作为误差度量.采用这种基于几何距离的拟合曲线具有对几何刚体变换不变性的特点,而且这种方法很容易给出拟合参数的物理意义上的解释.

关键词: 拟合,超二次曲线,代数距离,几何距离

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 04-0742-03

Fitting Deformable Super-Ellipsoid Base on Orthogonal Distance

WEN Fu-rong, YUAN Bao-zong

(Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Firstly, the error of fit must be defined for nonlinear least-square fitting of generalized geometry model. Then the nonlinear optimization algorithm can be used to obtain the optimum solution. In this paper, we proposed an error of fit based on the orthogonal distance between the given point and the fitting geometry model. The estimated parameters are invariant to coordinate transformation and we can easily find a physical interpretation of the fitting parameters by this way.

Key words: fitting; super-ellipsoid; algebraic distance; geometric distance

1 引言

从给定的2D/3D点或深度图像中重建出几何形状信息在计算机视觉、计算机图形学、图像处理、模式识别等领域有着广泛应用,而超二次模型由于它的表达能力强而在诸多领域有着广泛应用.它由Barr首先引入计算机图形学中^[1,2],由Pentland首次将超二次模型应用到计算机视觉的研究^[3]. Bajcsy与Solina等人讨论了如何从合成或真实的深度信息中恢复模型的参数描述^[4,5],在文献[4]中采用了LS算法拟合超二次模型.

拟合计算前必须预先定义一种误差度量(error of fit),一般有基于代数距离(algebraic distance)和几何距离(geometric distance)两种度量方式.代数距离拟合一般把几何模型描述为隐函数 $F(b, x) = 0$ 的形式,定义误差度量为 $\sum_0 = [F(b, x_i)]^2$ 或者是 $\sum_0 = [F(b, x_i) / \nabla F(b, x_i)]^2$ 的形式^[6-9].尽管采用这种方法具有实现容易、计算量小等优点,但是在拟合精度上它也有本身的局限性,而且估计参数 b 对坐标变换不具有不变性(比如对给定点简单的平移变换就能引起估计模型参数 b 的变化),另外也很难给出这种代数距离物理意义上的合理解释^[13].

基于几何距离的拟合则定义错误度量为给定点到几何模型间的最短距离,虽然这种错误度量很明显而且从定义上就可以解释其物理意义,但是一般很难给出对于给定点到一般意义上的几何模型的几何距离.有关文献中大都采用了近似的几何距离^[10-12],包括规范化的代数距离 $F(b, x_i) / \nabla F(b, x_i)$,Sung成功利用几何距离拟合圆、球、椭圆、双曲

线、抛物线^[13].本文试图将这种基于几何距离的拟合算法应用于变形超二次曲线.

2 基于几何距离的曲线拟合

曲线拟合实际上就是给定一个点集 $\{X_i\} (i = 1, 2, \dots, m)$,要求拟合曲线和给

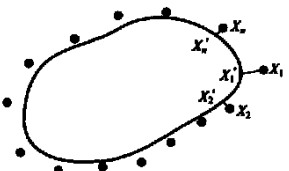


图1 基于正交距离的误差度量

定点集的误差最小,本文则采用了点到几何曲线的正交距离作为度量误差的标准(如图1),即采用下式的最小化作为拟合函数:

$$J = \sum d^2 \tag{1}$$

其中:

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T,$$

$$d_i = |X_i - X'_i| \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$\{X_i\} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为给定的点集;

$\{X'_i\} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为拟合曲线上对应于给定点集的正交点集.

由此,我们可以把拟合问题可以具体描述成:

$$\min_a \{ J^2 \} \tag{2}$$

式(2)最小的一阶必要条件是:

$$\left[\frac{\partial J^2}{\partial a} \right]^T = 2J^T d = 0, \text{ 其中 } J = \frac{\partial d}{\partial a} \tag{3}$$

