

适用于电磁混合源散射求解的新型积分方程数值方法

王浩刚, 聂在平, 王 军

(电子科技大学微波工程系, 四川成都 610054)

摘 要: 含腔导电目标电磁散射的混合场积分方程求解方法中, 将出现电场积分方程算子和磁场积分方程算子同时作用于待求混合源的复杂情况, 使计算复杂度大为提高. 本文导出“均衡混合场积分方程”及其数值方法, 使作用于电流和磁流的积分算子完全相同, 大大简化了计算. 均衡混合场积分方程与多层快速多极子方法(MLFMA)结合使用, 可以方便地求解含腔导体目标的电磁散射. 本文给出的数值实例充分证明了这一方法的高精度和高效率.

关键词: 电磁散射; 含腔目标; 混合场积分方程; 多层快速多极子方法; 等效原理

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2004)06-0907-04

A New Technique of Solving the Integral Equation for Electromagnetic Scattering from the Targets with Combined Sources

WANG Hao-gang, NIE Zai ping, WANG Jun

(University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: In combined field integral equation (CFIE) method for solving electromagnetic scattering from conductive target with open cavity, there appear both EFIE operator and MFIE operator imposed on unknown combined sources, resulting in complicated calculations. In this paper, a equalized CFIE has been derived, in which the integral operators imposed on electrical and magnetic currents are simply same, and the computation complexity is reduced dramatically due to this single operator in ECFIE. Combination of ECFIE with multilevel fast multipole algorithm (MLFMA) can easily solve electromagnetic scattering from conductive target with open cavity. The numerical examples in this paper show the high precision and high efficiency of this method.

Key words: electromagnetic scattering; target with cavity; combined field integral equation; MLFMA; equivalence principle

1 引言

象飞机这样的目标, 均具有形状复杂的进气道和不同尺寸的槽、缝. 在高频条件下, 这些导电腔体对目标的电磁散射有显著的贡献. 因此, 上述电大尺寸目标的电磁散射特性的精确建模必然导致含腔目标电磁散射的一体化计算, 即在考虑到腔内外互耦的前提下, 同时计算出腔内、外的电磁散射贡献.

由电磁场等效原理^[1], 含腔导体目标的电磁散射模型可以等效为腔口面用导电面闭合之后的一个腔体内问题和一个外问题; 而在导电闭合面的两侧则分别引入大小相等, 方向相反的等效磁流. 在外问题中, 闭合导电面上的等效磁流描述了腔体的电磁散射贡献和腔内外的互耦影响. 在腔体内问题中, 口面总磁场是唯一的激励条件. 腔体内电磁场求解可通过有限元方法^[2], 物理光学迭代方法^[3], 广义网络方法^[4]或表面积分方程方法实现. 例如, 在广义网络方法中, 应用网络级联求出口面上的等效导纳矩阵后, 就将口面总磁场和闭合口面上的等效磁流联系起来^[9].

在电大尺寸含腔目标散射的等效外部问题中, 为了避免因近谐振特性所产生的迭代求解收敛缓慢的问题, 常采用混合场积分方程(CFIE)方法求解^[5,6]. 但正如上述, 对于含腔目标又同时存在待求的电流密度和磁流密度这样的“混合源”. 因此, 在含腔导电目标电磁散射的 CFIE 求解中, 将出现电场积分方程(EFIE)算子和磁场积分方程(MFIE)算子共同作用于待求电流和磁流的复杂情况, 使计算复杂度大为提高. 特别是对于求解诸如飞机、导弹这样一些电大尺寸空中目标的雷达散射截面(RCS)时, 本来就面临着存储量和计算量的巨大压力. 上述具有混合源的混合场积分方程的出现, 将使对计算量和存储量的要求大到难以实现的程度.

本文针对上述问题, 推导出适合于电大尺寸含腔目标电磁散射求解的“均衡混合场积分方程(ECFIE)方法”. 相比一般的具有混合源的混合场积分方程中各含有两分别作用于电流和磁流的积分算子, ECFIE 中仅含有一个既作用于表面电流, 又作用于表面等效磁流的单一积分算子, 从而大大节省了内存和计算量的要求. 与此同时, ECFIE 又完全保持了 CFIE 的优点, 即通过混合场算子的应用, 大大降低相应矩阵条件数,

加速了二次源数值求解的迭代收敛速度.

