

非线性 Volterra 系统的总体全解耦自适应滤波

魏瑞轩¹, 韩崇昭¹, 张宗麟²

(1. 西安交通大学电信学院, 陕西西安 710049; 2. 空军工程大学工程学院, 陕西西安 710038)

摘要: 研究输入、输出观测数据均受噪声干扰时的非线性 Volterra 系统的总体全解耦自适应滤波问题. 基于总体最小二乘技术和 Volterra 滤波器的伪线性组合结构, 运用约束优化问题的分析方法研究 Volterra 滤波过程, 从而建立了一种总体全解耦自适应滤波算法. 并建立了分析该算法收敛性能的参数反馈调整模型, 分析表明, 该算法可使各阶 Volterra 核稳定地收敛到真值. 仿真实验的结果表明, 当输入、输出观测数据均受噪声干扰时, 总体全解耦自适应滤波算法的鲁棒抗噪性能和滤波精度均优于全解耦 LMS 自适应滤波算法.

关键词: 非线性系统; 全解耦滤波; Volterra 自适应滤波

中图分类号: TN713 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 04 0656-04

Total Fully Decoupled Adaptive Filter for Nonlinear Volterra System

WEI Rui-xuan¹, HAN Chong-zhao¹, ZHANG Zong-lin²

(1. School of Electronic & Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China;

2. Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

Abstract: The fully decoupled adaptive filtering problem of nonlinear Volterra system is investigated with the input and output observation data corrupted by noise. Based on the total least mean square technology and the pseudo linear combination structure of Volterra filter, a total fully decoupled adaptive filtering algorithm is built by using the analysis method of the constrained optimization problem to investigate Volterra filtering process. And the parameter feedback adjusting model is also built for the convergence analysis of the proposed algorithm. The analysis indicates that the Volterra kernels can evenly converge to the real values by using this algorithm. Simulation results show that the proposed total fully decoupled adaptive filtering algorithm takes on higher robust resistance noise performance and filter precision than the fully decoupled LMS adaptive filtering algorithm, when the input and output observation data are all corrupted by noise.

Key words: nonlinear system; fully decoupled filter; volterra adaptive filtering

1 引言

非线性系统的 Volterra 级数模型能够完全刻画一大类非线性系统的传递特性, 使得对于非线性 Volterra 系统的自适应滤波问题的研究正受到越来越多的重视^[1,2]. 传统的自适应滤波方法是把 Volterra 滤波器整体地看作为一个线性算子而建立的, 这类方法不能有效克服滤波过程中各阶 Volterra 级数之间的非线性因素的耦合影响^[3]. 为此, 文[4]、[5]分别提出了 Volterra 系统的部分解耦的 LMS 和 RLS 自适应滤波算法. 文[6]则通过建立 Volterra 滤波器的伪线性组合结构, 利用约束优化的分析方法, 提出了 Volterra 系统的总体全解耦滤波的思想, 不仅解决了 Volterra 滤波器的模块化构造问题, 而且大大提高了 Volterra 自适应滤波器的收敛速度和精度. 在此基础上, 文[7]提出了 Volterra 系统的总体全解耦 RLS 自适应滤波算法. 但以上算法均是总体最小二乘类算法, 当输入输出

观测数据均受噪声干扰时, 这些算法的收敛性能将会恶化.

本文研究输入输出数据均受噪声干扰时的自适应滤波问题. 基于总体最小二乘技术和 Volterra 滤波器的伪线性组合结构, 提出一种总体全解耦自适应滤波算法. 仿真实验表明该算法在输入输出数据均受噪声干扰时仍具有良好的收敛性能.

