# 正交小波(包)变换的算子矩阵

孟鸿鹰[1], 刘贵忠[2], 王志华[1]
(1. 清华大学电子工程系, 北京 100084; 2. 西安交通大学电信学院, 西安 710049)

摘 要: 本文采用纯数学的方式, 构造性地直接证明了对于长度为 2 的整数次幂的有限长离散信号, 它的有限支撑的正交小波(包)变换算子可以用一个大小与信号长度一样的正交矩阵来表示, 并且给出了该矩阵构造的一般方法和规律.

关键词: 正交变换; 小波变换; 小波包变换
中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2001) 05-0675-03

## Operator Matrix of the Orthogonal Wavelet (Packets) Transforms

MENG Hong-ying, LIU Gui-zhong, WANG Zhi-hua
(1. *Dept. of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;*
2. *School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

**Abstract:** In this paper, it is directly and constructively proved that the orthogonal compactly supported wavelet (packets) Transform operator of a finite discrete signal with a length as 2's integer power can be represented by an orthogonal matrix with the same size. The general construction method and laws of these matrices are also given.

**Key words:** orthogonal transform; wavelet transform; wavelet packets transform

## 1 引言

常用的离散正交变换有离散傅里叶变换(DFT)、沃尔什变换(WHT)、哈尔变换(HT)、离散余弦变换(DCT)、离散正弦变换(DST)、离散哈特莱变换(DHT)等[1]. 它们的变换算子都可以用一个正交矩阵(复数情形为酉矩阵)来表达的. 相应的逆变换算子就是其共轭转置. 这种表达对从理论的角度分析这些正交变换的性能非常有用.

从数学的角度来看, 小波变换是一类具有快速算法的线性变换. 有一类满足正交性条件的小波变换, 被称为正交小波变换. 其中由 Daubechies 构造的具有紧支撑的正交小波变换[2], 由于实现简单, 在实际中得到了广泛的应用. 正交小波包变换[3]是正交小波变换的推广, 从实现的角度来讲, 正交小波包变换与正交小波变换的算法都是采用 Mallat 的塔式分解与重构算法[4], 所不同的是在从一个尺度向下一个尺度上分解时, 正交小波变换仅对多分辨逼近(低频部分)进一步分解, 而对多分辨细节(高频部分)不进一步分解. 正交小波包变换则对于多分辨逼近(低频部分)和多分辨细节(高频部分)均进一步分解. 分解与重构的公式与正交小波变换的类似.

正交小波(包)变换算子, 象其它正交变换一样, 也应该可以用一个正交矩阵来表达. 本文采用纯数学的方式, 构造性地直接证明了对于长度为 2 的整数次幂的有限长(或周期的)离散信号, 它的正交小波(包)变换算子可以用一个大小与信号长度一样的正交矩阵来表示, 并且给出了该矩阵的构造的一般方法和规律.

## 2 正交小波(包)变换及其矩阵算子

### 2.1 有限支撑的正交小波(包)变换

对于有限长度的离散信号, 可以将它们延拓为周期信号来研究. 经典的有限长度信号的正交变换如 DFT、DCT、DST、DHT 等都是这样处理的. Daubechies 构造了一组性质非常好的滤波器, 不但是正交的, 而且具有有限支撑. 通常, 这类滤波器就被称为 Daubechies 滤波器.