2 具有混合源的混合场积分方程

在图 1 所示的含腔三维目标电磁散射的等效外问题中, 目标散射场可视作含腔目标外表面的二次(感应)电流和腔体口径闭合导体表面上等效磁流的结果. 具有上述混合源的电场积分方程(EFIE)为:

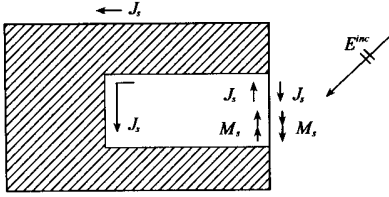


图 1 含腔三维目标电磁散射的等效问题

$$E(\mathbf{r}) = E^{inc}(\mathbf{r}) + \int_{s'} d\mathbf{s}' \left\{ i\omega\mu \left[\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] + \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') \times \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \quad (1)$$

其中, 自由空间标量格林函数 $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{ikR}/4\pi R$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$, s 为散射体整个闭合外表面, $E(\mathbf{r})$ 和 $E^{inc}(\mathbf{r})$ 分别为总电场和入射电场, 式(1)右边的积分则为混合源 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 和 $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ 产生的散射电场.

如果用磁场积分方程(MFIE)来描述, 则有

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) + \int_{s'} d\mathbf{s}' \left\{ i\omega\epsilon \left[\mathbf{M}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] - \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \quad (2)$$

$\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r})$ 分别为总磁场和入射磁场, 式(2)右边的积分则为混合源 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 和 $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ 对散射磁场的贡献.

在式(1)和(2)中, 当 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ 时被积函数将产生奇异性. 经消除积分奇异性的主值积分处理后, 式(1)和(2)分别变为^[8]

$$\frac{1}{2} E(\mathbf{r}) = E^{inc}(\mathbf{r}) + \int_{s-\Delta s} d\mathbf{s}' \left\{ i\omega\mu \left[\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] + \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') \times \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) + \int_{s-\Delta s} d\mathbf{s}' \left\{ i\omega\epsilon \left[\mathbf{M}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] - \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \quad (4)$$

由于排除体积元 Δs 的电场贡献无表面切向分量, 而上述积分方程离散化时所选权函数又是表面切向矢量, 故求内积之后 Δs 上相应的内积项为零. 在此情形下, 直接使用式(1)亦能获得正确的结果. 相比之下, 排除体积元 Δs 的磁场贡献却只有表面切向分量, 故 Δs 相应的内积项不为零. 因此, 磁场积分方程必须应用式(4)进行离散化处理.

由式(3)和式(4)电、磁场的 PEC 表面边界条件, 经切向权矢量 \mathbf{t} 的离散化处理, 可得

$$\mathbf{t} \cdot i\omega\mu \mathbf{L}_e(\mathbf{J}) = \mathbf{t} \cdot [\mathbf{L}_m(\mathbf{M}) + \mathbf{f}_c] \quad (5)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{L}_m(\mathbf{J}) = \mathbf{t} \cdot [\mathbf{n} \times i\omega\epsilon \mathbf{L}_e(\mathbf{M}) + \mathbf{f}_m] \quad (6)$$

其中, $\mathbf{f}_c = -4\pi\mathbf{E}^{inc}$, $\mathbf{f}_m = 4\pi\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{inc}$ (7)

算子
$$\mathbf{L}_e(\mathbf{K}) = \int d\mathbf{s} [\mathbf{K}g + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{K} \nabla g] \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_m(\mathbf{K}) = \text{sgn}(\mathbf{K}) \mathbf{L}_n(\mathbf{K}) \quad (9)$$

而 $\mathbf{L}_h(\mathbf{K}) = 2\pi\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{K} + \int d\mathbf{s} \nabla g \times \mathbf{K}$, $\mathbf{K} \in \mathbf{J}$ 或 \mathbf{M} ,

$$\text{sgn}(\mathbf{K}) = \begin{cases} -1, & \mathbf{K} = \mathbf{J} \\ +1, & \mathbf{K} = \mathbf{M} \end{cases} \quad (10)$$

EFIE 和 HFIE 都具有零空间解. 也就是说, 当处于散射体的谐振频率附近时, EFIE 或 HFIE 的解是非唯一的. 散射体接近谐振点时算子矩阵的条件数亦将急剧增大, 导致解的不稳定和迭代收敛性质变坏. 消除上述问题的常用方法是混合场积分方程(CFIE)方法.