2 Volterra 系统的解耦自适应滤波

根据非线性系统的 Volterra 级数理论, 单输入单输出定常因果非线性系统的输入输出关系可唯一地用 Volterra 泛函数级数表示为^[8]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) d\tau_i \quad (1)$$

因而, 通常使用如下截断形式的 N 阶 Volterra 滤波器对此类非线性系统进行自适应滤波, 即:

$$y(k) = \sum_{n=1}^N y_n(k) = \sum_{n=1}^N \sum_{m_1=0}^{M-1} \dots \sum_{m_n=0}^{M-1} h_n(m_1, \dots, m_n) \prod_{i=1}^n u(k - m_i) \quad (2)$$

其中, N 为滤波器的阶次, M 为 Volterra 核记忆长度, $\{h_n(m_1, m_2, \dots, m_n) | m_1, \dots, m_n = 0, \dots, M-1\}$ 称为第 n 阶 Volterra 时域核。

自适应滤波的任务就是按照某种算法自适应地调整滤波器的各阶 Volterra 时域核, 使要求的性能指标为最小。由于 Volterra 滤波器是一个多维卷积序列之和, 因此, 传统的方法是通过构造 Volterra 输入观测向量和核向量将 Volterra 滤波器整体地看作为一个伪线性算子, 从而直接类比线性系统的 LMS 算法得到 Volterra 系统的自适应滤波算法^[3]。这种方法是一种全耦合形式的 Volterra 滤波方法, 它在滤波过程中使用同一残差同时对各阶 Volterra 核进行修正, 从而造成了各阶非线性因素之间的较强耦合, 进而会导致滤波器的收敛性能变差, 且不利于 Volterra 滤波器的模块化构造。为此, 人们开始研究 Volterra 系统的解耦自适应滤波问题^[4-7]。其中, 文[4]、[5]提出了两种形式的 Volterra 系统的部分解耦自适应滤波算法。受其思想启发, 文[6]则通过建立 Volterra 滤波器的伪线性组合结构, 利用约束优化的分析方法, 导出了 N 阶 Volterra 滤波器满足最小均方误差准则具有全解耦形式的正则方程为:

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & & \\ & R_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}$$

其中: $R_{n,n} = E\{X_k^n (X_k^n)^T\}$, $P_n = E\{d_k^n X_k^n\}$, $n = 1, \dots, N$ 。基于这种全解耦形式的正则方程, 文[6]提出了 Volterra 系统的全解耦自适应滤波的思想, 并建立了 LMS 全解耦自适应滤波算法为: $H_n(k+1) = H_n(k) + \mu_n \varepsilon_k^n X_k^n$, $n = 1, \dots, N$ (3)

式中: $\varepsilon_k^n = d_k - \sum_{i=1}^N y_k^{i*} - y_k^n$

这种新型的全解耦算法不仅解决了 Volterra 滤波器的模块化构造问题, 而且大大提高了 Volterra 自适应滤波器的收敛速度和精度。但以上算法均是二乘类算法, 当输入输出观测数据均受噪声干扰时, 这些算法的收敛性能将会恶化。如何实现双端噪声情况下 Volterra 系统的全解耦自适应滤波, 是本文要研究的问题。

3 总体全解耦自适应滤波算法与分析

3.1 总体最小二乘与变量定义

考虑滤波器的输入输出均受干扰, 记 k 时刻滤波器的输入观测值为 $\tilde{u}(k) = u(k) + \Delta u(k)$, 输出为 $\tilde{d}(k) = d(k) + \Delta d(k)$ 。对于这类滤波问题, 传统的最小二乘类方法由于只考虑了输出数据中存在的噪声, 其估计结果不再是无偏的。对此, 更好的方法应是基

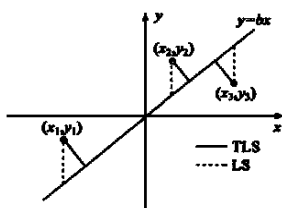


图 1 TLS 方法与 LS 方法的几何意义解释

于总体最小二乘思想的方法, 它可以得到无偏的估计解^[9]。图 1 以直线拟合为例阐释了 TLS 方法与 LS 方法的几何意义。

按照文[6]的思想, 将 Volterra 滤波器重构为伪线性组合结构^[6]。对于第 n 阶 Volterra 伪线性子系统, 记 k 时刻的输入观测向量为 $\tilde{X}_k^n = X_k^n + \Delta X_k^n$, ΔX_k^n 是噪声向量, 第 n 阶 Volterra 核向量为 H_n , 从而定义第 n 阶伪线性子系统的输出误差为:

$$\varepsilon_k^n = y_k^n + \sum_{i=1}^N y_k^{i*} - \tilde{d}(k) = y_k^n - \tilde{d}_k^n \quad (4)$$

