

LFM 信号的一种最优滤波算法

齐 林^{1,2}, 陶 然¹, 周思永¹, 王 越¹

(1. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081; 2. 郑州大学信息工程学院, 河南郑州 450052)

摘 要: 本文提出了一种基于分数阶傅立叶变换的 LFM 信号的最优滤波算法. 首先由线性最小均方误差估计的正交条件出发, 得到了连续分数阶傅立叶域上的等效 Wiener 滤波算子的求解方法; 在此基础上, 进一步给出了滤波算子的离散化算法. 分析及数值仿真的结果表明, 这一算法不仅在性能上接近普通的 Wiener 滤波器, 而且计算简单, 便于实现.

关键词: LFM 信号; 最优滤波; 分数阶傅立叶变换

中图分类号: TN957.51 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 09-1464-04

An Approach for Optimal Filtering of LFM Signal

QI Lin^{1,2}, TAO Ran¹, ZHOU Si-yong¹, WANG Yue¹

(1. Dept. of Electronics Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. College of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou, Henan 450052, China)

Abstract: This paper proposes a novel method for the optimal filtering of linear FM signal based on the fractional Fourier transform. First, an optimal filtering operator on the continuous fractional Fourier domain is provided according to the orthogonality principle about the linear minimum mean square error (MSE) estimation, and then, a discrete algorithm of the filtering operator is further proposed. Theoretical analysis and simulation results show that the performance of the proposed filtering algorithm is very close to that of the Wiener filtering, and also, this filtering algorithm is simple in computation and easy in implementation.

Key words: LFM signal; optimal filtering; fractional Fourier transform

1 引言

非平稳信号中, 线性调频 (LFM) 信号的应用十分广泛, 对它的处理在现代信号处理的理论与方法中占有重要的地位, 如何恢复被噪声污染的 LFM 信号则是其中的一个关键性的问题. 从本质上来说, 这一问题可归结为含噪信号的滤波或波形估计. 对于平稳信号, 最小均方误差意义下的最优滤波算子可表示为时域的卷积或频域的乘性滤波器; 而对于线性调频信号这种具有大的时间带宽积的非平稳信号而言, 最优滤波算子一般来说将不再是时不变的, 也就不再可能表示为时域卷积或频域的乘性滤波. 由此产生的一个直接后果就是滤波过程中运算量的急剧增加, 而降低运算量的一种有效的途径是在滤波过程中引入线性变换. 基于这一原理, 文献 [1] 和 [2] 分别提出了在分数阶傅里叶域上利用乘性算子实现时变滤波和信号分离的方法, 由于分数阶傅里叶变换可利用快速算法实现, 这种方法具有可以和普通频域滤波算法相比拟的运算复杂度. 另一方面, 由于到传统的傅里叶变换只是分数阶傅里叶变换的一个特例, 因而分数阶傅里叶域的滤波不但和能够频域滤波一样有效, 而且应具有更好的普适性. 文献 [3] 进一

步讨论了分数阶傅里叶域上的最优滤波问题, 并利用变分法得到了在加性白噪声环境下分数阶傅里叶域上任意确定性信号的最优估计 (滤波) 算子的求解方法. 然而, 由于分数阶傅里叶变换只是所有线性变换一个子集, 这种最优估计算子并不一定就是相应的滤波问题的 Wiener 解. 本文则针对白噪声中线性调频信号的滤波问题, 由线性最小均方误差估计的正交条件出发, 给出了分数阶傅里叶域上的 Wiener 滤波算子的求解方法及这一滤波算子的离散实现, 并通过数值仿真验证了这一算法的有效性.

