

色噪声背景下的二维谐波频率估计

汪 飞, 王树勋, 窦慧晶

(吉林大学通信工程学院, 吉林长春 130025)

摘 要: 针对色噪声背景下的二维谐波频率估计问题, 本文提出了拓广的二维 ESPRIT 算法. 该算法对二维 MA 模型的噪声具有比较好的抑制能力. 同时, 对于二维频率配对问题, 本文给出了一种更为简便的方法. 仿真实验验证了算法的正确性.

关键词: 二维; ESPRIT; 色噪声

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 06-0973-04

Estimating Two-Dimensional Frequencies by Extended ESPRIT Type Method

WANG Fei, WANG Shu-xun, DOU Hu-jing

(Institution of Communication Engineering, Jilin University, Changchun, Jilin 130025, China)

Abstract: An extended ESPRIT type method was presented to extract frequencies from the signal which was contaminated by two-dimensional colored Gaussian noise. If the noise has the characteristic of MA model, this method can restrain it effectively. In addition, a new pairing method was also presented. Theory and algorithm are illustrated by simulation examples.

Key words: two-dimensional; ESPRIT; colored Gaussian

1 引言

二维谐波恢复问题近年来受到了广泛的重视, 并且已在雷达, 声纳和地球物理等众多领域得到了应用. 为了得到高分辨率的谱估计, 一些有效的子空间方法已经从一维拓展到了二维, 例如 MUSIC^[1], MEMP^[2] 和 ESPRIT^[3]. 特别地, 由于 MEMP^[2], ESPRIT^[3] 方法不需要在二维平面内搜索谱峰, 因此被认为是一种快速有效的算法; 而且如果多频率对共享一个频率时, Hua^[2] 和 Rouquette^[3] 相继提出了比较好的配对方法.

迄今为止, 大部分子空间分解方法都只围绕着加性噪声为高斯白噪声的基础上. 然而, 在实际中应用中噪声不一定是高斯的, 白色的. 所以文献[4]和文献[5]研究了基于高阶累积量的方法. 它们的主要思想是四阶累积量对高斯噪声不敏感, 却包含二维谐波的频率与幅度信息. 但是, M Ibrahim^[4] 和 R R Gharieb^[5] 依然没有解决非高斯噪声下的谐波频率估计问题.

在频率配对方面, Li^[6] 提出了利用相同的特征向量对应一组频率对的思想. 然而 Li^[6] 的方法不适用多个频率对共用同一个频率的问题. 为了解决多个频率对共用同一个频率的问题, Hua^[2] 采用增广矩阵的方法, 并利用噪声子空间与信号子空间正交的特性, 在所有频率对的可能组合中, 按最小均方误差准则提取正确的频率对. Rouquette^[3] 虽然利用了 Hua^[2] 的思想, 简化了配对的复杂性, 但却需要在配对时提供一个比例因子. 针对实际中存在的一类符合 MA 模型的噪声, 本文首先

在第二部分描述了所要研究的二维信号模型及本文所定义的相关矩阵, 在第三部分利用增广矩阵的思想构造增广相关矩阵. 第四部分则通过对增广相关矩阵做奇异值分解, 求取信号频率, 同时给出了本文所提出的配对方法. 第五部分给出了仿真实验.

2 信号模型及其相关矩阵的描述

考虑采样数据模型:

$$y(m, n) = x(m, n) + w(m, n) \quad (1)$$

$$\text{其中, } x(m, n) = \sum_{k=1}^K a_k \exp(jU_k + j2\pi f_{1k}m + j2\pi f_{2k}n) \quad (2)$$

由式(2)可以知道, $x(m, n)$ 由 K 个二维正弦信号构成, 其第 k 个二维正弦信号的频率对为 $\{f_{1k}, f_{2k}\}$, 幅度为 $\{a_k\}$, 相位为 $\{U_k\}$.

二维谐波频率估计就是由观测数据 $y(m, n)$ 确定频率对 $\{f_{1k}, f_{2k}\}$. 如果加性噪声是高斯白噪声, 则 Hua^[2] 和 Rouquette^[3] 的方法可以有效地提取出信号频率对. 然而, 如果噪声不是高斯白噪声, Hua^[2] 和 Rouquette^[3] 的方法就显得无能为力. 在本文中, 所考虑的加性噪声是由独立同分布的二维时间序列生成的符合 MA 模型的噪声:

$$w(m, n) = \sum_{i=0}^{q_1} \sum_{j=0}^{q_2} b(i, j) v(m-i, n-j) \quad (3)$$

假设:

(1) 二维随机序列 $\{v(i, j), -1 \leq i, j \leq 1\}$ 是独立同分布的非高斯的. 即, 当 $i_1 \neq i_2$ 或 $j_1 \neq j_2$ 时, $v(i_1, j_1)$ 与 $v(i_2, j_2)$ 相互独立. 并且, 其三阶累积量不等于零且有界.