其中 $\tilde{d}_k^n = \tilde{d}(k) - \sum_{i=1}^N y_k^{i*}$, ($n = 1, 2, \dots, N$), y_k^{n*} 表示第 n 阶子系统在其 Volterra 核为真值 H_n^* 时的输出。从而可以简单地证明: $\varepsilon_k = \sum_{i=1}^N \varepsilon_k^i$ 。

为消除输入输出观测数据中的噪声对滤波结果的影响, 考虑基于总体最小二乘思想进行自适应滤波。定义 Volterra 滤波器的增广核向量为 $W_1 = [H_1^T, H_2^T, \dots, H_N^T, -1]^T$ 。将其重构为: $W_1 = [W_1^T, H_2^T, \dots, H_N^T]^T$, 其中 $W_1 = [H_1^T, -1]^T$ 。

3.2 全解耦自适应滤波算法的导出

将总体最小二乘意义下的 Volterra 系统的滤波看成是从低阶 Volterra 伪线性子系统到高阶子系统的一系列的约束优化问题, 即从第 1 阶 Volterra 子系统开始, 首先对低阶子系统逐阶按照优化准则进行相应的 Volterra 核的估计与滤波, 而高阶子系统的优化则是以所有低阶子系统已达到优化准则为约束条件的。

考虑到第 1 阶 Volterra 子系统实际上是一个线性系统, 从而它的总体最小二乘解应满足: $R_1 W_1 = \lambda_1 W_1$, 其中 $R_1 = E\{Z_k^1 (Z_k^1)^T\}$, λ_1 是 R_1 的最小特征值, $Z_k^1 = [\tilde{X}_k^1, \tilde{d}_k^1]^T$ 。进而将第 2 阶伪线性子系统在总体最小二乘意义下的滤波问题看作是求解如下的约束优化问题:

$$\min E\{ \|(\Delta X_k^2)^T | \Delta d_k^2 \|_2 \} \quad s. t. \quad R_1 W_1 = \lambda_1 W_1$$

上式等价于求解如下的最近似一致的 LS 优化问题:

$$\min E\{1 - (\tilde{X}_k^2)^T H_{2-1k} - \tilde{d}_k^2\}^2 \quad s. t. \quad R_1 W_1 = \lambda_1 W_1$$

设 Volterra 滤波器的输入信号和期望信号是平稳的, 并设 y_k^{n*} ($n = 1, \dots, N$) 在短时间内是平稳的。按照约束优化问题的求解方法, 可由上式导出 2 阶 Volterra 滤波器在总体最小二乘意义下最优 Volterra 核参数需满足矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 W_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中: $R_2 = E\{\tilde{X}_k^2 (\tilde{X}_k^2)^T\}$, $P_2 = E\{\tilde{d}_k^2 \tilde{X}_k^2\}$

对于 N 阶 Volterra 滤波器, 按照约束优化的思想从低阶到高阶逐阶分析, 根据数学归纳的原理, 则可导出 N 阶 Volterra 滤波器的最优 Volterra 核参数应满足矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ & R_2 \\ & & \ddots \\ & & & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 W_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{其中: } \begin{cases} R_1 = E\{Z_k^1 (Z_k^1)^T\} \\ R_n = E\{\tilde{X}_k^n (\tilde{X}_k^n)^T\}, \quad n = 2, \dots, N \\ P_n = E\{\tilde{d}_k^n \tilde{X}_k^n\}, \quad n = 2, \dots, N \end{cases} \quad (7)$$