2 分数阶傅里叶变换与分数阶傅里叶域

近年来, 一种新的时频分析工具——分数阶傅里叶变换 (FRactional Fourier Transform, FRFT) 引起了信号处理界越来越多的关注. 1980 年, V Namias 首先从数学的角度提出了 FRFT 的定义^[4], L B Almeida 分析了它和 WVD 的关系并将其解释为时频平面的旋转算子^[1]. 作为傅里叶变换的一种广义形式, 信号的 FRFT 可以解释为将信号的坐标轴在时频平面上绕原点作逆时针旋转. 如果信号的傅里叶变换可看成将其由时间轴上逆时针旋转 $/2$ 后到频率轴上的表示, 则 FRFT 可以看成

将信号在时间轴上逆时针旋转角度 μ_0 到 u 轴上的表示. 信号 $x(t)$ 的 FRFT 定义为^[1]:

$$X(u) = F^p[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K(t, u) dt \quad (1)$$

式中, p 为 FRFT 的阶, 可以为任意实数, $\mu_0 = p/2$, 为 FRFT 的算子符号, $K(t, u)$ 为 FRFT 的变换核,

$$K(t, u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \mu_0 - itucsc \mu_0), & n \\ (t - u), & = 2n \\ (t + u), & = (2n \pm 1) \end{cases} \quad (2)$$

FRFT 的逆变换为:

$$x(t) = F^{-p}[X(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(u) K^*(t, u) du \quad (3)$$

式(3)说明, 信号 $x(t)$ 可被分解为 u 域上一组正交 LFM 基的线性组合, u 域称为分数阶傅里叶域, 而时域和频域则视为分数阶傅里叶域的特例. 因此, FRFT 最适于处理 LFM 类 (Chirp-like) 的信号.

3 LFM 信号的分数阶傅里叶域最优滤波

设观测信号为一混有加性白噪声的 LFM 信号, 表示为:

$$x(t) = s(t) + w(t) = a(t) e^{j \omega_0 t + j \frac{1}{2} \mu_0 t^2} + w(t), 0 \leq t \leq T(4)$$

其中 $w(t)$ 为复的零均值高斯白噪声, 方差为 $\frac{2}{w}$; $a(t)$ 为一实际的窄带平稳过程. 现在的问题是, 针对上式给出的观测模型, 如何在某种准则下最大限度地消除噪声的影响. 工程应用中, 通常采用最小均方误差准则. 如果信号和噪声均为平稳过程, 则最优线性估计算子就是经典的 Wiener 滤波, 可通过时域的卷积或频域的乘性算子实现. 但当噪声或信号为非平稳过程时, 最优线性估计算子一般不具有时不变特性, 其离散实现中难以利用现有的各种快速算法, 从而导致了滤波过程中运算量的增加. 在这种情况下, 利用线性变换等效 Wiener 滤波可带来某种计算上的方便. 它的基本思路是, 对输入信号进行一次正交变换以去除或衰减信号分量间的相关性, 从而可以利用变换域上的乘性算子实现信号的最优滤波, 然后将滤波后的信号通过相应的反变换恢复为时域表示. 如果所采用的正交变换可以用快速算法实现, 则滤波过程中的计算可以被简化^[5]. 当观测信号为含噪的 LFM 信号时, 根据 FRFT 的定义与性质可知, 信号分量间的相关性最弱, 因而分数阶傅里叶域的滤波可能得到比频域滤波更低的均方误差. 另一方面, FRFT 可以借助快速算法来实现, 因此, 滤波性能的提高无需在运算上付出额外的代价.

对于式(4)给出的信号模型, 分数阶傅里叶域上的滤波算子可表示为:

$$\hat{s}(t) = F^{-p}\{f(u) F^p[x(t)]\} \quad (5)$$

其中 $f(u)$ 表示分数阶傅里叶域上的乘性滤波函数. 此时, 我们面临的问题是, 是否在取某一变换阶数 p_0 时, 存在一个最优的滤波算子 $f_0(u)$, 使得式(5)给出的结果是信号 $s(t)$ 的一个最小线性均方误差估计.

