基于提升方法的滤波器组因子分解

周育人[1,2], 李元香[2], 闵华清[1]
(11 华南理工大学计算机科学与工程学院, 广东广州 510640; 21 武汉大学软件工程国家重点实验室, 湖北武汉 430072)

摘　要: 讨论了 FIR 滤波器组的分解. 2 通道完全重构 FIR 子波变换分解可为有限步的提升步骤, 使用 Laurent 多项式的辗转相除法给出了这种分解的一个代数方法的证明; 证明了二通道子波变换的分解定理不能平行推广到 2M 通道滤波器组. 提出使用 M2通道滤波器组构造 2M2通道滤波器组, 它由多相矩阵的分块化和提升方法实现, 这种方法易于构造非线性滤波器组, 如整数变换.

关键词: 滤波器组; 多相矩阵; 因子分解; 提升方法
中图分类号: TN 911 文献标识码: A 文章编号: 037222112 (2003) 1021584203

Factorization of Filter Banks Through Lifting Scheme

ZHOU Yu2ren[1,2], LI Yuan2xiang[1], Min Hua2qing[2]
(1. College of Computer Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China;
2. State key Laboratory of Software Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: The decomposition of the mult2channel filter banks has been discussed. It is known that any discrete wavelet trans2form or two band subband filtering with finite filters can be decomposed into a finite sequence of simple lifting steps. The proof of this decomposition is provided using an algebraic method. It is also proved that mult2channel filter does not have this decomposition. It pro2poses using lifting scheme and block factorization of the polyphase matrix to construct 2M2channel FIR filter banks from M2channel FIR filter banks. This method is easy to build non linear filter banks, such as integer- integer transforms.

Key words: filter banks; polyphase matrix; factorization; lifting scheme

1 M2通道滤波组(M2Channels filter banks)

数字滤波器组常用于分解一个信号为几个频率子带[1~3], 不同子带的信号被编码变换. 这种方法提供了新的有效的表示、处理、理解信号的工具. 例如, 二进小波变换是一种具有一定正则性的二通道滤波器组, 基于 8* 8 离散余弦变换(DCT)的图像压缩标准 JPEG 就是 8 通道线性相位正交滤波器组. 这种分解与重构的过程是由被称为/ 分析一综合0 的滤波器组系统所完成的. 图 1 是一个 M2通道滤波器组, $H_i(z)$、$F_i(z)$ ($i = 0, 1, , , M-1$) 分别表示分析滤波器和综合滤波器. | M 表示抽采器. { M 表示插/ 00 器, 它们的定义见文[2]. 为了避免信号失真, 我们关心的是所谓完全重构(Perfect Construction)滤波器组.

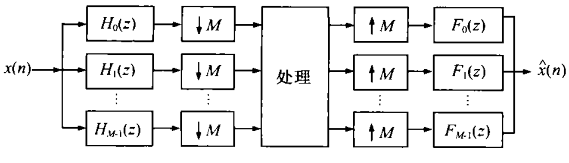

图 1 一个典型的 M2通道滤波器组

定义 1 一个滤波器组称为是完全重构的, 如果其输入 $x(n)$ 与输出 $\hat{x}(n)$ 只相差一个时延, 即 $x[n] = \hat{x}[n - l]$, $l I z$

M2通道滤波器组可用等价的多相矩阵表示, 如图 2, $E(z)$、$R(z)$分别称为多相分析矩阵和多相综合矩阵, 对应于分析滤波器组和综合滤波器组, 由于其突出作用, 这种对应被称为/ 重要恒等式0(noble identity), $E(z)$、$R(z)$满足

$$\begin{pmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ s \\ H_{M-1}(z) \end{pmatrix} = E(z^M) \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ s \\ z^{-(M-1)} \end{pmatrix}$$

$$(F_0(z)\, F_1(z),\ F_{M-1}(z)) = (z^{-(M-1)} z^{-(M-2)},\ 1)\, R(z^M)$$

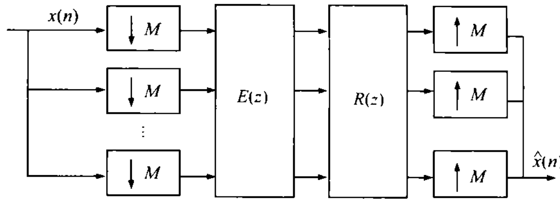

图 2 M 通道滤波器组的等价多相表示

收稿日期: 200120402; 修回日期: 2002211224
基金项目: 国家自然科学基金(No. 69703011)

滤波器组的多相表示无论理论上还是实际应用上都有重要作用, 我们现在可以利用 $E(z)$、$R(z)$ 来重新定义完全重构.