(2) $\{w(m, n)\}$ 与 $\{x(m, n)\}$ 相互独立.

(3) $b(i, j)$ 是常数, 当 $0 \leq i < q_1$ 且 $0 \leq j < q_2$ 时 $b(i, j) = X_0$; 而当 $i < 0, i > q_1$ 或 $j < q_2$ 时 $b(i, j) = 0$.

(4) 频率对之间相互独立, 且频率对之间不存在二次非线性耦合.

假设 q_1 和 q_2 已知, 则观测数据的协方差可以写为:

$$r(i, j) = E[y(m+i, n+j)y^*(m, n)] \quad (4)$$

其中, $M+q_1 \leq i \leq M+q_1+1, N+q_2 \leq j \leq N+q_2+1$. 相应的协方差矩阵定义为:

$$R = \begin{bmatrix} r(q_1+1, q_2+1) & r(q_1+1, q_2+2) & \dots & r(q_1+1, N+q_2) \\ r(q_1+2, q_2+1) & r(q_1+2, q_2+2) & \dots & r(q_1+2, N+q_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(M+q_1, q_2+1) & r(M+q_1, q_2+2) & \dots & r(M+q_1, N+q_2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

为了使表达式简单一些, 令 $y_k = \exp(j2\pi f_k i)$, $z_k = \exp(j2\pi f_k)$. 则式(5)可以重新写为:

$$R = YAZ \quad (6)$$

其中,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^{q_1+1} & y_2^{q_1+1} & \dots & y_K^{q_1+1} \\ y_1^{q_1+2} & y_2^{q_1+2} & \dots & y_K^{q_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{M+q_1} & y_2^{M+q_1} & \dots & y_K^{M+q_1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A = \text{diag}[a_1^2, a_2^2, \dots, a_K^2] \quad (8)$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1^{q_1+1} & z_2^{q_1+1} & \dots & z_K^{q_1+1} \\ z_1^{q_1+2} & z_2^{q_1+2} & \dots & z_K^{q_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{M+q_1} & z_2^{M+q_1} & \dots & z_K^{M+q_1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

很显然, 式(7)和式(9)为范德蒙矩阵. 假设在式(7)中有 $y_i = y_j, i \neq j$, 则 Y 的秩小于 K , 从而 R 的秩也小于 K . 因此当有多个频率对共用一个频率时, 由式(6)无法正确估计出谐波频率对.

3 构造增广相关矩阵

为了解决上面提到的问题, 定义 $PQ \times (M-P+1) \times (N-Q+1)$ 的 Hankel 矩阵 R_e 为:

$$R_e = \begin{bmatrix} R_{q_1+1} & R_{q_1+2} & \dots & R_{M+q_1+1-P} \\ R_{q_1+2} & R_{q_1+3} & \dots & R_{M+q_1-P} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{P+q_1} & R_{P+q_1+1} & \dots & R_{M+q_1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中,

$$R_m = \begin{bmatrix} r(m, q_2+1) & r(m, q_2+2) & \dots & r(m, N+q_2+1-Q) \\ r(m, q_2+2) & r(m, q_2+3) & \dots & r(m, N+q_2-Q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(m, Q+q_2) & r(m, Q+q_2+1) & \dots & r(m, N+q_2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

将式(4)代入式(11), R_m 可以重新写为:

$$R_m = Z_L A Y_d^H Z_R \quad (12)$$

其中, A 是式(8)中定义的对角阵,

$$Z_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{Q-1} & z_2^{Q-1} & \dots & z_K^{Q-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$Y_d = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_K) \quad (14)$$

$$Z_R = \begin{bmatrix} z_1^{q_1+1} & z_2^{q_1+1} & \dots & z_K^{q_1+1} \\ z_1^{q_1+2} & z_2^{q_1+2} & \dots & z_K^{q_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{M+q_1} & z_2^{M+q_1} & \dots & z_K^{M+q_1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

将式(12)代入式(10), R_e 可以写为:

$$R_e = E_L A E_R \quad (16)$$

其中,

$$E_L = \begin{bmatrix} Z_L Y_d^{q_1+1} \\ Z_L Y_d^{q_1+2} \\ \dots \\ Z_L Y_d^{M+q_1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$E_R = \tilde{\delta} Z_R Y_d Z_R^H, \quad Y_d^{M+q_1+1-P} Z_R^H \delta \quad (18)$$