根据在 L^2 空间的正交性原理可知, 对于 Wiener 滤波算子, 以下关系式成立:

$$E\{[s(t) - \hat{s}(t)] x^*(t)\} = 0 \quad (6)$$

即:

$$E[s(t) x^*(t)] = E[\hat{s}(t) x^*(t)] \quad (7)$$

根据信号的统计特性有:

$$E[s(t) s^*(t)] = E[s(t) s^*(t)] + E[s(t) w^*(t)] \quad (8)$$

由式(4)和(5)以及 FRFT 的定义可知, 上式可表示为:

$$\begin{aligned} R_a(t - \tau) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) [E[s(t) s^*(t)] K_p(u, t) dt] K_p^*(u, t) du \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) [E[w(t) w^*(t)] K_p(u, t) dt] K_p^*(u, t) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) [R_a(t - \tau) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} K_p(u, t) dt] K_p^*(u, t) du \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) \frac{2}{w} [E[w(t) w^*(t)] K_p(u, t) dt] K_p^*(u, t) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) [R_a(t - \tau) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} K_p(u, t) dt] K_p^*(u, t) du \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) K_p(u, \tau) K_p^*(u, t) du \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $R_a(t - \tau) = E[a(t) a^*(t - \tau)]$. 将 $K_p(u, t)$ 的定义式代入上式可得:

$$\begin{aligned} R_a(t - \tau) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) R_a(t - \tau) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} \\ &\cdot e^{j \omega_0(t - \tau) + j \mu_0 t^2} e^{-j \omega_0(t - \tau) - j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} \cdot e^{-j \omega_0(t - \tau) - j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} dt \end{aligned} \quad (10)$$

显然, 若要上式成立, 则其右侧复指数幂中的所有 t^2 和 t 项之和必须为零, 由此不难得出:

$$\mu_0 = -\cot \mu_0 \quad (11)$$

由式(11)可进一步得到最优的变换阶数:

$$P_0 = 2 \cot^{-1}(\mu_0) \quad (12)$$

此时, 式(9)简化为:

$$\begin{aligned} R_0(t - \tau) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) [R_a(t - \tau) e^{-j(\omega_0 t - \omega_0 \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} \\ &\cdot e^{-j \omega_0(t - \tau) - j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} dt] \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} du \end{aligned} \quad (13)$$

根据维纳-辛钦定理, 有:

$$R_a(t - \tau) e^{j(\omega_0 t - \omega_0 \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} d(t - \tau) = S_a(\omega_0 t - \omega_0 \tau) \quad (14)$$

其中 $S_a(\omega)$ 为 $a(t)$ 的功率谱密度. 则式(8)可以表示为:

$$\begin{aligned} R_a(t - \tau) e^{j \omega_0(t - \tau) + j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) [S_a(\omega_0 t - \omega_0 \tau) + \frac{2}{w} j] e^{-j \omega_0(t - \tau) - j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} du \end{aligned} \quad (15)$$

已知:

$$R_0(t - \tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{j \omega(t - \tau)} d\omega \quad (16)$$

根据傅里叶变换的性质, 由式(15)可得:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega_0 t - \omega_0 \tau) e^{-j \omega_0(t - \tau) - j \frac{1}{2} \mu_0(t - \tau)^2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) [S_a(ucsc - \mu_0) + \frac{2}{w} J e^{-ju(t-\tau)csc}] du \quad (17)$$

因此有:

$$f_0(u) = \frac{S_a(ucsc - \mu_0)}{S_a(ucsc - \mu_0) + \frac{2}{w}} \quad (18)$$

至此,我们可以得出的结论是,当变换阶数和分数阶傅里叶域的滤波函数分别由式(12)和式(18)给定时,式(5)的结果的确是信号 $s(t)$ 的一个最小线性均方误差估计,或者说,式(5)给出了一个分数阶傅里叶域上的等效 Wiener 滤波器。