混合场积分方程(CFIE)则是通过电场积分方程(EFIE)和磁场积分方程(MFIE)的线性组合构成的, 它可表示为

$$\text{CFIE} = \alpha \cdot \text{EFIE} + \beta \cdot \text{MFIE} \quad (11)$$

α 和 $\beta = 1 - \alpha$ 为常数. 这一线性组合使得在 CFIE 中, 不论 EFIE 或 MFIE 的谐振点导致的解的不稳定性均被大大削弱. 所以, α 和 β 的取值并无精确的限定, 只需使 EFIE 和 MFIE 在 CFIE 中的影响均衡, 能够互相牵制即可.

于是, 由式(5)、(6)混合积分方程可表为:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{J}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{L}_1(\mathbf{M}) + \mathbf{t} \cdot [\mathbf{g}_e + \mathbf{g}_m] \quad (12)$$

其中
$$\mathbf{L}(\mathbf{J}) = i\omega\mu\alpha \mathbf{L}_e(\mathbf{J}) + \beta\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_m(\mathbf{J}) \quad (13)$$

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{M}) = \alpha \mathbf{L}_m(\mathbf{M}) + \hat{\mathbf{n}} \times i\omega\beta \mathbf{L}_e(\mathbf{M}) \quad (14)$$

式中, 算子 $\mathbf{L}(\mathbf{J})$ 和 $\mathbf{L}_1(\mathbf{M})$ 均包含了算子 \mathbf{L}_e 和 \mathbf{L}_m , 它们又分别作用于混合源 \mathbf{J} 和 \mathbf{M} . 显然, 在数值计算中, 这些作用于混合源的两种不同的算子将导致更大的计算量和存储要求.

3 均衡混合场积分方程及其离散方法

在式(12)中, 适当选择常数 α 和 β , 使得:

$$\frac{i\omega\mu\alpha}{i\omega\beta} = \eta^2 \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{\eta} = \eta, \text{ 即 } \beta = \eta\alpha \quad (15)$$

其中 η 为空间波阻抗, 考虑到(11)中 EFIE 和 MFIE 的量纲差别, 将式(11)重写为

$$\text{CFIE} = \alpha \cdot \text{EFIE} + (1 - \alpha) \cdot \frac{i}{k} \text{MFIE}$$

这时, 满足(15)式的 $\alpha = 0.5$

在此条件下, 混合场积分方程简化为

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{J}) = i\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(-i\mathbf{M}) + \mathbf{t} \cdot [\mathbf{g}_e + \mathbf{g}_m] \quad (16)$$

或写为

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{L}(\mathbf{J}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{L}(-i\mathbf{M}) + \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \times [\mathbf{g}_e + \mathbf{g}_m] \quad (17)$$

由(16)和(17)得:

$$[\bar{\mathbf{T}} + i\hat{\mathbf{n}} \times][\mathbf{L}_t(\mathbf{J} + i\mathbf{M}) - \mathbf{f}_t] = 0 \quad (18)$$

其中, \mathbf{L} 由式(13)表达, 下角标 t 表示取切向分量. 式(16)~(18)均称为均衡混合场积分方程(ECFIE). 显然, 在 ECFIE 中,

仅有一单一的算子 L 作用于混合源.