下面以数学的方式来表达有限支撑的正交小波变换和小波包变换. 设某一组 Daubechies 滤波器为$\{h_k\}_{k\in Z}$和$\{g_k\}_{k\in Z}$, 其中 $Z$ 表示全体整数的集合. $\{h_k\}_{k\in Z}$是低通滤波器, 而$\{g_k\}_{k\in Z}$是相应的高通滤波器. 滤波器系数只有有限个不为零, 即: 不失一般性, 总可以保证存在某一个整数 $N$, 使得:

$$h_k = 0,\ k < -(N-1) \text{ 或 } k > N \tag{1}$$

$$g_k = 0,\ k < -(N-1) \text{ 或 } k > N \tag{2}$$

由于正交性, 它们满足下面的条件:

$$\begin{cases} \sum_{n\in Z} h_{n-2k}\bar{h}_{n-2l} = \delta_{kl} \\ \sum_{k\in Z} h_k = \sqrt{2} \end{cases} \tag{3}$$

$$g_k = (-1)^k h_{1-k} \tag{4}$$

进而还可以得到下面的关系式:

$$\begin{cases} \sum_{n\in Z} g_{n-2k}\bar{g}_{n-2l} = \delta_{kl} \\ \sum_{k\in Z} g_k = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\sum_{n\in Z} h_{n-2k}\bar{g}_{n-2l} = 0 \tag{6}$$

为了下面叙述方便, 记数字信号序列为 $C = (c_0^0, c_1^0, \cdots, c_{M-1}^0)$, $M$ 是信号的长度, 假定 $M$ 是 2 的整数次幂. 将它延拓为周期信号来处理, 周期为 $M$, 即:

$$c_{i+kM}^0 = c_i^0,\ \forall k \in Z,\ i = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{7}$$

根据 Mallat 塔式分解算法, 可以递推地得到信号在各个尺度上的分解结果:

收稿日期: 1999-04-22; 修回日期: 2000-11-24

$$\begin{cases} c_m^j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{h}_{k-2m} c_k^{j-1} \\ d_m^j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{g}_{k-2m} c_k^{j-1} \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, L \tag{8}$$

其中, $L$ 为分解的层数, 它的最大值为 $\log_2 M$. $\{c_i^j\}$ 和 $\{d_i^j\}$ 分别被称为第 $j$ 个尺度上的多分辨逼近(低频部分)和多分辨细节(高频部分). 从上面的递推式, 容易看到, 在某一个尺度 $j$ 上, $\{c_i^j\}$ 和 $\{d_i^j\}$ 均是以 $M/2^j$ 为周期的周期序列.

采用下面的小波重构算法, 可以完全得到尺度空间 $V_0$ 上的原始离散信号序列:

$$c_k^j = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_{k-2m} c_m^{j+1} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{k-2m} d_m^{j+1}, \quad j = L-1, \cdots, 1, 0 \tag{9}$$

由于滤波器系数是有限长度的(满足式(1)、(2)), 信号是周期的, 可以将上面的式(8)简化为

$$\begin{cases} c_m^j = \sum_{k=-(N-1)}^{N} \bar{h}_k c_{k+2m}^{j-1} \\ d_m^j = \sum_{k=-(N-1)}^{N} \bar{g}_k c_{k+2m}^{j-1} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \cdots, L \tag{10}$$

小波包的分解结构可以和一个完全二叉树对应起来. 这样就生成了一个小波包库(Wavelet Packet Library, WPL). 一个正交小波包库中包含了许多正交基. 数字信号按照其中的任意一组基展开, 都被称为是一个小波包变换. 信号做小波包变换处理可以按照某一种优化准则选择最佳基来处理[3]. 严格地讲, 小波变换是沿信号的低半频做彻底分解的一种小波包变换. 许多情况下, 通常所指的小波包变换是对信号的高半频和低半频均做彻底分解的一种小波包变换, 也称广义 Walsh 基下的小波包变换. 文献[5]中给出了一个小波包库中的正交基的一个编码方案, 从一个正交基的编码出发, 可以很容易得到它的分解结构, 和其它的正交基区别开来.

### 2.2 正交小波(包)变换的算子矩阵

本小节将要证明本文的主要定理, 首先证明两个引理. 在本小节有限长度的离散信号总是被延拓为周期序列来处理的.