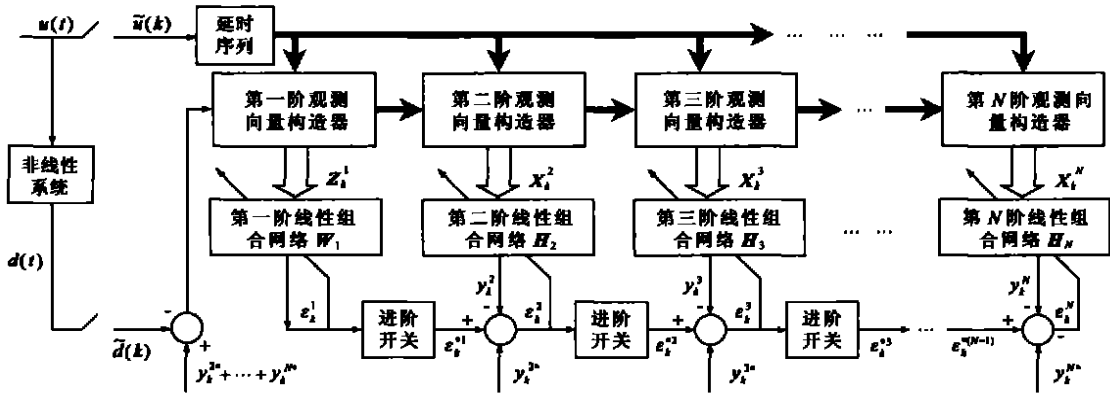


图 2 总体全解耦自适应滤波算法的原理结构图

显然, 方程(6)具有全解耦形式, 而正是这种全解耦形式揭示了一种在输入输出观测数据均含有噪声的情况下进行全解耦自适应滤波的思想和原理: 对第 1 阶 Volterra 子系统, 应使用 TLS 技术进行滤波, 而对于第 2 阶以上的子系统, 可进行最近似一致的 LS 滤波。基于以上分析, 可建立一种适用于输入输出观测数据均受噪声污染的 Volterra 系统的全解耦自适应滤波算法。该算法的原理结构如图 2 所示, 称之为总体全解耦自适应滤波算法。

按照图 2 所示, 自适应滤波过程是根据 Volterra 伪线性子系统的阶次逐阶递进的, 当低阶子系统的滤波完成后进入高阶子系统的滤波。图中的进阶开关用于控制滤波过程的进度, ε_k^{*n} 是低阶子系统的核值给定后输出的误差。滤波过程按照短周期滚动循环的方式进行, 各阶子系统的 Volterra 核的自适应修正公式为:

$$\begin{cases} W_1(k+1) = W_1(k) - 2\mu_1 \varepsilon_k^1 [Z_k^1 - \varepsilon_k^1 W_1(k)] / \|W_1(k)\|^{-2} \\ H_n(k+1) = H_n(k) + 2\mu_n \varepsilon_k^n X_k^n, \quad n = 2, \dots, N \end{cases} \quad (8)$$

3.3 总体全解耦滤波算法的性能分析

根据式(8), 并考虑到 $d_k = \sum_{i=1}^N y_i^{*k}$, 从而 $d_k^* = \bar{d}_k - \sum_{i=1, i \neq n}^N y_i^{*k} = (H_n^*)^T \bar{X}_k^n$, 则可建立分析总体全解耦滤波算法收敛性能的 Volterra 核参数 $H_n (n \geq 2)$ 的反馈调整模型如图 3 所示。

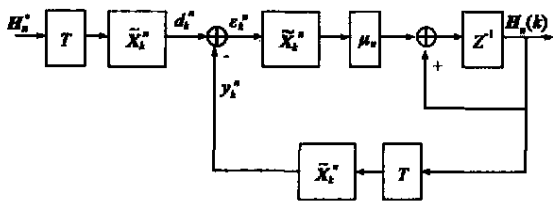


图 3 全解耦滤波算法的参数反馈调整模型

基于该模型, 即可用反馈调整的原理对 Volterra 核参数的调整过程进行微观分析。图中环节 Z^{-1} 表示一步延迟算子, 环节 T 为转置算子。由此模型分析可知, 在前 $n-1$ 阶核参数已调整到真值的条件下, 通过反馈调整, 当 $H_n(k)$ 达到真值时, 即有 $e_k^n = 0$, 从而可使 $H_n(k)$ 稳定地收敛到其真值 H_n^* 。这一