尽管均衡混合场积分方程(16)~(18)中仅含有单一算子 L , 但若直接应用矩量法离散, 则会产生分别对应于 $t \cdot L(J)$ 和 $\nabla t \cdot \hat{n} \times L(J)$ 的两个矩阵. 为了使计算量和存储量降低至最低限度, 可采用下列步骤来离散均衡混合场积分方程:

(a) 选择分域基函数集 $\{j_i\}_{i=1}^N$, 并将表面电流 $J(r)$ 和磁流 $M(r)$ 分别用上述基函数集展开, 得

$$J = \sum_{i=1}^N a_i j_i, M = \sum_{i=1}^N b_i j_i \quad (19)$$

(b) 选择相切于表面的矢量 $\{t_j\}_{j=1}^N$ 作为权函数集, 替代方程(16)~(18)中的权矢量 t , 将上述基函数展开式和权函数代入式(16), 得

$$\sum_{i=1}^N \langle t_j, L(j_i) \rangle a_i = \sum_{i=1}^N \langle t_j, \hat{n} \times L(j_i) \rangle b_i + \langle t_j, [f_c + f_m] \rangle \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

上式可写成下列矩阵形式

$$[L][a] = \nabla[L][b] + [f] \quad (21)$$

其中, $[a]^t = [a_1, a_2, \dots, a_N]$, $[b]^t = [b_1, b_2, \dots, b_N]$,

$$L_{ji} = \langle t_j, L(j_i) \rangle, \nabla L_{ji} = \langle t_j, \hat{n} \times L(j_i) \rangle, f_j = \langle t_j, f_c + f_m \rangle \quad (22)$$

(c) 定义两个稀疏阵 $[C]$ 和 $[D]$, 其中

$$C_{ji} = \langle t_j, \hat{n} \times j_i \rangle, D_{ji} = \langle t_j, j_i \rangle \quad (23)$$

则可证明 $[L] = [C][D]^{-1}[L]$ (24)

把式(24)代入式(21), 均衡混合场积分方程最终被离散为

$$[L][a] = \nabla[C][D]^{-1}[L][b] + [f] \quad (25)$$

在含腔目标电磁散射求解中, 腔口径面被金属表面封闭之后的等效磁流可由口面导纳矩阵和总磁场表达^[9], 使 $[b]$ 也成为口面待求电流矢量. 于是式(25)就成为关于目标闭合外表面上待求电流的矩阵方程.

由式(25)可以看出, 等式两侧有同样的算子矩阵 $[L]$, 相应的矩阵填充只需进行一次. 因此, 与一般的 EFIE, MFIE 和 CFIE(分别对应于式(5), (6), (12)均含有两个不同的矩阵)相比, 其计算量和存储量均减少一半. 其次, 对于含腔目标电磁散射的外部等效问题而言, 腔体已被封闭, 不会因腔体的内谐振特性使矩阵 $[L]$ 的条件数变大, 有利于改善数值求解的迭代收敛特性. 而均衡混合场积分方程仍保持了一般混合场积分方程在克服外部谐振点上解的不稳定性方面的优点. 最后, 外部等效模型中各面元上电、磁流的相互耦合, 也较好地描述了腔体内、外散射场的实际耦合关系.

4 计算实例与数值结果

为了验证均衡混合场积分方程的正确性和有效性, 比较等效原理、导纳矩阵(网络级联)方法与均衡混合场积分方程相结合求解含腔目标与含腔目标一体化求解方法的性能. 我们给出如下一些数值实例.

图 2 为一含矩形腔体的 σ 型导电金属目标. 其尺寸如图 2(a)、(b)所示. 其中腔体的口径和深度尺寸分别为 $1\lambda \times 1\lambda \times 5\lambda$ 图 3 为 σ 型含腔导电目标在 θ 极化平面波照射下的 θ 极化后向散射单站 RCS 曲线, 其中虚线为基于 EFIE 的计算结果. 这时, 整个矩形腔被视为一个整体, 将腔体内、外表面上的

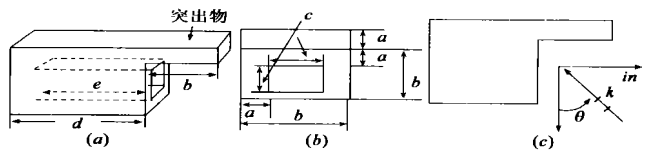


图 2 顶部突出的矩形腔. 其中 $a = 0.25\lambda; b = 1.5\lambda; c = 1\lambda; d = 5.5\lambda; e = 5\lambda$ (a) 三维形体图, (b) 俯视图, (c) 平面波入射下的侧视图.

待求电流均作为 EFIE 的未知量求数值解. 图 3 中带点实线则表示基于等效原理, 网络级联和均衡混合场积分方程(ECFIE)并应用 MLMFA^[7] 的计算结果. 两者数据吻合极好, 证明了均衡混合场积分方程方法的正确性和有效性.