其中 a 为待估计的几何曲线的参数.由此,可以采用一般Newton方法递推求解上式:

$$(J^T J + \lambda I) \Delta a = -J^T d,$$

其中

$$\Delta a = \frac{\partial^2 d}{\partial a^2} \tag{4}$$

为了避免当计算出的 Hessian 矩阵 $H = J^T J$ 是病态求逆矩阵困难的问题,在本文中采用了 Levenberg-Marquardt 算法,这样可以得到递推公式为:

$$(J^T J + I) |_{k} a = - J^T d |_{k},$$

$$a_{k+1} = a_k + a \quad (5)$$

3 超二次曲线

xy 坐标系中正则位置的

$$\left(\frac{x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_y}\right)^2 = 1 \quad (6)$$

XY 坐标系中一般位置的超二次曲线可以通过 xy 坐标系中的正则超二次曲线的旋转、平移得到: $M: x = R(X - X_0)$ (7)

$$\text{其中 } R = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}.$$

为了增强超二次曲线的几何表现能力,通常还考虑沿 Y

$$\text{轴的锥化变形和弯曲变形: } T: \begin{cases} X = (k_t \cdot \frac{y}{a_y} + 1) \cdot x \\ Y = y \end{cases} \quad (8)$$

$$B: \begin{cases} X = \cos(x - a_y/k_b) + a_y/k_b, \text{其中 } = y \cdot k_b \cdot / a_y \\ Y = -\sin(x - a_y/k_b) \end{cases} \quad (9)$$

显然 $B^T T^T B$,为了在拟合中得到正确的拟合结果,我们规定变换顺序为 $M^o B^o T$,这表示先进行锥化变形,然后进行弯曲变形,最后进行旋转、平移变换.这样,一般意义上的超二次曲线可以通过参数 $a = (a_x, a_y, p_x, p_y, k_t, k_b)^T$ 来描述.

4 正交点

如式(6),正则位置的超二次曲线可以用 a_x, a_y 三个基本参数来描述.对于 xy 坐标系中给定点 $x_i =$

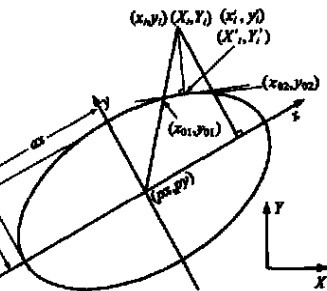


图2 正则超二次曲线的正交点

$(x_i \ y_i)^T$,过正则超二次曲线上的点 (x, y) 的切线 l_1 与这两点之间的连线 l_2 垂直(如图2)可以表示为:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{y - y_i}{x - x_i} = -1 \quad (10)$$

重新整理式(6)、(10)可以得到:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = (a_y x)^2 + (a_x y)^2 - (a_x a_y)^2 = 0 \\ f_2(x, y) = a_y^2 x^2 - 1(y - y_i) - a_x^2 y^2 - 1(x - x_i) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

显然对应于 x_i 位于正则超二次曲线上的正交点 x_i 即为上述方程组的解.

利用 Newton 方法很容易可以求解出此方程组的解:

$$Q_k \ x = - f(x_k), x_{k+1} = x_k + x, \text{其中 } Q = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} \quad (12)$$

从图2中可以看出在 xy 坐标系对于给定点,其在正则位置的超二次曲线上对应的正交点应该位于同一象限中.基于此点,可以选取该点与坐标原点的连线与超二次曲线的交点

表1 超二次曲线拟合结果

	a_x	a_y	k_t	k_b	p_x	p_y	k_t	k_b
原始数据	2.88	4.26	0.624	67.50	-1.62	1.58	-0.472	0.528
初始拟合	2.892340	4.085026	1.0000	61.157784	-1.061576	1.423235	0	0
拟合结果	2.879999	4.260001	0.624000	67.500019	-1.620000	1.580001	-0.472000	0.528000
原始数据	3.19	5.13	2.074	-58.75	1.67	-1.17	0.194	-0.306
初始拟合	1.645467	2.637293	1.0000	-59.240055	1.748069	-1.085022	0	0
拟合结果	3.190042	5.130036	2.074034	-58.749686	1.670031	-1.169985	0.193968	-0.306010

x_{01} ,过该点垂直于 x 轴的直线与超二次曲线的交点 x_{02} ,这两点构成的线段的中点 x_0 作为递推初值

$$x_0 = (x_{01} + x_{02})/2 \quad (13)$$

$$\text{其中: } x_{01} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, a_x a_y [(a_y x_i)^2 + (a_x y_i)^2]^{-1/2} J^{-1/2},$$