为了利用 Hua^[2] 的理论成果, 将式(16)写为:

$$R_e = E_{L1} Y_d^{q_1+1} A Z_{d1} E_{R1} \quad (19)$$

其中,

$$E_{L1} = \begin{bmatrix} Z_L \\ Z_L Y_d \\ \dots \\ Z_L Y_d^{P-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$Z_{d1} = \text{diag}(z_1^{q_1+1}, z_2^{q_1+1}, \dots, z_K^{q_1+1}) \quad (21)$$

$$E_{R1} = \tilde{\delta} Z_{R1} Y_d Z_{R1}^H, \quad Y_d^{M+q_1+1-P} Z_{R1}^H \delta \quad (22)$$

其中,

$$Z_{R1} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{N-Q} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{N-Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_K & \dots & z_K^{N-Q} \end{bmatrix} \quad (23)$$

令

$$B = Y_d^{q_1+1} A Z_{d1} \quad (24)$$

将式(24)代入式(19), 则有

$$R_e = E_{L1} B E_{R1} \quad (25)$$

比较式(25)与文献[2]中式(3.8), 采用与文[2]同样的证明方式, 可以证明当且仅当

$$M-K+1 \leq P \leq K \text{ 和 } N-K+1 \leq Q \leq K \quad (26)$$

时, 由式(25)可以提取出待求的频率对.

4 信号频率的提取

对 R_e 进行奇异值分解, 则有

$$R_e = U_1 D_1 V_1^H = U_s D_s V_s^H + U_n D_n V_n^H \quad (27)$$

其中, U_s, D_s 和 V_s 含有 K 个主奇异值和相应的奇异值向量.

4.1 提取频率 y_k

由于 E_{L1} 和 U_s 张成相同的信号子空间, 这说明存在唯一的 $K \times K$ 的非奇异矩阵 T , 使得

$$U_s = E_{L1} T \tag{28}$$

定义,

$$U_1 = U_s \text{ 去掉倒数 } Q \text{ 行} \tag{29}$$

$$U_2 = U_s \text{ 去掉正数 } Q \text{ 行} \tag{30}$$

由式(28)和式(20), 有

$$U_1 = E_1 T \tag{31}$$

$$U_2 = E_1 Y_d T \tag{32}$$

其中,

$$E_1 = E_{L1} \text{ 去掉倒数 } Q \text{ 行} \tag{33}$$

$Hua^{[2]}$ 在这里利用求解式(31)和式(32)的特征值的方法提取 y_k , 即

$$T (U_1^H U_2 - Y_d) T^H = 0 \tag{34}$$

4.2 提取频率 z_k 为了提取另一组频率集合 $\{z_k; k = 1, \dots, K\}$, 首先引进与文[2]中式(3.12)相同的置换矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c^T(1) \\ c^T(1+Q) \\ \vdots \\ c^T(1+(P-1)Q) \\ c^T(2) \\ c^T(2+Q) \\ \vdots \\ c^T(2+(P-1)Q) \\ \vdots \\ c^T(Q) \\ c^T(Q+Q) \\ \vdots \\ c^T(Q+(P-1)Q) \end{bmatrix} \tag{35}$$

其中, $c(i)$ 是 $PQ \times 1$ 的向量, 且除了在第 i 行为 1 外, 其余皆为 0. 上标 T 代表转置. 用 C 左乘 E_{L1} , 则有 $E_{L1C} = CE_{L1}$. 可以写为:

$$E_{L1C} = \begin{bmatrix} Y_L \\ Y_L Z_d \\ s \\ Y_L Z_d^Q \end{bmatrix} \tag{36}$$

其中,

$$Y_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ s & s & \dots & s \\ y_1^{P-1} & y_2^{P-1} & \dots & y_k^{P-1} \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$Z_d = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_k) \tag{38}$$

由式(36)和式(28), 有 U_{1C}

$= CE_{L1} T = E_{L1C} T$. 类似地, 有

$$U_{1C} = E_{1C} T \tag{39}$$

$$U_{2C} = E_{1C} Z_d T \tag{40}$$

其中,

$$U_{1C} = C U_s \text{ 去掉倒数 } P \text{ 行} \tag{41}$$

$$U_{2C} = C U_s \text{ 去掉正数 } P \text{ 行} \tag{42}$$

$$E_{1C} = E_{L1C} \text{ 去掉倒数 } P \text{ 行} \tag{43}$$

$Hua^{[2]}$ 在这里利用求解式(39)和式(40)的特征值的方法提取 z_k , 而本文则直接利用式(34), (39)和式(40)直接提取 Z_d .

$$Z_d = T U_{1C}^H U_{2C} T^H \tag{44}$$

由于 $Hua^{[2]}$ 采用的是求特征值的方法分别求取 y_k 和 z_k , 因此还需要进一步进行频率配对. 而本文是利用求取 Y_d 时的特征向量 T 求得 Z_d , 从而由式(14)和式(38)可以知道对应位置的频率即构成一对频率对.