图 4 为在上述实例中求解平面波垂直入射于该腔体口面的后向 RCS 时, 用普通混合场积分方程的一体化散射计算和用等效原理网络级联(CS), 和均衡混合场积分方程方法的迭代收敛速度的比较. 收敛精度设为 1.0×10^{-3} . 由图可知, 达到上述精度时, CFIE 一体化散射计算需要 115 步的迭代, 而 CS + ECFIE 仅需 29 步迭代, 并且每一步迭代的计算量较前者降低了很多. 这是因为方程中不含腔体内表面电流的未知量, 且 ECFIE 中也只有一个单一的算子矩阵需要计算.

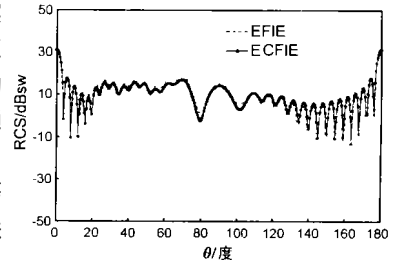


图 3 σ 形腔体 θ 极化单站 RCS 计算结果. 带点实线为 ECFIE+ MLMFA+ MLFMA 混合方法和计算结果, 虚线为 EFIE 计算结果.

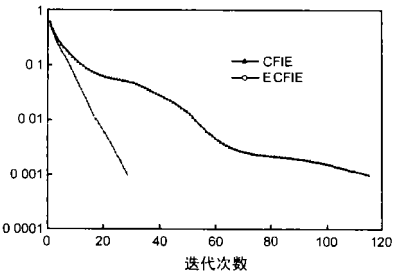


图 4 归一化剩余泛数与迭代步的关系, 平面波垂直于口径面入射: $\theta = 90^\circ$

图 5 是一个模拟飞行目标进气道的 S 形弯曲矩形口径腔体. 图 5(a) 为其具体尺寸数据, 单位均为 mm. 腔体的实际长度约为 962mm, 壁厚为 3mm, 腔体口径尺寸为 101.6×203.2 mm. 入射平面波的工作频率为 9GHz, 故腔体电尺寸约为 $3\lambda \times 6.1\lambda \times 28.9\lambda$, 是典型的具有复杂形状的电大尺寸腔体. 本文应用等效原理, 网络级联方法, 均衡混合场积分方程方法和 MLMFA 计算了该腔体 HH 极化的后向散射即单站 RCS 特性, 并将计算数据与测量数据进行了对比验证. 图 5(b) 为 360° 范围内 HH 极化单站 RCS 的测量值. 图 5(c) 为相应的计算数据, 图 5(d) 则示出 $60^\circ \sim 120^\circ$ 范围内测量值和计算值详细的逐点比较. 在此例中, 测量的采样间隔为 0.2° , 而计算时 θ 角的步长为 1.0° . 由图 5 可以看出, 计算结果与测量数值的吻合程度已相当理想.