4 分数阶傅里叶域最优滤波器的离散实现及仿真实例

上述的分析结果仅适用于连续时间信号,而在实际应用中,一般需处理离散信号,因此有必要把上一节给出的最优滤波算子的求取方法推广到离散域上。首先,若定义线性空间的 N 维列向量:

$$\begin{aligned} X &= [x(1), \dots, x(N)]^T \\ S &= [s(1), \dots, s(N)]^T \\ W &= [w(1), \dots, w(N)]^T \end{aligned} \quad (19)$$

则式(6)所描述的观测信号模型的离散形式为:

$$X = S + W \quad (20)$$

其中 s 和 w 分别表示信号和噪声的采样序列,且有:

$$s(k) = a(k) e^{j(\mu_0 k + \frac{1}{2} \mu_0^2 k^2)}, 0 \leq k \leq N \quad (21)$$

其中 $a(k)$ 为实的窄带平稳序列。根据 Wiener 滤波的理论, s 的最小均方误差估计为:

$$\hat{s} = E[SX^T] E[XX^T]^{-1} X = R_s (R_s + \frac{2}{w} I)^{-1} X \quad (22)$$

其均方误差为:

$$\sigma_{\min} = E[(S - \hat{s})(S - \hat{s})^T] = \text{tr} [R_s - R_s (R_s + \frac{2}{w} I)^{-1} R_s] \quad (23)$$

离散分数阶傅里叶域等效滤波器可表示为:

$$\hat{s} = F^{-p} H F^p X \quad (24)$$

其中 F^p 为离散 FRFT 的变换矩阵, H 是一个对角矩阵,其对角线上的元素由离散分数阶傅里叶域上的滤波算子的元素构成。显然,滤波器的性能与所选取的离散 FRFT 算法密切相关。目前,已有几类不同的离散 FRFT 快速算法,不同的算法需要不同的处理,具有不同的精度。本文中选用了文献[6]提出的分解型快速算法,该算法可将 FRFT 分解为信号的卷积形式,其计算结果与连续的 FRFT 的输出比较接近。分解型算法的变换矩阵为:

$$F^p = D K_p J \quad (25)$$

式中, D 和 J 分别二倍的内插和抽取运算的矩阵, K_p 为离散 FRFT 的变换核矩阵,

$$K_p = \frac{A}{\sqrt{4N}} e^{j(\frac{m^2 - 2mn + n^2}{4N})}, |m|, |n| \leq N \quad (26)$$

其中 $A = \text{csc} \frac{p}{2}$, $\mu_0 = \text{csc} \frac{p}{2}$ 。

与连续域的结果类似,当取变换阶数为:

$$p = 2 \cot^{-1} (4N \mu_0) \quad (27)$$

及滤波矩阵 H 的对角线元素为:

$$H(k, k) = \frac{S_a[(kcsc - \mu_0)/(2\sqrt{N})]}{S_a[(kcsc - \mu_0)/(2\sqrt{N})] + \frac{2}{w}} \quad (28)$$

时,式(24)等效为一个 Wiener 滤波器,其中 $S_a(\cdot)$ 为 $a(k)$ 的功率谱密度的估计。和式(22)一样,式(24)的输出也是 s 的最小均方误差估计,或者说,两者得到的是统计性能应完全相等的估计。当输入信号的二阶统计量已知时,式(22)的计算复杂度为 $O(N^2)$,而式(24)的运算可借助 FFT 实现,其计算复杂度为 $O[N \log(N)]$ 。因此,当 $N \gg 1$ 时,采用分数阶傅里叶域的等效 Wiener 滤波器可显著地提高计算效率。