分析说明本文所提出的新算法可使各阶 Volterra 核稳定地收敛到真值。

另外, 根据图 2 说明的总体全解耦自适应滤波算法的原理结构亦可知, 总体全解耦自适应滤波过程的收敛取决于各阶 Volterra 伪线性子系统的逐阶收敛。对于第一阶子系统, 参照文献[10]定理 1 的证明方法, 可以证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, 第一阶 Volterra 核参数能够收敛到它的 TLS 解。而第 $n, (n = 2, \dots, N)$ 阶 Volterra 子系统的核参数是按照梯度下降原理修正的, 故而很容易导出当 $0 < \mu_n < 1/\lambda_{n-\max}$ 时, 第 n 阶 Volterra 子系统是收敛的, 其中, $\lambda_{n-\max}$ 是第 n 阶子系统的输入相关矩阵 R_n 的最大特征值。

需要说明的是, 对部分解耦滤波算法所进行的参数反馈调整分析, 却不能说明部分解耦算法可使 1 阶 Volterra 核参数平稳地收敛。

4 仿真实验研究

本节通过仿真实验考察总体全解耦自适应滤波算法的性能。对于给定的非线性系统, 在输入输出观测信号均受噪声干扰的情况下, 分别使用文[6]的全解耦 LMS 自适应滤波算法 (FDAI) 和本文提出的总体全解耦自适应滤波算法 (TFDAI) 对 Volterra 滤波器进行自适应滤波。对比分析这两种全解耦滤波算法在输入、输出观测信号均受噪声干扰情况下的滤波性能。

设非线性过程由如下非线性差分方程给定:

$$y(k) = 0.62u(k) + 0.9u(k-2) + u^2(k) - 1.8u(k-1)u(k-2)$$

系统输入使用方差为 0.6 的白噪声信号, 输入、输出均叠加不同程度的白噪声扰动, 使用二阶 Volterra 滤波器进行自适应滤波, Volterra 核记忆长度取 $M = 3$ 。两种全解耦算法使用相同的学习因子, $\mu_1 = 0.08, \mu_2 = 0.01$, 设输入、输出具有相同的信噪比。考察信噪比 $\text{SNR} = 30\text{dB}$ 和 $\text{SNR} = 15\text{dB}$ 时分别使用两种全解耦自适应滤波算法的各阶 Volterra 核向量的学习误差曲线和核参数的收敛曲线, 取 10 次 Monte Carlo 实验的平均结果。定义第 n 阶 Volterra 核向量的学习误差为: $\xi_n^l(k) = 20 \log_{10} \|H_n - H_n(k)\|^2, (n = 1, \dots, N)$ 。图 4 给出了信噪比 $\text{SNR} = 30\text{dB}$ 时两种算法的第 1 阶和第 2 阶 Volterra 核向量的

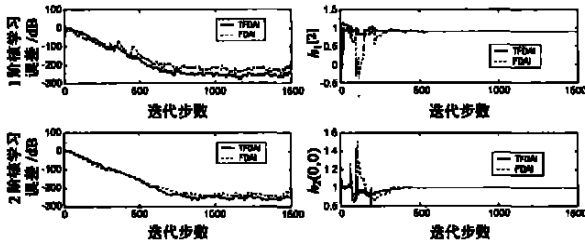


图 4 SNR=30dB时核向量的学习误差曲线

图 5 SNR=30dB时 $h_1(2)$ 和 $h_2(0,0)$ 的收敛曲线

学习误差曲线. 图 5 给出 1 阶核参数 $h_1(2)$ 和 2 阶核参数 $h_2(0,0)$ 的收敛曲线, 这两个核参数的真值为: $h_1(2) = 0.9$, $h_2(0,0) = 1$; 图 6 和图 7 则分别给出 SNR= 15dB 时第 1、2 阶 Volterra 核向量的学习误差曲线和核参数的收敛曲线.