定义 2　一个滤波器组称为完全重构的, 如果其多相矩阵 $E(z)$、$R(z)$ 满足等式 $E(z)R(z)=z^{-1}I$, I 为单位矩阵.

应当注意, 定义 1 比定义 2 更具一般性[2], 但定义 2 包含了大部分实用的完全重构滤波器组, 以下我们都使用定义 2.

定义 3　若一个 Laurent 矩阵多项式 $A(z)$ 的行列式为单项式, 即 $\det A(z)=cz^m$, $c\neq 0$ 为常数, $m\in Z$, 称这个 Laurent 矩阵多项式是可逆的, 显然可逆的 FIR 矩阵的逆仍是 FIR 矩阵.

定理 1　若 $E(z)$、$R(z)$ 为 FIR 滤波器组的分析多相矩阵和综合多相矩阵, 且它们组成的滤波器组成是一个完全可重构的滤波器组, 则 $E(z)$、$R(z)$ 为可逆 Laurent 矩阵多项式, 反之亦然.

2　二通道子波变换分解为提升步骤

以下考虑二通道 FIR 子波(小波)变换, 设 h 和 g 分别为其高、低通分析滤波器, $h(z)$ 和 $g(z)$ 表示 h 和 g 的 z 变换, 记 $h(z)=h_e(z^2)+z^{-1}h_0(z^2)$, $g(z)=g_e(z^2)+z^{-1}g_0(z^2)$, 则分析多相矩阵为

$$E(z)=\begin{pmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_0(z) & g_0(z)\end{pmatrix}$$

I. Daubechies 和 W. Sweldens 在文献[4, 5]中利用提升定理和 Lanrent 多项式辗转相除将 $E(z)$ 分解为有限步的提升步骤, 下面我们给出这一结果的一个纯代数方法的新证明.

沿用文[4]中的记号, 设滤波器 h 的 z 变换为 $h(z)=\sum_{k=k_b}^{k_e} h_k z^{-k}$, 称为 Laurent 多项式, 其中 k_e(或 k_b)为使 h_k 非 0 的最大(最小)的整数, $h(z)$ 的阶定义为 $|h|=k_e-k_b$.

两个 Laurent 多项式的和或差是一个 Laurent 多项式, 一个 l 阶的 Laurent 多项式与一个 lc 阶的 Laurent 矩阵多项式的积为一个 $l+lc$ 阶的 Laurent 多项式. 全体 Laurent 多项式组成一个交换环. 环内一般不能做除法, 对 Laurent 多项式, 我们可以做剩余除法, 设 $a(z)$、$b(z)$ 是两个 Laurent 多项式, $|a(z)|>|b(z)|$, 那么在总存在一个 Laurent 多项式 $q(z)$(商), $|q(z)|=|a(z)|-|b(z)|$, 以及另一个 Laurent 多项式 $r(z)$(余式), $|r(z)|<|b(z)|$, 使得 $a(z)=b(z)q(z)+r(z)$, 记 $q(z)=a(z)/b(z)$, $r(z)=a(z)\%b(z)$.

一个 Laurent 多项式是可逆的当且仅当它是单项式, 而普通多项式中只有常数才是可逆的, 这是 Laurent 多项式和普通多项式的一个重要区别; 它们之间另一个主要区别是 Laurent 多项式的长除法不唯一. 正是这种不唯一性给以后的算法带来灵活性.

例 1[4] 设 $a(z)=z^{-1}+6+z$, $b(z)=4+4z$

则 $a(z)/b(z)=1/4(z^{-1}+5)$, $a(z)\%b(z)=-4z$

或 $a(z)/b(z)=1/4(z^{-1}+1)$, $a(z)\%b(z)=4$

或 $a(z)/b(z)=1/4(5z^{-1}+1)$, $a(z)\%b(z)=-4z^{-1}$

定理 2　(辗转相除法, Euclidean Algorithm): 设 $a(z)$、$b(z)\neq 0$ 为 Laurent 多项式, 设 $a_0(z)=a(z)$, $b_0(z)=b(z)$, 从 $i=0$ 开始重复以下的叠代步骤: $a_{i+1}(z)=b_i(z)$, $b_{i+1}(z)=a_i(z)\%b_i(z)$, 设 n 是使 $b_n(z)=0$ 的最小整数, 则 $a(z)$ 和 $b(z)$ 的最大公式约式 $\gcd(a(z), b(z))=a_n(z)$.