为验证上述滤波算法的有效性,下面给出了上述滤波算法的 Monte Carlo 仿真结果。仿真实验中,观测信号的样本如式(20)所描述,样本序列的长度取为 $N = 512$, $\frac{2}{w} = 1$,并取 $a(k) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi k/N)$ 及 $S_a(\cdot) = (1/N) | \text{DFT}[a(k)] |^2$ 为 $S_a(\cdot)$ 的估计。取信号参数 $\mu_0 = 0$, μ_0 的变化范围为 -0.002 到 0.002 ,相应的变换阶数 p 的变化范围为 0.5 到 1.5 。在此范围内取 μ_0 的增量为 2×10^{-4} ,按式(24)分别运行 50 次 Monte Carlo 模拟,并计算各点 MSE 的平均值。

所得到的平均 MSE 特性示于图 1,图中归一化运算所用到的系数 σ_{\min} 由式(23)得出。由图 1 可见,在 $0.4 < p < 1.4$ 的范围内,估计的平均 MSE 比较接近最小 MSE,约为最小 MSE 的 1.5 ~ 2.5 倍。显然,相对于普通的 Wiener 滤波,分数阶傅里叶域等效 Wiener 滤波器的性能略有下降,其主要原因是滤波算法中所采用的分解型离散 FRFT 的变换是一种近似的正交变换,其变换过程并不满足严格的保范性,特别是在 p 的取值接近于 0.5 或 1.5 时,其非正交性较为严重,导致估计误差的急剧增加。因此,本文给出的离散分数阶傅里叶域等效滤波器仅是一种近似的 Wiener 滤波器,在大多数情况下,其估计误差接近于普通的 Wiener 滤波器。

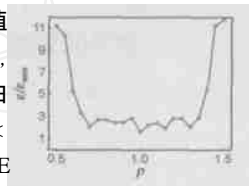


图 1 离散分数阶傅里叶域等效 Wiener 滤波器的归一化 MSE 特性

5 结论

本文深入研究了白噪声环境中线性调频信号的分数阶傅里叶域最优滤波问题,首先由连续时间域的线性最小均方误差估计的正交条件出发,得到了连续分数阶傅里叶域上的 Wiener 滤波算子的求解方法;在此基础上,进一步给出了这一滤波算子的一种离散化算法及其数值仿真的结果。仿真及分析表明,对于大多数的变换阶数,这一算法的性能可逼近 Wiener 滤波器,而且具有计算简单,便于实现的特点。

参考文献:

[1] L B Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Trans on SP, 1994, 42(11): 3084 - 3091.
 [2] Ozaktas H M, et al. Filtering in fractional Fourier domains and their relation to chirp transforms[A]. Proc of 7th Mediterranean Electrotechnical Conference[C]. Antalya Turkey:MEC, 1994. 77 - 79.

- [3] Kutay M A. Optimal filtering in fractional Fourier domains[J]. IEEE Trans on SP,1997 ,45(5) :1129 - 1143.
- [4] Namias V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics[J].J of Appl Math ,1980 ,25 :241 - 265.
- [5] 柳重堪. 信号处理的数学方法[M]. 南京:东南大学出版社, 1992. 151 - 153.
- [6] Ozaktas H M ,et al. Digital computation of the fractional fourier transform[J]. IEEE Trans on SP ,1996 ,44(9) :2141 - 2150.

作者简介:

齐 林 男,1961年7月生于河南郑州,1982年毕业于南京邮电学院微波通信专业,获学士学位,1990年获南京理工大学计算机应用

专业硕士学位,现为郑州大学信息工程学院副教授,北京理工大学在读博士研究生,主要研究方向为现代信号处理及其在通信和雷达系统中的应用.

陶 然 男,1964年11月生于安徽南陵,现任北京理工大学电子工程系副主任、信息安全与对抗研究中心主任、教授、博士生导师,感兴趣的研究方向:新型探测理论与系统,宽带无线移动通信理论及应用,信息安全与对抗,获“国家高校青年教师奖”及部级二等奖1项、部级三等奖3项,已发表论文100余篇,其中三大检索收录40余篇,出版著作3部,主持包括国家自然科学基金重点项目、总装备部重点预研项目、国防科工委重点预研项目共10余项.

www.cnki.net