如果 q_1 和 q_2 未知, 由于 $x(m, n)$ 的三阶累积量为零, 而由假设条件 $w(m, n)$ 的三阶累积量不等于零, 则有 $\text{cum}\{y(m, n), y(m, n), y(m+i, n+j)\} = \text{cum}\{w(m, n), w(m, n), w(m+i, n+j)\}$

$$\tag{45}$$

且当 $0 \leq i < q_1$ 且 $0 \leq j < q_2$ 时上式不等于零; 而当 $i < 0, i > q_1, j < 0$ 或 $j > q_2$ 时上式恒等于零. Tugnait^[7] 给出了二维 MA 模型的阶数确定及系数求解的方法. 求得 q_1 和 q_2 后, 再运用上面提到的二维推广的 ESPRIT 方法求取信号频率对.

5 仿真

假设信号频率分别为 $(f_{11}, f_{21}) = (0.136, 0.124)$, $(f_{12}, f_{22}) = (0.124, 0.124)$, $(f_{13}, f_{23}) = (0.124, 0.136)$. 在以下的实验中, 取实验数据长度为 30×30 , $P = Q = 6$, 并与 MEMP^[2] 方法作比较, 各做 50 次蒙特卡洛实验.

5.1 实验 1

假设噪声为指数白噪声, 本文将其视作零阶 MA 模型, 图 1 中的 (a) 为 MEMP 方法的实验结果, (b) 为本文提出的方法且设 $q_1 = q_2 = 0$, (c) 为本文提出的方法且设 $q_1 = q_2 = 1$. 由图可以看出, 在 SNR = 0dB 的情况下, 本文提出的方法相比 MEMP 方法表现出很好的效果, 而且适当的增加 q_1 和 q_2 的值, 相当于减小噪声的相关性, 使得效果更好.

5.2 实验 2

假设噪声模型为二阶 MA 模型, $w(m, n) = \sum_{i=0}^{q_1} \sum_{j=0}^{q_2} b(i, j)$

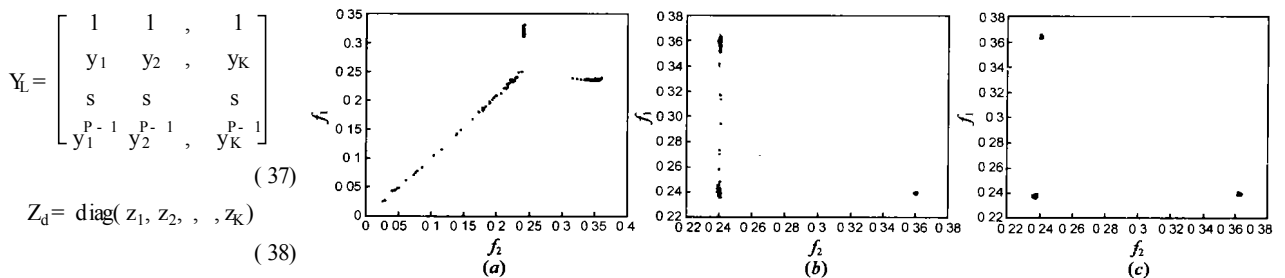


图 1 指数白噪声背景下的二维谐波频率估计, SNR= 0dB

$v(m-i, n-j)$, 系数如表 1 所示, 且 $v(i, j)$ 为指数分布的随机白噪声. 由式 (45) 对采样数据 (300@300)

| $b(i, j)$ | 0 | 1 | 2 |
|-----------|------|------|------|
| 0 | 1 | 0.51 | 0.61 |
| 1 | 0.82 | 0.46 | 0.61 |
| 2 | 0.54 | 0.77 | 0.71 |

作三阶累积量, 其结果如图 2 所示, 图 2(a) 中 i 表示 m 方向的时间延迟, 图 2(b) 中 j 表示 n 方向的时间延迟. 由图可以判断出 $q_1 = q_2 = 2$. 在已知 $q_1 = q_2 = 2$ 的情况下, 图 3(a) 为 MEMF 方法的实验结果, 图 3(b) 为本文提出的方法由图可以看出, 在 SNR = -5dB 的情况下, 本文提出的方法相比 MEMF 方法表现出很好的效果.