$$x_{02} = \begin{cases} x_i \\ \text{sign}(y_i) \cdot \frac{a_y}{a_x} \cdot ((a_x^2 - x_i^2)^{1/2}) \end{cases}, \text{if } |x_i| < a_x$$

$$\begin{cases} \text{sign}(x_i) a_x \\ 0 \end{cases}, \text{if } |x_i| = a_x$$

在给出 XY 坐标系中的点 X_i 后,可以由式(7)~(9)通过坐标反变换求出在 xy 坐标系中的对应点 x_i ,然后利用上述的 Newton 方法在 xy 坐标系中求正交点 x_i .最后再由式(7)~(9)通过坐标变换可以得到 XY 坐标系中 X_i 对应的正交点 X_i .

5 Jacobian 矩阵

为了求解第二部分所描述的非线性问题的最优解,必须给出每一给定点 X_i 与与之对应的对应正交点 X_i 之间距离 d_i 的 Jacobian 矩阵,由 $d_i = |X_i - X_i|$ 可以得到:

$$\frac{\partial d_i}{\partial a} = - \frac{(X_i - X_i)^T}{|X_i - X_i|} \cdot \frac{\partial X}{\partial a} \Big|_{x=x_i} \quad (14)$$

其中: $\frac{\partial X}{\partial a} \Big|_{x=x_i} = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} \Big|_{x=x_i}$,其中第一项 $\frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=x_i}$ 很容易从坐标变换式(8)~(10)得到;而第二项 $\frac{\partial x}{\partial a} \Big|_{x=x_i}$ 则描述了 xy 坐标系中正交点 x_i 相对于参数向 a 的变化.不妨记 $F = (f_1$

$$f_2)^T$$
,从式(11)可以得到: $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial a} \right)$ (15)

显然 $\frac{\partial F}{\partial x} = Q$,式(15)右边 $\frac{\partial x}{\partial a}$ 可以从反坐标变换式得到:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a} = \frac{\partial B^{-1}}{\partial k_b} \cdot \frac{\partial T^{-1}}{\partial k_t} \left\{ 0 \ \frac{\partial R}{\partial} [X_i - X_0] \ - R \ 0 \right\}$$

所以可以得到 Jacobian 矩阵

$$J = \left[\left(\frac{\partial d_i}{\partial a} \right)^T \left(\frac{\partial d_j}{\partial a} \right)^T \dots \left(\frac{\partial d_n}{\partial a} \right)^T \right]^T \quad (16)$$

6 数值试验

在拟合计算试验中,使用计算机生成超二次曲线离散数据点,模拟重建算法中的二维数据点,以检验算法的计算精度.下面是试验中采用的拟合算法的主要步骤:

初始拟合模型参数 a ;

计算点集 $\{ X_i \}$ 到拟合模型的正交距离 d_i ;

若满足拟合精度,则输出参数 a ,否则继续;

计算 Jacobian 矩阵;

根据优化算法更新拟合参数 a, 转

超二次曲线拟合是一个非线性拟合问题, 必须给定拟合初值, 本文使用椭圆参数作为拟合初值, 即在初始拟合中, 选取形状参数 $kt=1$, 沿 Y 轴锥化变形参数 $kt=0$ 、沿 Y 轴弯曲变形参数 $kb=0$ 。对于椭圆曲线 5 个基本形状参数采用了文献 [14] 中的方法, 对于矩阵分解则采用了 SVD^[15], 拟合结果如图 3 所示。图 3(a)(c) 中的点为原始数据点, 其中的点划线表示第 n 步递推结果, 实线表示最终拟合结果; 图 3(b)(d) 表示变形超二次曲线参数随着递推次数变化的曲线, 两组试验都只需要有限的递推就可以得到稳定的拟合结果。

为了检验拟合算法的数值性能, 我们使用了不完整的二维数据进行拟合计算试验, 首先由计算机生成完整超二次曲线的二维数据, 然后随机抽取 90% 作为原始拟合数据。图 4 是对不完整二维数据的超二次曲线拟合计算结果, 其中的点表示原始数据, 曲线为拟合结果。

7 结语

几何模型的拟合无论在科学领域还是在工程应用中都有着广泛的应用。本文给出了一种基于点和拟合模型间正交距离的超二次曲线拟合算法, 算法采用了拟合点集与拟合模型间的正交距离的平方和作为拟合误差度量。文中利用 xy 坐标系作为临时坐标系, 解决了直接计算拟合点集到拟合曲线的正交距离的难题。该算法可以很容易的应用到其他几何模型的拟合中, 试验结果表明算法具有很好的收敛性、精确性和鲁棒性。

参考文献:

[1] Barr A. Superquadrics and angle-preserving transformations[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1981, 1(1) : 11 - 23.

