基于矩阵广义逆递推的自适应滤波算法

高 鹰[1,2],谢胜利[1]
(1. 华南理工大学电子与通信工程系,广东广州 510641;2. 广州大学计算机科学系,广东广州 510405)

摘 要: 本文把自适应滤波算法的优化准则之一最小二乘准则: $J(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|e(i)|^2$ 写为矩阵形式,利用矩阵广义逆递推公式直接对输入信号矩阵而不是自相关矩阵进行递推更新,得到一种新的自适应滤波算法.和其它算法如LMS算法、NLMS算法、FRLS算法、TDNLMS算法、APA算法、Leaky-LMS算法和RLS算法进行了计算机模拟仿真比较,仿真结果表明该算法有良好的收敛性能,收敛速度快于LMS算法、NLMS算法、FRLS算法、APA算法、Leaky-LMS算法和RLS算法.

关键词: 自适应滤波算法; 最小二乘准则; 矩阵广义逆递推
中图分类号: TN911.72 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2002) 07-1032-03

An Adaptive Filtering Algorithm Based on Recursion of Generalized Inverse Matrix

GAO Ying[1,2], XIE Sheng-li[1]
(1. *Dept. of Electron. and Commun. Eng., South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong* 510641, *China*;
2. *Dept. of Computer Science., Guangzhou University, Guangzhou, Guangdong* 510641, *China*)

Abstract: This paper rewrites least square criterion $J(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|e(i)|^2$, one of the optimal criteria of adaptive filtering algorithm, into matrix form, and proposes a new adaptive filtering algorithm by using recursion of generalized inverse matrix to input signal matrix instead of self-correlation matrix. Computer simulation results show this algorithm performance is better than those of other algorithms such as LMS algorithm、NLMS algorithm、FRLS algorithm、APA algorithm、Leaky-LMS algorithm and RLS algorithm.

Key words: adaptive filtering algorithm; least square criterion; recursion of generalized inverse matrix

1 引言

自适应滤波算法广泛应用于系统辨识、回波消除等诸多领域中.图1为自适应滤波器原理框图.$W(n)$表示自适应滤波器在时刻n的权矢量,$x(n)=[x(n),x(n-1),\cdots,x(n-L+1)]^T$为时刻$n$的输入信号矢量,$d(n)$为期望输出值,$v(n)$为干扰信号,$e(n)$是误差信号,$L$是自适应滤波器的长度.根据自适应滤波算法的优化准则的不同,自适应滤波算法可以分为两类最基本的算法[1]:最小均方误差(LMS)算法和递推最小二乘(RLS)算法.

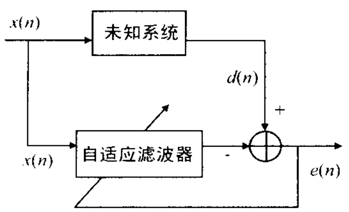

图1 自适应滤波器原理图

基于最小均方误差准则,LMS算法使滤波器的输出信号与期望输出信号之间的均方误差$E[e^2(n)]$最小.LMS算法的优点是结构简单,鲁棒性强,其缺点是收敛速度很慢.这是因为LMS算法的收敛速度依赖于输入信号自相关矩阵的特征值发散度.当输入信号的相关性越强,自相关矩阵的特征值发散度就越大,算法的收敛速度也就越慢.对此Lee等(1986)提出了变换域LMS算法[2],把时域信号转变为变换域信号,由此对强相关的输入信号解相关,从而提高收敛速度.另外LMS算法中的步长因子μ对算法的收敛性能影响很大.小的μ值可以减少梯度噪声,但收敛速度慢;大的μ值可以加快收敛速度,但同时增加了梯度噪声和稳态失调;针对LMS算法中步长因子μ难于把握的缺点,人们提出了能量归一化最小均方误差(NLMS)算法和变步长LMS的算法[3,4].

基于最小二乘准则,RLS算法决定自适应滤波器的权系数向量$W(n)$使估计误差的加权平方和$J(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|e(i)|^2$最小.其中$\lambda$为遗忘因子,且$0<\lambda\le 1$.RLS算法对输入信号的自相关矩阵$R_{xx}(n)$进行递推更新,收敛速度明显快

收稿日期:2000-11-13;修回日期:2001-04-24
基金项目:国家自然科学基金(No.69972016);广东省自然科学基金(No.990892);教育部重点科研基金(No.02152)

于LMS算法,而且收敛性能与输入信号的频谱无关,但其计算量却比LMS算法大的多. 为了减小RLS算法的计算量,保留其收敛性能,Cioffi 和 Kailath 提出了改进的RLS算法,即FRLS算法[5];而Masashi 等(1995)给出了快速的仿射投影算法[6].