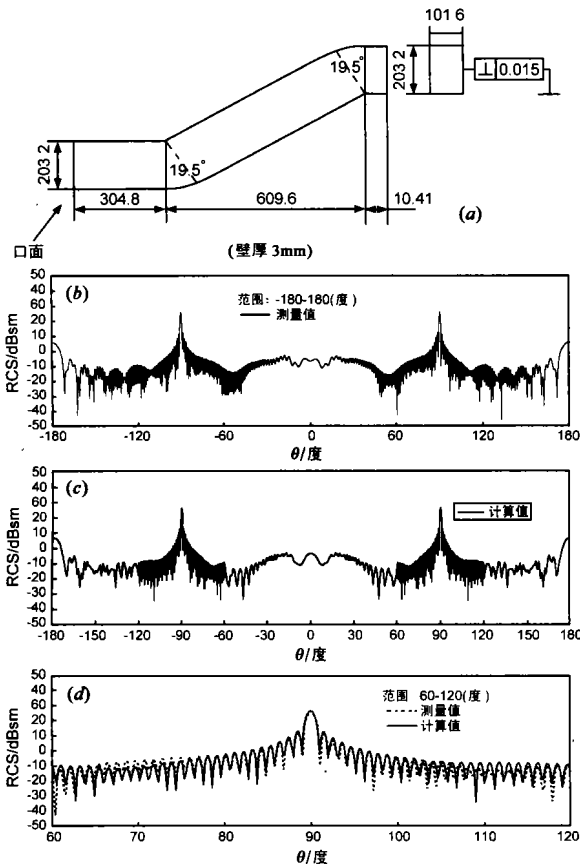


图5 S形弯曲矩形口径进气道HH极化单站RCS的ECFIE+CS+MLFMA计算结果和测量数据的比较。(a)S形弯曲矩形口径进气道尺寸(单位:mm), (b)HH极化单站RCS测量值; (c)HH极化单站RCS计算值,在 $\theta \sim 120^\circ$ 采样间隔 0.2° ; (d)该S形进气道 $60^\circ \sim 120^\circ$ 范围内的HH极化单站RCS计算与测量之比较,其采样间隔为 0.2° 。

5 结论

本文导出了适用于含腔导电目标电磁散射求解的具有混源的均衡混合场积分方程,并给出了相应的高效数值求解方法。它较之普通混合场积分方程,计算量和存储量要求都减少了一半。同时,数值求解的迭代收敛速度显著提高。这在电大目标RCS计算中尤其具有重要意义。此外,该方法仍保存了混合场积分方程能有效克服近谐振导致的解的不稳定性的优点。本文还通过数值实例证明了等效原理、网络级联和均衡混合场积分方程方法求解含腔目标电磁散射时较之一体化散射计算的明显优势。

参考文献:

- [1] R F Harrington. Time Harmonic Electromagnetic Fields [M]. McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
- [2] S S Zivanovic, K S Yee, K K Mei. A subgridding method for the time domain finite difference method to solve Maxwell's equations [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques, 1991, MTT-39(3): 471-479.
- [3] H Ling, R C Zhou, S W Lee. Shooting and bouncing rays: calculating the RCS of an arbitrary shaped cavity [J]. IEEE Trans. On Antennas Propagat., 1989, Ap 35: 648-654.
- [4] T M Wang, H Ling. A connection algorithm on the problem of EM scattering from arbitrary cavities [J]. Journal of EM waves and Applications, 1991, 5: 301-314.
- [5] J M Song, W C Chew. Multilevel fast multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering [J]. Microwave and Optical Tech. Lett., 1995, 10(10): 14-19.
- [6] Johnson J H Wang. Generalized Moment Methods In Electromagnetics: Formulation and Computer Solution of Integral Equations [M]. John Wiley & Sons, Inc, 1991.
- [7] 聂在平, 胡俊, 姚海英, 王浩刚. 用于复杂目标三维矢量散射分析的快速多极子方法 [J]. 电子学报, 1999, 27(6): 104-109.
- [8] 王浩刚. 电大尺寸含腔复杂目标矢量电磁散射一体化精确建模与高效算法研究 [D]. 成都: 电子科技大学 [D], 2001.5.
- [9] 聂在平, 王浩刚. 含腔电大尺寸导体目标电磁散射的一体化数值模拟 [J]. 物理学报, 2003, 52: 12.

作者简介:



王浩刚 男, 1974 年生于广东南雄, 2001 年在电子科技大学电子工程学院电磁场与微波技术专业研究生毕业并获博士学位, 从 2002 年至今, 在香港城市大学作为为期两年的访问研究。他现在的主要研究方向包括电大尺寸目标电磁散射的高效计算, 以及计算电磁学在射频集成电路和电子材料中的应用等。



聂在平 男, 1946 年生于陕西西安, 教授, 博士生导师, 中国电子学会会士, IEEE 高级会员, 1981 年在现电子科技大学获硕士学位; 1987~1989 年在美国伊利诺依大学电磁实验室从事研究工作; 1990 年以来主持并完成 20 余项研究课题, 先后获国家科技进步二等奖一项, 省、部级科技进步一、二、三等奖共五项, 在国内外发表学术论文 200 余篇, 主要研究兴趣包括: 计算电磁学、电磁散射与逆散射、非均匀介质中的场与波、新一代移动通信中的多天线技术等。