定理 3　设 $E(z)$ 为二通道完全可重构子波变换的分析多相矩阵, 则存在 Laurent 多项式 $s_i(z)$、$t_i(z)$, $1\leq i\leq m$, 和单项式 $a(z)$、$c(z)$, 使

$$E(z)=\prod_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}1 & s_i(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t_i(z) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(z) & 0\\ 0 & b(z)\end{pmatrix}\tag{1}$$

即二通道完全可重构子波变换可以由有限步提升步骤实现.

证明　由于 $E(z)=\begin{pmatrix}h_e(z) & g_e(z)\\ h_o(z) & g_o(z)\end{pmatrix}$ 可逆, $\det E(z)$ 为单项式, $h_e(z)$ 和 $h_o(z)$ 的最大公因式 $a(z)$ 必为单项式. 对 $h_e(z)$ 和 $h_o(z)$ 这两个 Laurent 多项式辗转相除, 设经过 n 步后, 得到最大公因式 $a(z)$, 则

$$\begin{pmatrix}h_e(z)\\ h_o(z)\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}q_i(z) & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(z)\\ 0\end{pmatrix}$$

我们总可以假定 n 为偶数, 事实上, 若 n 为奇数, 将 $h(z)$、$g(z)$ 分别乘以 z 和 $-z^{-1}$(这不改变多相矩阵的值), 则 $h(z)$ 的多相组成交换了秩序, 从而可使 n 为偶数.

显然 $\begin{pmatrix}q_i(z) & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 可逆, 其逆为 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -q_i(z)\end{pmatrix}$. 设

$$\prod_{i=n}^{1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -q_i(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_e(z) & g_e(z)\\ h_o(z) & g_o(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(z) & b(z)\\ 0 & c(z)\end{pmatrix}$$

则

$$E(z)=\begin{pmatrix}h_e(z) & g_e(z)\\ h_o(z) & g_o(z)\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}q_i(z) & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(z) & b(z)\\ 1 & c(z)\end{pmatrix}\tag{2}$$

由 $\det E(z)=\pm a(z)c(z)$, $\det E(z)$、$a(z)$ 均为单项式知 $c(z)$ 为单项式, 注意到

$$\begin{pmatrix}a(z) & b(z)\\ 0 & c(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b(z)(c(z))^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(z) & 0\\ 0 & c(z)\end{pmatrix}\tag{3}$$

及

$$\begin{pmatrix}q_i(z) & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & q_i(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ q_i(z) & 1\end{pmatrix}\tag{4}$$

综合(2)~(4), 取 $m=n/2+1$, $t_m(z)=0$, $s_m(z)=b(z)(c(z))^{-1}$, 得证.

3　用提升方法构造多通道滤波器组

多通道滤波器组的设计与构造是一个有待研究的问题. 考虑 $2M$(偶数)通道完全可重构滤波器组, 将多相矩阵 $E(z)$($2M*2M$ 矩阵 Laurent 多项式)分块为四个分块矩阵, 记 $E(z)=\begin{pmatrix}E_{11}(z) & E_{12}(z)\\ E_{21}(z) & E_{22}(z)\end{pmatrix}$, 其中 $E_{ij}(z)\ (i, j=1, 2)$ 为 $M*M$ 矩阵 Laurent 多项式. 二通道子波变换的分解定理能否平行推广到 $2M$ 通道滤波器组? 我们知道, 二通道子波变换的分解定理的证明依赖于 Laurent 多项式的辗转相除法, 而 Laurent 多项式的辗转相除法依赖于 Laurent 多项式的带余式除法, 但是, 一般而言, 矩阵 Laurent 多项式是不能作降阶的带余式除法,

如

例 2 设 $A(z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}z+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}z^2$, $B(z)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}z$, 则 $A(z)$ 和 $B(z)$ 不能作降阶的带余式除法, 即不存在一阶的矩阵 Laurent 多项式 $Q(z)=Q_0+Q_1z$ 和单项式 $R(z)=Rz^i$ (i 为整数, Q_0、Q_1 和 R 为 $2*2$ 矩阵), 使得 $A(z)=Q(z)B(z)+R(z)$.

证明 反证法, 若 $A(z)=Q(z)B(z)+R(z)$, $R(z)=R$ 或 $R(z)=Rz$,

则比较 z^2 项系数, 得 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, 矛盾;

若 $A(z)=Q(z)B(z)+R(z)$, $R(z)=Rz^2$,

则比较 z^0 项系数, 得 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=Q_0\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, 矛盾. 证毕.