本文把最小二乘准则 $J(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|e(i)|^2$ 写为矩阵形式,利用矩阵广义逆递推公式直接对输入信号矩阵而不是自相关矩阵进行递推更新,得到一种新的自适应滤波算法. 计算机模拟仿真结果表明该算法有良好的收敛性能,收敛速度快于LMS算法、NLMS算法、FRLS算法、FAPA算法、Leaky-LMS算法[7]和RLS算法.

2　基于矩阵广义逆递推的自适应滤波算法

在推导新的算法之前,首先给出矩阵广义逆递推公式[8]:

定理　设 $A_k\in C^{k\times n}$,即 k 行 n 列复矩阵. A_k 的前 $k-1$ 行组成的矩阵为 $A_{k-1}\in C^{(k-1)\times n}$, a_k 是 A_k 的第 k 行, $A_k=\begin{bmatrix}A_{k-1}\\ a_k\end{bmatrix}$. 则:

$$A_k^+=\begin{bmatrix}A_{k-1}^+-b_kd_k^H & b_k\end{bmatrix},$$

其中:

$$d_k^H=a_kA_{k-1}^+,\quad c_k^H=a_k-d_k^HA_{k-1}=a_k(I-A_{k-1}^+A_{k-1})$$

$$b_k=\begin{cases}(c_k^H)^+, & c_k\neq 0\\ (1+d_k^Hd_k)^{-1}A_{k-1}^+d_k, & c_k=0\end{cases}$$

G^H 表示矩阵 G 的共轭转置.

下面推导新的算法. 最小二乘准则 $J(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|e(i)|^2$ 可以改写为如下形式:

$$J(n)=\|Y(n)-X(n)W(n)\|^2$$

其中: $Y(n)=\Lambda(n)[y(1)\quad y(2)\quad\cdots\quad y(n)]^T$,

$$X(n)=\Lambda(n)[x^T(1)\quad x^T(2)\quad\cdots\quad x^T(n)]^T$$

$$=\Lambda(n)\begin{bmatrix}x(1) & 0 & \cdots & 0\\ x(2) & x(1) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ x(n-1) & x(n-2) & \cdots & x(n-L)\\ x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-L+1)\end{bmatrix}$$

$\Lambda(n)=diag\{\sqrt{\lambda^{n-1}},\sqrt{\lambda^{n-2}},\cdots,\sqrt{\lambda},1\}$ 为 $n\times n$ 对角矩阵,且有如下递推关系:

$$Y(n)=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda}Y(n-1)\\ y(n)\end{bmatrix},\quad X(n)=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda}X(n-1)\\ x^T(n)\end{bmatrix}$$

求使 $J(n)=\|Y(n)-X(n)W(n)\|^2$ 最小的权系数向量 $W(n)$ 可看做求线性方程组 $Y(n)-X(n)W(n)=0$ 的最小二乘解. 由线性方程组理论知:方程 $Y(n)-X(n)W(n)=0$ 的最小二乘解为 $W(n)=X^+(n)Y(n)$, $X^+(n)$ 表示矩阵 $X(n)$ 的+号广义逆. 由 $Y(n)$ 和 $X(n)$ 的递推关系及上面矩阵广义逆递推定理可得:

$$W(n)=X^+(n)Y(n)=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda}X(n-1)\\ x^T(n)\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda}Y(n)\\ y(n)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X^+(n-1)-b(n)x^T(n)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X^+(n-1) & b(n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda}Y(n-1)\\ y(n)\end{bmatrix}$$

$$=X^+(n-1)Y(n-1)-b(n)x^T(n)X^+(n-1)Y(n-1)+b(n)y(n)$$

$$=W(n-1)+b(n)(y(n)-x^T(n)W(n-1))$$

$$=W(n-1)+b(n)\xi(n)$$

其中: $\xi(n)=y(n)-x^T(n)W(n-1)$,

$$c^T(n)=x^T(n)(I-X^+(n-1)X(n-1)),$$

$$d^T(n)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x^T(n)X^+(n-1),$$

$$b(n)=\begin{cases}(c^T(n))^+, & c(n)\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(1+d^T(n)d(n))^{-1}X^+(n-1)d(n), & c(n)=0\end{cases}$$