**引理 1** 相同长度(2 的整数倍)的两个离散数字信号, 经过一次有限支撑的正交小波分解后, 内积保持不变.

证明: 假设两有限长序列为:

$$\boldsymbol{X} = (x_0, x_1, \cdots, x_{2n-1}), \quad \boldsymbol{Y} = (y_0, y_1, \cdots, y_{2n-1})$$

将它们均周期延拓为周期为 $2n$ 的周期序列, 采用 Daubechies 有限正交的滤波器, 不妨假定长度为 $2N$, 即:

$$\{h_k, g_k, k = -(N-1), \cdots, 0, \cdots, N\}$$

对 $\boldsymbol{X}$ 作一次正交小波变换后, 得到的序列记为 $\boldsymbol{V}_1 = (a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{n-1})$, 其中的元素分别为:

$$\begin{cases} a_m = \sum_{k=-(N-1)}^{N} \bar{h}_k x_{k+2m} \\ b_m = \sum_{k=-(N-1)}^{N} \bar{q}_k x_{k+2m} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} c_m = \sum_{k=-(N-1)}^{N} \bar{h}_k y_{k+2m} \\ d_m = \sum_{k=-(N-1)}^{N} \bar{g}_k y_{k+2m} \end{cases} \tag{12}$$

$m = 0, 1, \cdots, n-1$.

对 $Y$ 作一次正交小波变换后, 得到的序列记为 $V_2 = (c_0, \cdots, c_{n-1}, d_0, \cdots, d_{n-1})$, 其中的元素分别为:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) &= \sum_{m=0}^{n-1} a_m \bar{c}_m + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \bar{d}_m \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=-(N-1)}^{N} \bar{h}_l \sum_{p=-(N-1)}^{N} h_p x_{l+2k} \bar{y}_{p+2k} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=-(N-1)}^{N} \bar{g}_l \sum_{p=-(N-1)}^{N} g_p x_{l+2k} \bar{y}_{p+2k} \\ &\triangleq \sum_{i=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2n-1} f_{i,j} x_i \bar{y}_j \end{aligned} \tag{13}$$

其中系数 $f_{i,j}$ 可以分情况计算如下:

(1) $i = j$, $i$ 为偶数:

$$f_{i,i} = \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为偶数}}}^{N} (h_p^2 + g_p^2) = \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为偶数}}}^{N} h_p^2 + \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为奇数}}}^{N} h_p^2 = \sum_{p=-(N-1)}^{N} h_p^2 = 1 \tag{14}$$

(2) $i = j$, $i$ 为奇数:

$$f_{i,i} = \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为奇数}}}^{N} (h_p^2 + g_p^2) = \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为奇数}}}^{N} h_p^2 + \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为偶数}}}^{N} h_p^2 = \sum_{p=-(N-1)}^{N} h_p^2 = 1 \tag{15}$$

(3) $|i-j| = m > 0$, $m$ 为奇数, $i$ 为偶数:

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为偶数}}}^{N} (\bar{h}_p h_{p+j-i} + \bar{g}_p g_{p+j-i}) \\ &= \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为偶数}}}^{N} (\bar{h}_p h_{p+j-i} - \bar{h}_p h_{p+j-i}) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

(4) $|i-j| = m > 0$, $m$ 为奇数, $i$ 为奇数:

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为奇数}}}^{N} (\bar{h}_p h_{p+j-i} + \bar{g}_p g_{p+j-i}) \\ &= \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为奇数}}}^{N} (\bar{h}_p h_{p+j-i} - \bar{h}_p h_{p+j-i}) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

(5) $|i-j| = m > 0$, $m$ 为偶数, $i$ 为偶数:

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为偶数}}}^{N} (\bar{h}_p h_{p+j-i} + \bar{g}_p g_{p+j-i}) \\ &= \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为偶数}}}^{N} \bar{h}_p h_{p+j-i} + \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为奇数}}}^{N} \bar{h}_p h_{p+j-i} \\ &= \sum_{p=-(N-1)}^{N} \bar{h}_p h_{p+j-i} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