[2] Barr A. Global and local deformation of solid primitives[A]. Computer Graphics, ACM SIGGRAPH '84[C]. 1984, 18:21 - 30.

[3] Pentland A. Perceptual organization and the representation of natural form[J]. Artificial Intelligence, 1986, 28:293 - 331.

[4] Solina F, Bajcsy R. Recovery of parametric models from range images: the case for superquadrics with global deformation[J]. IEEE Trans on PAMI, 1990, 12(2) : 131 - 147.

[5] Bajcsy R, Solina F. Three dimensional shape representation[A]. In: Proceedings of First International Conference on Computer Vision[C]. London, UK, 1987. 231 - 241.

[6] Bookstein F L. Fitting conic sections to scattered data[J]. Computer Graphics and Image Processing, 1979, 9(1) : 56 - 71.

[7] Sampson P D. Fitting conic sections to 'very scattered' data: an iterative refinement of the bookstein algorithm[J]. Computer Graphics and Image Processing, 1982, 18(1) : 97 - 108.

[8] Taubin G. Estimation of planar curves, surface, and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation[J]. IEEE Trans on PAMI, 1991, 13(11) : 1115 - 1138.

[9] Liu W B, Yuan B Z. Superquadric based hierarchical reconstruction for virtualizing free form objects from 3D data[J]. Chinese Journal of Elec-

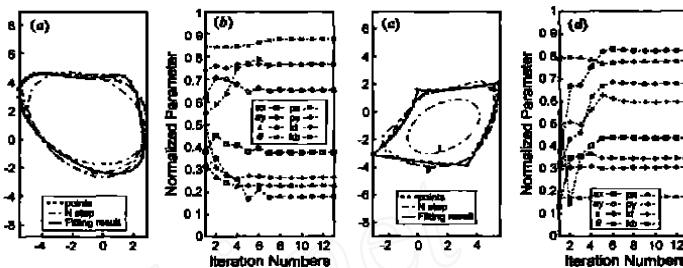


图 3 表 1 中的数据拟合过程



图 4 不完整的二维数据拟合

tronics, 2001, 10(1) : 100 - 105.

[10] Cao X, Shrikhande N, Hu G. Approximate orthogonal distance regression method for fitting quadric surface to range data[J]. Pattern Recognition Letters, 1994, 15(8) : 781 - 796.

[11] Cao X, Shrikhande N. Estimation of surface parameters using orthogonal distance criterion[A]. Proc 5th Int Conf. Image Processing and Its Applications[C]. 1995. 345 - 349.

[12] Marshall D, Lukacs G, Marlin R. Robust segmentation of primitive from range data in the presence of geometric degeneracy[J]. IEEE Trans on PAMI, 2001, 23(3) 304 - 314.

[13] Sung J A, Wolfgane R. Least-squares orthogonal distance fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola and parabola[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(12) : 2283 - 2303.

[14] Andrew F, Maurizio P, Robert B F. Direct lest square fitting of ellipse[J]. IEEE Trans on PAMI, 1999, 21(5) : 476 - 480.

[15] Glib G H, Reinsch C. Singular value decomposition and least squares solutions[J]. Numerische Mathematik, 1970, 14(5) : 403 - 420.

作者简介:



文富荣 男, 1973 年出生于湖北, 博士生, 主要研究领域: 信号与信息处理、图像处理、计算机图形学与虚拟现实。E-mail: frwen@163.net



袁保宗 男, 1932 年出生于江苏, 教授, 博士生导师, 主要研究领域: 信号与信息处理、多媒体视听信息处理、计算机视觉、图像信号处理、语音信号处理、计算机图形学与虚拟现实。