故得具体算法如下:

$$\xi(n)=y(n)-x^T(n)W(n-1),$$

$$c^T(n)=x^T(n)(I-X^+(n-1)X(n-1)),$$

$$d^T(n)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x^T(n)X^+(n-1)$$

$$b(n)=\begin{cases}(c^T(n))^+, & c(n)\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(1+d^T(n)d(n))^{-1}X^+(n-1)d(n), & c(n)=0\end{cases}$$

$$W(n)=W(n-1)+b(n)\xi(n)$$

$$X(n)=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda}X(n-1)\\ x^T(n)\end{bmatrix},$$

$$X^+(n)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X^+(n-1)-b(n)x^T(n)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X^+(n-1) & b(n)\end{bmatrix}$$

3　算法的计算机模拟仿真结果

下面分别以系统辨识和回波消除问题为例,对上述算法进行计算机模拟仿真. 先讨论系统辨识问题,计算机模拟仿真条件:(1)自适应滤波器阶数 $L=4$;(2)未知系统的FIR系数为 $W^*=[0.8,0.5,0.4,0.2]^T$;(3)参考输入信号 $x(n)$ 是零均值,方差为1的高斯白躁声;(4)干扰信号 $v(n)$ 为与 $x(n)$ 不相关的高斯白躁声,其均值是零,方差为 $\sigma_v^2=0.01$. 分别做100次独立的仿真,采样点数为600,然后求其统计平均,得出收敛曲线. 以均方误差作为性能指标.

图2为系统辨识问题的LMS算法($\mu=0.01$)、RLS算法($\lambda=0.98$, $\delta=10$)和本文算法($\lambda=0.98$)的收敛曲线,从图中可以看出,本文算法的收敛速度明显快于LMS算法和RLS算法.

图3为系统辨识问题的VSSLMS算法[4]、TDNLMS算法[2]、FRLS算法[5]和本文算法($\lambda=1.0$)的收敛曲线. 在VSSLMS算法中参数 $\alpha=0.4$, $\beta=10$(已通过模拟实验确定为最佳值);在TDNLMS算法(变换域能量归一化算法)中,变换采用离散余弦变换,通过调整参数,其收敛速度已达到最快(步长 $\mu=1$);在FRLS算法中, $\lambda=0.98$, $\delta=5$. 从图中可以看出,本文算法的收敛速度明显快于VSSLMS算法、FRLS算法;本文算法的收敛速度虽不如TDNLMS算法快但收敛精度高于TDNLMS算法.

图4为系统辨识问题的TDNLMS算法[2]和本文算法($\lambda=1.0$)的收敛曲线. 在TDNLMS算法(变换域能量归一化算法)

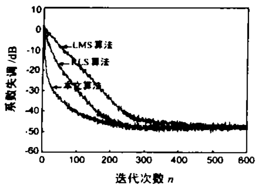

图 2 LMS 算法、RLS 算法和本文算法收敛曲线

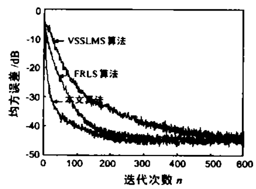

图 3 VSSLMS、FRLS 算法和本文算法收敛曲线

中,变换采用离散余弦变换,通过调整参数,其收敛速度已达到最快(步长 $\mu = 1$). 从图中可以看出,本文算法的收敛速度虽不如 TDNLMS 算法快但收敛精度高于 TDNLMS 算法.

再讨论回波消除问题,回波消除的计算机模拟仿真条件:(1)自适应滤波器阶数 $L = 30$;(2)回波路径的冲激响应函数为 30 点的包络指数衰减函数,其冲激响应函数可以表示为 $h(i) = R(i)\exp(-(i+1)/64)\delta(n-i)$, $i = 0,1,\cdots,L-1$; $R(i)$是$[-0.2,0.2]$之间均匀分布的随机数;(3)输入信号由高斯白躁声通过一个五阶 AR 模型产生,并归一化为单位方差. AR 模型的极点分布为:$z1 = -0.5$, $z2$ 和 $z3 = -0.9e^{\pm j\pi/6}$, $z4$ 和 $z5 = -0.85e^{+j\pi/2}$;(4)期望输出信号由输入信号与回波路径卷积后迭加一个均值是零,方差为 $\sigma_v^2 = 0.01$ 白高斯观测噪声得到. 分别做 10 次独立的仿真,采样点数为 2000,然后求其统计平均,得出收敛曲线. 以系数失调作为性能指标.