尽管二通道子波变换的分解定理未能平行地推广到 2M 通道滤波器组, 我们仍然可以类似于(1), 使用提升方法, 用低阶滤波器组构造高阶滤波器组. 令分析多相矩阵

$$E(z)=\prod_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}I & S_i(z)\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ T_i(z) & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A(z) & 0\\ 0 & C(z)\end{pmatrix} \quad (5)$$

其中 $S_i(z)$、$T_i(z)$、$A(z)$、$C(z)$ 是 $M*M$ 矩阵 Laurent 多项式, 式(5) 表示由 M-通道滤波器组构造 2M-通道分析滤波器组, 如图 3.

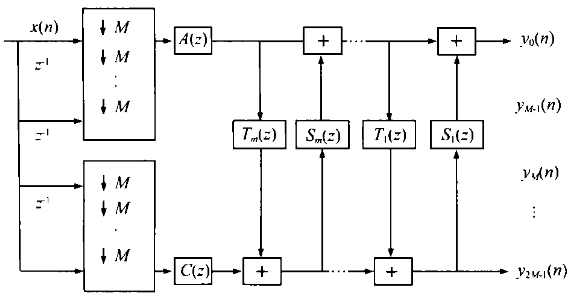

图 3 分析变换: 将抽样信号分成两组, 由提升步骤实现.

设 $R(z)E(z)=I$, 则 $R(z)$ 可表示为

$$R(z)=\begin{pmatrix}A^{-1}(z) & 0\\ 0 & C^{-1}(z)\end{pmatrix}\prod_{i=0}^{m-1}\begin{pmatrix}I & 0\\ -T_{m-i}(z) & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -S_{m-i}(z)\\ 0 & I\end{pmatrix} \quad (6)$$

式(6) 表示由 M-通道滤波器组构造 2M-通道综合滤波器组, 如图 4.

滤波器组设计中的一个重要概念是格子结构(Lattice structure)[6], 所谓格子结构是把多相矩阵分解成一系列的基本建筑块, 提升方法不过是一类格子结构, 它在滤波器组的设计中有广阔的应用前景.

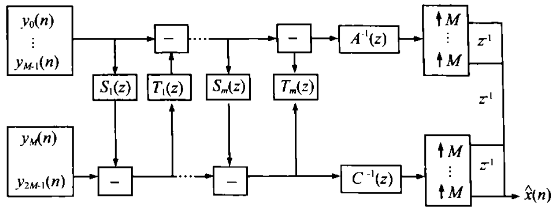

图 4 综合变换: 将输入信号分成两组, 由提升步骤实现.

4 结语

本文给出了二通道子波变换分解成有限提升步骤的一个新证明, 所用的方法是 Laurent 多项式的辗转相除法. 提出用提升步骤由 M-通道滤波器组构造 2M-通道滤波器组. 提升方法易于构造非线性多通道滤波器组, 这方面典型的例子是二通道整数变换[7], 这种变换对硬件实现及无耗图像编码(lossless image coding)有重要意义[8], 整数变换研究正在引起关注; 2M-通道的整数变换可由提升方法实现.

参考文献:

[1] M Vetterli, D le Gall. Perfect reconstruction FIR filter bank: some properties and factorizations [J]. IEEE Trans on Acoust. Speech, and Signal Processing, July 1989, 37(7): 1057-1071.

[2] P P Vaidyanathan. Multirate Systems and Filters [M]. Prentice hall, Prentice Hall, Englewood cliffs, NJ, 1993.

[3] M Vetterli, J Kovacevic. Wavelets and Subband Coding [M]. Prentice Hall, Englewood cliffs, NJ, 1995.

[4] I Daubechies, W Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps [J]. Fourier Anal. Appl, 1998, 4(3): 247-269.

[5] W Sweldens. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets [J]. Appl. Comput. Harmon. Anal. 1996, 3(2): 186-200.

[6] T Kalker, P Shah. Ladder structure for multidimensional linear phase perfect reconstruction filter banks and wavelets [A]. Proc. of SPIE Conf. on Vis. Com. and Imag. Proc. [C]. Boston, 1992. 12-20.

[7] R Calderbank, et al. Wavelet transforms that map integers to integers [J]. Appl. Comput. Harmon. Anal, 1998, 5(3): 332-369.

[8] Julien Reichel, et al. Integer wavelet transform for embedded lossy to lossless image compression [J]. IEEE Trans. on Image Processing, March 2001, 10(3): 383-392.

作者简介:

周育人 男, 1965 年生于湖南省岳阳市, 副教授, 武汉大学计算机软件专业博士生, 从事数字信号处理, 演化计算方面工作, 发表学术论文多篇.

李元香 男, 1962 年生于湖北省监利县, 教授, 博士生导师, 从事演化计算、并行计算、信息处理方面工作.

闵华清 男, 1956 年生于湖南, 教授, 从事数据库、人工智能方面工作.