(6) $|i-j| = m > 0$, $m$ 为偶数, $i$ 为奇数:

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为奇数}}}^{N} (\bar{h}_p h_{p+j-i} + \bar{g}_p g_{p+j-i}) \\ &= \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为奇数}}}^{N} \bar{h}_p h_{p+j-i} + \sum_{\substack{p=-(N-1) \\ p\text{为偶数}}}^{N} \bar{h}_p h_{p+j-i} \\ &= \sum_{p=-(N-1)}^{N} \bar{h}_p h_{p+j-i} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

综合以上六种情况的讨论, 可以得到最后结果:

$$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) = \sum_{i=0}^{2n-1} x_i \bar{y}_i = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \tag{20}$$

**引理 2**　对一个 $M\times M$($M$ 为 2 的整数次幂) 的正交阵 $A$ 的所有列向量进行相同的有限支撑的正交小波(包) 变换后得到的矩阵仍然为正交阵.

证明　对于一个方阵, 要证明它是一个正交阵, 只要证明它的列向量之间是相互正交的或者证明它的行向量之间是相互正交的即可. 下面证明列向量之间的正交性.

由于原来的列向量之间具有正交性, 由引理 1 知道, 作一次 Mallat 算法正交小波分解后, 新生成的矩阵仍然是一个正交阵. 然后进行第二次分解(正交小波变换仅仅对各个列向量的前半部分进行分解, 而正交小波包变换对各个列向量的前半部分和后半部分分别进行分解), 同样应用引理 1, 得到的矩阵仍然是正交阵. 事实上, 引理 1 的保内积的性质在这儿得到了充分的使用. 如果仅对各个列向量的后半部分进行分解(对应另一种小波包变换), 同样得到的是正交矩阵.

反复使用引理 1, 可以得到完全正交小波变换后, 或者完全的正交小波包变换后得到的矩阵的列向量之间仍然满足原来的正交性, 仍然是一个正交阵. 而对于一个小波包库中的所有正交变换也有同样的结果. 从而, 本引理得证.

离散序列 $X=(x_0, x_1, \cdots, x_{M-1})$ 可以看成是单位阵 $I$ 乘以 $X$, 即:

$$X = I\cdot X \tag{21}$$

由于小波(包) 变换的线性性, 对离散序列 $X=(x_0, x_1, \cdots, x_{M-1})$ 作正交小波(包) 变换, 可以看成是对单位阵 $I$ 的列向量作正交小波(包) 变换得到的矩阵 $A$ 再乘以向量 $X$. 而单位阵 $I$ 是正交阵, 由引理 2 得到的矩阵 $A$ 是正交阵. 从代数的角度来说, 它是一个有限正交算子, 则有下面的定理.

**定理 1**　长度为 $M$($M$ 为 2 的整数幂) 的离散序列 $X=(x_0, x_1, \cdots, x_{M-1})$ 的正交小波(包) 变换算子, 可以用一个大小为 $M\times M$ 的正交阵 $A$ 表示. 即, 如果正交小波(包) 变换后的离散序列为 $Y=(y_0, y_1, \cdots, y_{M-1})$, 则有:

$$A^TA = AA^T = I,\ Y = AX,\ X = A^TY \tag{22}$$

其中, $I$ 为 $M\times M$ 的单位阵, $A^T$ 表示矩阵 $A$ 的共轭转置.

## 3　算子矩阵的生成过程和一般规律

用符号 $A_{n\times n}$ 表示 $n$ 维的 Mallat 算法分解一次的正交小波变换矩阵, 用符号 $WT_{n\times n}$ 表示 $n$ 维的彻底分解的正交小波变换矩阵, 符号 $WPT_{n\times n}$ 表示 $n$ 维的广义 Walsh 基下的正交小波包变换. 通过仔细分析, 对于一般情形, 可以总结出以下规律:

(1) 维数为 $M=2^J$($J$ 为某一自然数) 的情形, 做一次 Mallat 算法分解的正交小波变换矩阵 $A_{M\times M}$ 由 $M$ 维的单位阵 $I_{M\times M}$ 的所有列向量延拓为周期信号, 然后采用 Mallat 算法做一次正交小波分解得到.

