

时域有限差分法中金属薄板边缘场差分方程的修正

陈 彬, 陆 峰, 易 韵, 陈海林, 周璧华, 裴玉玲

(解放军理工大学工程兵工程学院, 江苏南京 210007)

摘 要: 本文提出了一种时域有限差分法中金属薄板边缘场修正的差分方程. 以带状线和 V 形天线为例检验了修正的差分方程的有效性. 数值结果表明, 和金属板边缘阶梯近似相比, 计算精度大大提高.

关键词: 金属边缘; 时域有限差分法; 带状线

中图分类号: TN811 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2004) 06-1036-03

The Modified Difference Equation Near the Sharp Metal Edge in FDTD Grid

CHEN Bin, LU Feng, YI Yun, CHEN Hai-lin, ZHOU Bi-hua, PEI Yu-ling

(Engineering Institute of Engineering Corps, PLA Univ. of Sci. & Tech, Nanjing, Jiangsu 210007, China)

Abstract: The modified difference equation near the sharp metal edge in FDTD grid is presented in this paper. In order to test the efficiency of new FDTD equations, we use a stripline and V-shape antenna, which have two sharp edges diagonal to the cell cube in FDTD grid. Compared with staircase approximation, a dramatic improvement in computed accuracy is observed.

Key words: metal edge; finite-difference time-domain (FDTD); stripline

1 引言

时域有限差分法已经成功地应用于许多天线、散射、微波电路等电磁问题中. 在处理金属板边缘与 Yee 氏网格线不重合时, 通常采用阶梯近似法, 当网格尺寸较大时, 这种方法误差较大. 为了克服阶梯近似所带来的误差, 人们采用许多技术进行改进^[1-4]. K P Esselle^[5]利用准静态场的信息对长金属板边缘相连的 FDTD 差分方程进行了系数修正, 修正方程大大地提高了计算精度, 而且只增加了少量的内存和计算时间. 但该方法只适用于金属板和 Yee 氏网格坐标面重合的情况, 本文推广了 K P Esselle 的方法, 提出了新的修正的差分方程, 该方法适用于金属板和网格坐标面既不重合又不平行的场合, 为了检验新的差分方程的有效性, 我们以带状线和 V 形天线为例进行了数值计算. 结果表明, 该方法可有效提高计算精度.

2 理论分析

2.1 金属板边缘场分布的数学表达式

金属板边缘的场分布可表示为^[6]:

$$E_r = -B \sin(\theta/2) / \sqrt{r} \quad (1a)$$

$$H_r = -A \cos(\theta/2) / \sqrt{r} \quad (1b)$$

$$E_a = -B \cos(\theta/2) / \sqrt{r} \quad (1c)$$

$$H_a = A \sin(\theta/2) / \sqrt{r} \quad (1d)$$

其中, r 是场点到金属板边缘的距离. θ 是 r 和板的夹角, A, B 是未知的常数.

本文中金属板边缘的差分单元如图 2 所示, 整个金属板与 xoy 平面夹角为 α_1 , 其边缘与 Yee 空间网格的对角线重合. 图中 Z 和金属板边缘重合, y 垂直金属板, x 与板共面并垂直 y , z 在 x, y, z 坐标系中, 边缘附近任一点的准静态场可表示为:

$$E_x = E_r \cos \theta - E_a \sin \theta \quad (2a)$$

$$E_y = E_r \sin \theta + E_a \cos \theta \quad (2b)$$

$$E_x = H_r \cos \theta - H_a \sin \theta \quad (2c)$$

$$E_y = H_r \cos \theta + H_a \sin \theta \quad (2d)$$

在 x, y, z 坐标系中准静态电磁场的表达式, 可由式 (2) 通过如下坐标变换而得:

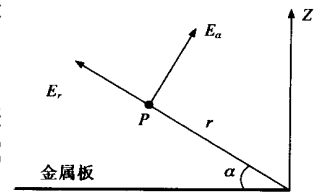


图 1 金属板边缘的场分布示意图

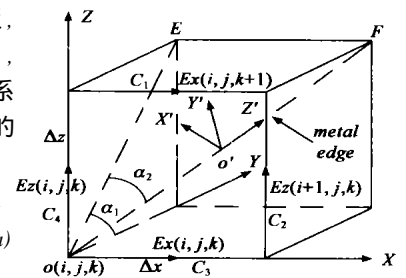


图 2 金属板边缘的有限差分单元 ($H_y(i, j, k)$ 位于回路 C_1, C_2, C_3, C_4 所围区域的中点)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 x, y, z 为坐标系 x, y, z 中的场量, x, y, z 为坐标系 x, y, z 中的场量, 将式(1)代入式(2), 并经式(3)的坐标变换可得:

$$E_x = -B \cos \alpha_2 \sin(\alpha_2/2) / \sqrt{r} \quad (4a)$$

$$E_y = B (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin(\alpha_2/2) + \sin \alpha_1 \cos(\alpha_2/2)) / \sqrt{r} \quad (4b)$$

$$E_z = B (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin(\alpha_2/2) - \cos \alpha_1 \cos(\alpha_2/2)) / \sqrt{r} \quad (4c)$$

$$H_x = A \cos \alpha_2 \cos(\alpha_2/2) / \sqrt{r} \quad (4d)$$

$$H_y = -A (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos(\alpha_2/2) - \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2/2)) / \sqrt{r} \quad (4e)$$

$$H_z = -A (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos(\alpha_2/2) + \cos \alpha_1 \sin(\alpha_2/2)) / \sqrt{r} \quad (4f)$$

式(4)中 r, α 分别为:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\alpha = \begin{cases} \cos^{-1}(x/r), & (y > 0) \\ 2 - \cos^{-1}(x/r), & (y < 0) \end{cases} \quad (6)$$

其中 x, y 可通过式(3)所示的坐标变换写成:

$$x = -\cos \alpha_2 \cdot x + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdot y + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdot z \quad (7a)$$

$$y = -\sin \alpha_1 \cdot y + \cos \alpha_1 \cdot z \quad (7b)$$

因此, 只要已知场点 P 在 x, y, z 坐标系中的位置 (x, y, z) , 就可由式(4)~(7)求出 x, y, z 坐标系中准静态场表达式.

2.2 修正的差分方程的导出

本节以图 2 中 $H_y(i, j, k)$ 为例, 导出金属板边缘修正的差分方程. 由 Faraday 电磁感应定律得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint H \cdot dS = -\frac{1}{\mu} \oint_c E \cdot dL \quad (8)$$

其中, 线积分路径由 C_1, C_2, C_3, C_4 组成, 而积分域为由该路径围成的矩形区域, 积分路径 C_1, C_2 由于离金属板边缘较远, 假定路径上的电场是均匀相等的, C_3, C_4 紧邻金属板边缘, 其上的电场是非均匀的, 由上节的准静态场表达式导出. 面积分域上的磁场也是非均匀的, 由准静态场表达式导出.

将 $H_y(i, j, k)$ 所在位置的空间坐标 $(x/2, 0, z/2)$ 代入(4e)和式(5)~(7)可得(4e)式中的未知常数:

$$A = -\sqrt{r_0} \cdot H_y(i, j, k) / (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos(\alpha_2/2) - \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2/2)) \quad (9a)$$

$$\text{其中: } r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad \sin(\alpha_2/2) = \sqrt{(r_0 - x_0)/2r_0}$$

$$\cos(\alpha_2/2) = \sqrt{(r_0 + x_0)/2r_0}$$

$$x_0 = -\cos \alpha_2 \cdot x/2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdot z/2$$

$$y_0 = \cos \alpha_1 \cdot z/2$$

将式(9a)代入式(4e)可得, H_y 在面积分域上的表达式:

$$H_y(x, z) = H_y(i, j, k) \cdot f_1(x, z) \quad (9b)$$

$$\text{其中: } f_1(x, z) = \frac{\sqrt{r_0} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos(\alpha_2/2) - \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2/2))}{\sqrt{r_1} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos(\alpha_2/2) - \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2/2))};$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}; \quad \sin(\alpha_2/2) = \sqrt{(r_1 - x_1)/2r_1};$$

$$\cos(\alpha_2/2) = \sqrt{(r_1 + x_1)/2r_1}$$

$$x_1 = -\cos \alpha_2 \cdot x + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdot z; \quad y_1 = \cos \alpha_1 \cdot z$$

同理可以推导出路径 C_3, C_4 上电场分量的表达式:

$$E_x(x) = E_x(i, j, k) \cdot f_2(x) \quad (10a)$$

其中:

$$f_2(x) = \sqrt{r_2} \cos \alpha_2 \sin(\alpha_3/2) / (\sqrt{r_3} \cos \alpha_2 \sin(\alpha_2/2));$$

$$r_2 = \sqrt{r_2^2 + y_2^2}; \quad \sin(\alpha_2/2) = \sqrt{(r_2 - r_2)/2r_2};$$

$$r_3 = \sqrt{r_3^2 + y_3^2}; \quad \sin(\alpha_3/2) = \sqrt{(r_3 - r_3)/2r_3};$$

$$x_2 = -\cos \alpha_2 \cdot x/2; \quad y_2 = 0; \quad x_3 = -\cos \alpha_2 \cdot x;$$