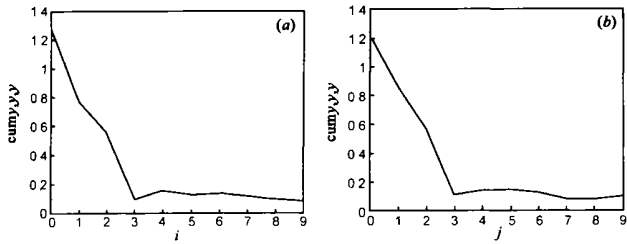


图 2 $y(m, n)$ 的三阶累积量

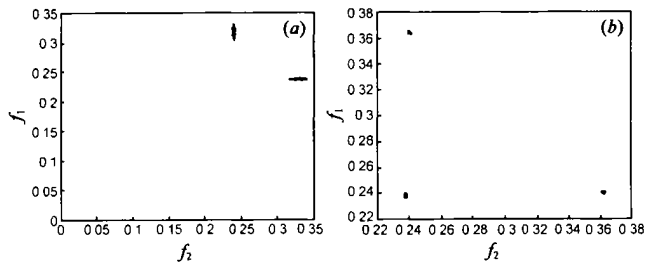


图 3 MA 模型噪声背景下的二维谱波频率估计, SNR = -5dB

6 结论

MEMF^[2], ESPRIT^[3]方法与本文方法的区别在于前者是直接对采样数据作矩阵变换, 而本文是对采样数据作相关之后对相关矩阵作矩阵变换. 仿真实验说明, 本文提出的方法不仅能很好的解决 MEMF^[2], ESPRIT^[3]方法所能解决的问题, 而且还能处理非高斯白噪声及 MA 模型噪声. 然而对于 AR 和 ARMA 模型噪声, 需要更进一步的研究对算法的改进, 以取得较好的估计效果. 另外, 本文综合了 MEMF^[2] 和 Li^[6] 的思想, 使得频率配对问题变得更简单了.

参考文献:

- [1] MONSON H HAYES, D S MAZEL, D M WILKES. 2D constrained harmonic retrieval[A]. Conference Record) Asilomar Conference on Circuits, System & computers[C]. CA, USA: Maple Press, 1998. 762-766.
- [2] YINGBO HUA. Estimating two-dimensional frequencies by matrix enhancement and matrix pencil[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(9): 2268- 2280.
- [3] STEPHANIE ROUQUETTE, MOHAMED NAJIM. Estimation of frequencies and Damping factors by two-dimensional Esprit type method[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(1): 237- 245.
- [4] HOSNY M IBRAHIM, REDA R GHARIEB. Estimating two-dimensional frequencies by a cumulant-based fblp method[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1999, 47(1): 262- 266.
- [5] GHARIEB R R. Cumulant-based LP method for two-dimensional spectral estimation[J]. IEE Proc Vis Singal Process, 1999, 146(6): 307-312.
- [6] FU LI, RICHARD J. VACCARO. On frequency-wavenumber estimation by state-space realization[J]. IEEE Tran on Circuits and Systems, 1991, 138(7): 800- 804.
- [7] JITENDRA K. TUGNAIT Fitting a model to linear non-gaussian random fields using higher order cumulants[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1997, 45(4): 1045- 1050.

作者简介:



汪 飞 男, 1976 年 4 月出生于湖北郧县, 1998 年毕业于河海大学电力系统自动化专业, 现为吉林大学通信工程学院博士生, 主要研究为谐波参量估计等, 在国内外发表学术论文 20 余篇.

王树勋 男, 1946 年 3 月出生于吉林长春, 1970 年毕业于清华大学电机系, 1982 年在吉林工业大学电子工程系获工学硕士学位, 现为吉林大学教授、博士生导师, 主要研究方向为高阶统计量在数字信号处理中的应用及微计算机应用, 已出版著作 3 部, 发表论文 100 余篇.

窦慧晶 女, 1969 年生于吉林长岭县, 2001 年毕业于吉林大学通信工程学院, 获工学硕士学位, 并继续在吉林大学通信工程学院攻读博士学位, 现为吉林大学通信工程学院讲师, 研究方向为数字信号处理, 主要研究高阶统计量在一级和二维信号处理中的应用.