(2) 维数为 $M=2^J$($J$ 为某一自然数) 的情形, 正交小波变换矩阵 $WT_{M\times M}$ 由做一次 Mallat 算法分解的变换矩阵 $A_{2^j\times2^j}$($j=1, 2, \cdots, J$) 和相应维数的一些单位阵及零矩阵构成相应的分块矩阵组合而得到. 即:

$$WT_{M\times M}=\begin{bmatrix} A_{2\times2} & & & \\ & I_{2\times2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{2\times2}\end{bmatrix}\times\cdots$$

$$\times\begin{bmatrix} A_{2^{J-1}\times2^{J-1}} & \\ & I_{2^{J-1}\times2^{J-1}}\end{bmatrix}\times A_{2^J\times2^J} \tag{29}$$

(3) 维数为 $M=2^J$($J$ 为某一自然数) 的情形, 正交小波包变换(广义 Walsh 基下) 算子矩阵 $WPT_{N\times N}$ 由做一次 Mallat 算法分解矩阵 $A_{2^j\times2^j}$($j=1, 2, \cdots, J$) 和相应维数的一些单位阵及零矩阵构成相应的分块矩阵组合而得到. 即:

$$WPT_{M\times M}=\begin{bmatrix} A_{2\times2} & & & \\ & A_{2\times2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{2\times2}\end{bmatrix}\times\cdots$$

$$\times\begin{bmatrix} A_{2^{J-1}\times2^{J-1}} & \\ & A_{2^{J-1}\times2^{J-1}}\end{bmatrix}\times A_{2^J\times2^J} \tag{31}$$

(4) 对于一个正交小波包库中的正交基对应的正交小波包变换, 同样可以得到其一般表达. 采用文献[5]中的小波包基的编码方案, 根据它的编码可以得到相应的正交小波包变换矩阵. 由于篇幅所限, 本文在此略.

## 4　结论

本文采用纯数学的方式, 构造性地直接给出了长度为 2 的整数次幂的有限长离散信号的有限支撑的正交小波(包) 变换算子的正交矩阵表示. 共轭滤波器组给定时, 该算子矩阵是一个常数矩阵, 逆变换矩阵也是一个常数矩阵, 且恰恰是正变换矩阵的共轭转置. 本文对于正交小波变换、广义 Walsh 基下的正交小波包变换和一个小波包库中的所有正交变换的算子矩阵的构造给出了一般的方法和规律. 这种算子的矩阵表达在理论的角度研究正交小波(包) 变换性能时非常有用.

参考文献:


[1]　张公礼, 潘爱玲. 数字谱方法的理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992: 96-136.

[2]　Daubechies. I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm. Pure and Appl. Math., 1988, 41(7): 909-996.

[3]　Coifman, R. R., et al. Entropy-based algorithms for best basis section [J]. IEEE Trans., 1992, IT-38(3): 713-718.

[4]　Mallat, S., A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation [J]. IEEE Trans. 1989, PAMI-11(7): 674-693.

[5]　刘贵忠, 孟鸿鹰. 随机信号 HAAR 小波包变换的性能比较研究[J]. 电子学报, 1998, 26(1): 83-88.


作者简介:

孟鸿鹰　1968 年出生, 1998 年在西安交通大学获得通信与电子系统专业博士学位, 同年进入清华大学电子科学与技术博士后流动站, 从事博士后研究工作, 出站后留清华大学电子工程系任教. 目前的主要研究兴趣为: 小波变换, 静止图像压缩编码, 视频音频信号处理, 神经网络, 快速算法及实时处理等. 已发表学术论文 20 余篇.