$$y_3 = 0; \quad E_z(z) = E_z(i, j, k) \cdot f_3(z) \quad (10b)$$

$$\text{其中: } f_3(z) = \frac{\sqrt{r_4} (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin(\alpha_5/2) - \cos \alpha_1 \cos(\alpha_5/2))}{\sqrt{r_5} (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin(\alpha_4/2) - \cos \alpha_1 \cos(\alpha_4/2))};$$

$$r_4 = \sqrt{x_4^2 + y_4^2}; \quad \sin(\alpha_4/2) = \sqrt{(r_4 - x_4)/2r_4};$$

$$\cos(\alpha_4/2) = \sqrt{(r_4 + x_4)/2r_4}; \quad x_4 = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdot z/2$$

$$y_4 = \cos \alpha_1 \cdot z/2; \quad r_5 = \sqrt{x_5^2 + y_5^2}$$

$$\sin(\alpha_5/2) = \sqrt{(r_5 - x_5)/2r_5};$$

$$\cos(\alpha_5/2) = \sqrt{(r_5 + x_5)/2r_5}; \quad x_5 = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdot z;$$

$$y_5 = \cos \alpha_1 \cdot z$$

将(9b)、(10a)、(10b)代入(8)式经整理得:

$$H_{y| i, j, k}^{n+(1/2)} = H_{y| i, j, k}^{n+(1/2)} - c_1 \cdot t \cdot E_{x| i, j, k+1}^n / (\mu \cdot z) + c_2 \cdot t \cdot E_{z| i+1, j, k}^n / (\mu \cdot x) + c_3 \cdot t \cdot E_{x| i, j, k}^n / (\mu \cdot z) - c_4 \cdot t \cdot E_{z| i, j, k}^n / (\mu \cdot x)$$

$$\text{其中: } c_1 = c_2 = \frac{z \cdot x}{\int_0^z \int_0^x f_1(x, z) dx dz} \quad c_3 = \frac{x \cdot f_2(x) dx}{\int_0^x f_1(x, z) dx dz}$$

$$c_4 = \frac{x \cdot f_3(z) dz}{\int_0^x f_1(x, z) dx dz}$$

凡积分回路上有一点和金属板边缘相连的, 都要做以上修正, 关于求磁场分量的积分回路共有 13 个(包括 2 个分裂网格), 关于求电场分量的积分回路共有 12 个, 因此共有 25 个修正的差分方程. 从略

在导出以上 25 个修正的差分方程时, 假定在 x, y, z 三个方向的空间步长均相等(即 $x = y = z = \Delta$), 金属板边缘位于差分网格的对角线上, 因此, 由于对称性, 独立的修正系数只有 4 个, 若金属板边缘和网格对角线不重合, 差分方程的修正方法和本文相同, 但修正系数的数目将增加.

3 数值结果和讨论

本文以带状线结构^[5,7]为例检验导出的修正差分方程的有效性. 带状线的结构如图 3 所示, 整个带状线结构与 xoy 平面成 45 度角, 金属导带与两个无限大接地平面相平行, 并与 x 轴的夹角为 $(90 - \theta)$ 度, 其上下两个金属平面之间间隔 1mm, d_1, d_2 分别为 0.6mm, 0.4mm, 金属带的宽度为 $0.8 \cdot \sin(\theta) = 0.8 \sqrt{2}/\sqrt{3} = 0.653\text{mm}$. 在数值计算时, 设 $x = y = z = \Delta = 0.2\text{mm}$, 时间步长 t 为 $0.5 \cdot \Delta / v$, v 为光在媒质中的速

度.

为了检验导出的修正差分方程的有效性,首先设带状线媒质的介电常数在所有频率上均为 $\epsilon = 4.0$. 然后采用 FDID 法求解带状线中的电磁波和波传播常数 β , 再由公式 $\epsilon_{eff}(\omega) = \beta^2(\omega) / \beta_0^2$ 计算出等效介电常数 ϵ_{eff} . 显然,若 FDID 法是精确的,则计算所得的 ϵ_{eff} 应在所有频率上均等于所设值 $\epsilon = 4.0$, 否则将产生计算误差. 本文采用了两种方法计算带状线的等效介电常数: (1) 对导带边缘采用阶梯近似, 对金属板的其他部分采用 CP(环路积分)^[8]法, (2) 对和导带边缘相关联的网格采用修正的差分方程, 对金属板的其他部分采用 CP 法. 由图 4 知, 方法 1 介电常数计算值在 4.75 ~ 4.95 之间, 误差较大. 方法 2 由于导带边缘采用了本文修正的差分方程, 介电常数的计算值和精确值 4.0 非常接近, 和方法 1 相比, 计算误差大大降低.