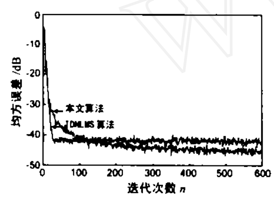

图 4 TDNLMS 算法和本文算法收敛曲线

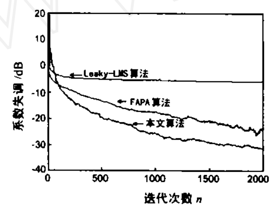

图 5 回波消除问题的三种自适应滤波算法收敛曲线

图 5 为回波消除问题的 Leaky-LMS 算法[7]($\mu = 0.01$, $\gamma = 0.0001$)、FAPA 算法(投影阶数 $p = 5$, $\delta = 10$)和本文算法($\lambda = 0.998$)的收敛曲线,从图中可以看出,本文算法的收敛速度明显快于 Leaky-LMS 算法和 FAPA 算法[6].

4 结论

根据自适应滤波算法的不同优化准则,有基于最小均方误差准则的 LMS 算法和基于递推最小二乘准则的 RLS 算法两大类. 基于最小均方误差准则的 LMS 算法因其简单而被广泛应用,基于最小二乘准则的 RLS 算法对输入信号的自相关矩阵 $R_{xx}(n)$进行递推更新,收敛速度明显快于 LMS 算法. 本文把最小二乘准则 $J(n) = \sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|e(i)|^2$ 写为另一种形式,利用矩阵广义逆递推公式直接对输入信号矩阵而不是自相关矩阵进行递推更新,得到一种新的自适应滤波算法. 计算机模拟仿真结果表明该算法收敛性能良好,收敛速度快于 LMS 算法、NLMS 算法、FRLS 算法、FAPA 算法、Leaky-LMS 算法和 RLS 算法. 新的算法计算复杂性高,对此,我们正在做进一步的研究,以期减少算法的计算复杂性,有关研究结果将另文给出.

参考文献:

[1] Simon Haykin. Adaptive Filtering Theory [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry,1998.

[2] J C Lee,C K Un. Performance of transform domain LMS adaptive filters [J]. IEEE Trans on ASSP,1986,34(6):499 - 510.

[3] J B Evans. A New Variable Step Size Method Suitable for Efficient VLSI Implementation [A]. Proc. ICASSP '91 [C], Toronto: ICASSP, 1991. 2105 - 2108.

[4] 覃景繁,欧阳景正. 一种新的变步长自适应滤波算法[J]. 数据采集与处理. 1997,12(3):171 - 194.

[5] J M Cioffi,T Kailath. Windowed fast transversal filters for recursive least squares adaptive filtering [J]. IEEE Trans on ASSP,1985,33(3):607 - 625.

[6] Masashi Tanaka,Yutaka Kaneda,Shoji Makino,Junji Kojima. A Fast Projection Algorithm and Its Step Size Control [A]. ICASSP '95 [C]. 1995.

[7] Scott C Douglas. Performance comparsion of two implentations of the leaky LMS adaptive filter [J]. IEEE Trans on Signal Processing,1997,45(8):2125 - 2129.

[8] 蒋正新,施国梁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京:北京航空学院出版社,1988.

作者简介:

高 鹰 男,1963 年生于湖北省丹江口市,广州大学计算机系副教授,1987 年本科毕业于华中师大数学系,1998 年毕业于北京航空航天大学机电工程系,获工学硕士学位,现在华南理工大学电子与通信工程系攻读博士学位(在职),主要研究方向:自适应信号处理、计算机辅助几何设计、信息可视化等,已发表论文二十余篇.

谢胜利 男,1958 年生于湖北省公安县,华南理工大学无线电与自动控制研究所教授,博士生导师,主要研究领域:自适应回波消除、盲信号处理,滞后分布参数系统、滞后 2D 离散系统的稳定与变结构控制、非线性系统学习控制、机器人系统等,已出版专著(国家九五重点图书)1 部,6 次获得省部级以上科技奖励,已发表论文 60 余篇.