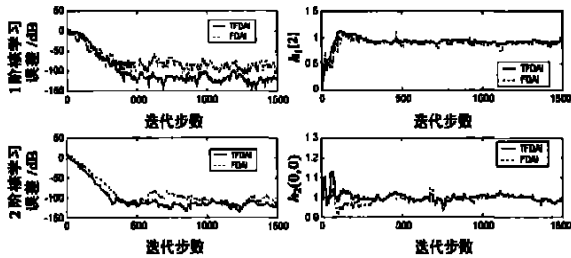


图 6 SNR=15dB时 Volterra 核向量的学习误差曲线

图 7 SNR=15dB时 $h_1(2)$ 和 $h_2(0,0)$ 的收敛曲线

对比在不同程度噪声干扰下的两种全解耦滤波算法的各阶 Volterra 核向量的学习误差曲线, 可以看出, 在输入输出观测信号均受噪声干扰的情况下, 总体全解耦自适应滤波算法的各阶 Volterra 核向量的稳态收敛精度均高于全解耦 LMS 自适应滤波算法, 而两种滤波算法的收敛速度基本相近; 从 Volterra 核参数的收敛曲线可以看出, 总体全解耦滤波算法的核参数的收敛过程更平稳. 这说明对于输入输出均受噪声干扰的 Volterra 系统的滤波问题, 总体全解耦自适应滤波算法有着更好的鲁棒抗噪性能. 因此, 当输入输出观测数据均受噪声干扰时, 总体全解耦自适应滤波算法的滤波精度和平稳性均优于全解耦 LMS 自适应滤波算法, 因而能够更加有效地实现全解耦 Volterra 自适应滤波.

5 结论

本文针对输入输出数据均受噪声干扰时的 Volterra 自适应滤波问题, 研究了在此条件下如何实现 Volterra 系统的全解耦自适应滤波. 基于总体最小二乘技术和 Volterra 滤波器的伪线性组合结构, 提出一种总体全解耦自适应滤波算法. 当输入输出观测数据均受噪声干扰时, 该算法能够更有效地实现 Volterra 滤波器的全解耦自适应滤波, 非常有益于实际非线性系统的滤波.

参考文献:

[1] G Alexandre, F Genard, L B J Regine. Nonlinear acoustic echo

cancellation based on volterra filters[J]. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2003, 11(6) : 672- 683.

[2] 韦保林, 罗晓曙, 汪秉宏等. 一种基于三阶 Volterra 滤波器的混沌时间序列自适应预测方法[J]. 物理学报, 2002, 51(10) : 2205 - 2210.

[3] S Haykin. Adaptive Filter Theory (2nd ed) [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

[4] Griffith D W Jr, Arce G R. Partially decoupled volterra filters: fomulation and LMS adaptation[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1997, 45 (6) : 1485- 1494.

[5] Griffith D W Jr, Arce G R. Partially decoupled RLS algorithm for Volterra filters [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1999, 47(2) : 579- 582.

[6] 魏瑞轩, 韩崇昭. 一种全解耦的 Volterra 自适应滤波器[J]. 电子学报, 2001, 29(6) : 839- 841.

WEI Ruixuan, HAN Chongzhao. A fully decoupled Volterra adaptive filter[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 9(6) : 839- 841 (in Chinese).

[7] 孔祥玉, 韩崇昭, 魏瑞轩. 一种全解耦的 RLS 自适应 Volterra 滤波器[J]. 电子学报, 2004, 32(4) : 687- 689.

KONG Xiangu, HAN Chongzhao, WEI Ruixuan. A fully decoupled RLS adaptive algorithm for Volterra filters[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(4) : 687- 689 (in Chinese).

[8] M. Schetzen, The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems [M]. New York: Wiley, 1980.

[9] Golub G H, Loan C F V. An analysis of total least squares problem[J]. SIAM Numer. Anal. , 1980, 17(6) : 883- 893.

[10] Xu L, Oja E, Suen C Y. Modified Hebbian learning for curve and surface fitting[J]. Neural Networks, 1992, 5(3) : 441- 457.

作者简介:



魏瑞轩 男, 1968 年生于陕西岐山, 西安交通大学博士后, 空军工程大学副教授, 研究方向为非线性 Volterra 系统的辨识与建模、信号处理和故障诊断. E-mail: Rxwei@mail.xjtu.edu.com



韩崇昭 男, 1943 年生于陕西韩城, 西安交通大学教授, 博士生导师, 主要研究领域为非线性系统频谱分析及其应用、信息融合理论及其应用、非线性系统辨识与控制.

张宗麟 男, 1941 年生于陕西临潼, 空军工程大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为飞行器导航与控制, 复杂系统建模.