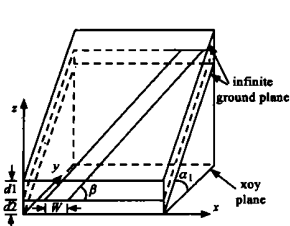


图 3 带状线结构

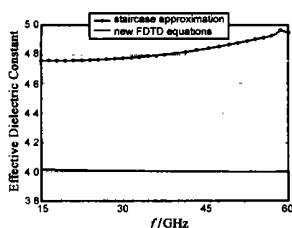


图 4 带状线的等效介电常数

$$\epsilon = \cos^{-1}(1/\sqrt{3}), \beta_1 = 45^\circ$$

为了进一步检验修正差分方程的有效性, 本文以 V 形天线(如图 5)为例^[9], 分别采用三种方法对天线口面的电场波形进行了数值模拟, (1) 采用细网格($\Delta = 8\text{mm}$)对 V 形天线进行数值模拟, (2) 采用粗网格($\Delta = 4\text{cm}$)对 V 形天线进行数值模拟, 金属板边缘采用阶梯近似, (3) 采用相同的粗网格对 V 形天线进行数值模拟, 金属板边缘采用修正的差分方程. 在馈电部分所加的电压源的波形为高斯脉冲波形, 即: $V = \exp(-(t - t_0)^2 / T^2)$, 其中: $T = 0.002\mu\text{s}$, $t_0 = 0.012\mu\text{s}$. 由图 6 知, 方法 3 大大改进了数值模拟精度.

为了验证新方程的稳定性, 我们对放在均匀和不均匀的介质中的微带线进行了分析(此时, 金属板边缘放置在 Yee 空间网格的对角线上), 并且大大地延长了计算时间, 结果未发现任何不稳定现象.

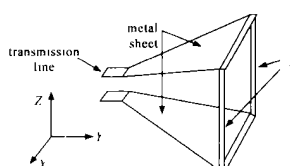


图 5 V 形天线

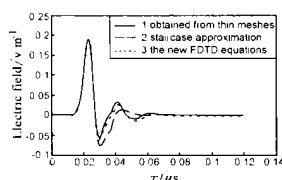


图 6 天线口面的电场波形

4 结论

本文将 K P Esselle 的 FDID 差分方程修正的方法推广到将金属板边缘放置在 Yee 氏空间网格的对角线的情况, 由于

许多线积分和面积分是重复的, 因此大大降低了求系数的复杂性, 并且由于程序的通用性, 修正的差分方程在程序中也是十分容易实现的. 同理可以采用此方法模拟金属板任意放置在 Yee 氏空间网格的情况.

参考文献:

- [1] L Cascio, G Tardioli, T Rozzi, W J R Hoefer. A quasistatic modification of TLM at knife edge and 90° wedge singularities[J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1996, 44: 2519 - 2524.
- [2] G Mur. The modeling of singularities in the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations [J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1981, 29: 1073 - 1077.
- [3] J Fang, J Ren. A locally conformed finite-difference time-domain algorithm of modeling arbitrary shape planar metal strip [J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1993, 41: 830 - 838.
- [4] I J Craddock, C J Railton. Stable inclusion of a priori knowledge of field behavior in the FD-TD algorithm: Application to the analysis of microstrip lines [A]. IEEE AP-S Int Symp [C]. Baltimore MD: IEEE, 1996.
- [5] K P Esselle, M Okoniewski, M A Stuchly. Analysis of sharp metal edges at 45° to the FD-TD grid [J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1999, 6: 221 - 223.
- [6] J Van Bladel. Singular Electromagnetic Fields and Sources [M]. Oxford, U K: Clarendon, 1991.
- [7] X Zhang, J Fang, K K Mei, Y Liu. Calculation of the dispersive characteristics of microstrips by the time-domain finite difference method [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1988, 36: 263 - 267.
- [8] A Taflov. Computational Electromagnetics, The Finite-Difference Time-Domain Method [M]. Boston, MA: Artech House, 1995.
- [9] 陆峰, 陈彬, 等. 电磁脉冲辐射器近区场数值模拟 [J]. 强激光与粒子束, 2003, 15(3): 257 - 261.

作者简介:



陈彬男, 1957 年生于江苏省射阳县, 解放军理工大学工程兵工程学院伪装与仿真工程系主任、教授、博士生导师, 中国通信学会电磁兼容委员会第三届委员, IEEE 会员, 曾获得国家科技进步二等奖一项、三等奖两项, 部委级科技进步一等奖一项、二等奖六项. 在国内外发表论文 60 余篇, 主要研究方向为: 计算电磁学、电磁防护.



陆峰男, 1976 年生于江苏省建湖县, 2001 年毕业于解放军理工大学工程兵工程学院, 获硕士学位, 同年于解放军理工大学工程兵工程学院攻读博士学位, 主要研究方向为: 计算电磁学、电磁防护.