区间值 Vague 决策系统及其规则提取方法

马志锋[1]，**邢汉承**[1]，**郑晓妹**[2]
(1. 东南大学计算机科学与工程系，南京 210096；2. 南京航空航天大学计算机科学与工程系，南京 210016)

摘　要： 区间值（i-v）模糊集合和 Vague 集是不精确知识表达的两种新理论.它们已被广泛地应用于决策系统中对于不确定决策数据的描述.本文将两者有机地结合，给出了 i-v Vague 集的有关概念，并详细地讨论了其性质.最后，结合一个决策系统实例，利用文中所提出的包含与相交因子，分析了规则生成策略.经过与传统 Rough 集方法的对比，发现两者所得结论是一致的，但该方法对于不确定性问题的处理却表现得更为灵活.

关键词： i-v Vague 集；决策系统；Rough 集；不确定性
中图分类号： TP18　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112 (2001) 05-0585-05

Interval Valued Vague Decision System and an Approach for Its Rule Generation

MA Zhi-feng[1]，XING Han-cheng[1]，ZHENG Xiao-mei[2]
(1. *Department of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing* 210096, *China*;
2. *Department of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016, *China*)

Abstract: Interval valued (i-v) fuzzy sets and vague sets are two new theories representing inexact knowledge. They have been widely applied to describe the uncertain data in decision systems. In this paper, the notions of i-v vague sets are first introduced by putting the two theories together. Then, the properties of i-v vague sets are discussed in detail. Finally, by a decision system and the operators of containment and intersection defined on it, we analyse the strategies of rule generation. In comparison with the method of using rough set theory, the two results are proved to be consistent. However, our new method behaves much flexibly in representing uncertainty.

Key words: i-v vague sets; decision system; rough sets; uncertainty

1　引言

Gau 等在文献[1]中提出了 Vague 集的概念，它是模糊集合的一种扩展形式，与 Atanassov 所提出的直觉模糊集 (intuitionistic fuzzy sets) 在处理不精确数据的描述方面具有同等的表达能力[2].目前，Vague 集已在国外成功地运用于模糊控制、决策分析、专家系统及故障诊断等领域，并取得了较传统模糊集合理论更好的效果，该理论也因此引起了国内外众多学者们的关注[3～8].

众所周知，传统模糊隶属度定义为区间[0,1]上的一个实数，这一表达形式在实际运用中存在着一定的困难，因为现实情况下对于一个元素隶属于某个模糊集合的确切程度往往是很难确定的，为此 Zadeh 和 Gorzalczany 分别在文献[9]与[10]中提出了一种采用区间值 (interval value，i-v) 来替代精确值隶属度的区间值模糊集合 (i-v fuzzy sets) 的概念.本文注意到，尽管 Vague 集也将模糊集合的隶属度推广成一个区间取值的形式，然而它与 i-v 模糊集合的含义却是不同的.事实上 Vague 集中的区间值是通过两个独立的隶属函数来给定的，其中真、假隶属度分别体现了元素隶属于以及不隶属于该 Vague 集的程度或证据.从两者结合的观点来看，如果利用 i-v 模糊集合对 Vague 集的真、假隶属度作进一步的拓广，则必能增强 Vague 集表达不确定数据的能力，并更具灵活性.本文即以此为依据，深入地研究在区间模糊值和 Vague 值的双重不确定条件下，如何从决策系统中较为客观地提取出决策规则.

2　i-v 模糊集合及 Vague 集基础

设 $D([0,1])=\{[a,b]\mid[a,b]\subseteq[0,1]\}$ 是 $[0,1]$ 区间上所有子区间的集合，则有：

定义1　称 $\overleftrightarrow{I}$ 为论域 U 上的 i-v 模糊集合，当且仅当 $\forall x\in U$ 的 i-v 隶属函数为 $ivf_{\overleftrightarrow{I}}: U\rightarrow D$，其中 $ivf_{\overleftrightarrow{I}}(x)\subseteq[0,1]$ 表明了 x 隶属于 $\overleftrightarrow{I}$ 的程度.

定义2　设 $\overleftrightarrow{I}$，$\overleftrightarrow{J}$ 是论域 U 上的两个 i-v 模糊集合，$x\in U$，其隶属函数分别为 $ivf_{\overleftrightarrow{I}}(x)=[a_{\overleftrightarrow{I}},b_{\overleftrightarrow{I}}]$ 及 $ivf_{\overleftrightarrow{J}}(x)=[a_{\overleftrightarrow{J}},b_{\overleftrightarrow{J}}]$，其中 $0\le a_{\overleftrightarrow{I}}\le b_{\overleftrightarrow{I}}\le 1$，$0\le a_{\overleftrightarrow{J}}\le b_{\overleftrightarrow{J}}\le 1$，则称：

(1) i-v 并集 $\overleftrightarrow{A}=\overleftrightarrow{I}\cup\overleftrightarrow{J}$ 依然是一个 i-v 模糊集合，且满足 $ivf_{\overleftrightarrow{A}}(x)=[\max(a_{\overleftrightarrow{I}},a_{\overleftrightarrow{J}}),\max(b_{\overleftrightarrow{I}},b_{\overleftrightarrow{J}})]$；

(2) i-v 交集 $\overleftrightarrow{B}=\overleftrightarrow{I}\cap\overleftrightarrow{J}$ 仍然是一个 i-v 模糊集合，且满

收稿日期：2000-06-19；修回日期：2000-09-20

足 $ivf_{\vec{B}}(x) = [\min(a_{\vec{I}}, a_{\vec{J}}), \min(b_{\vec{I}}, b_{\vec{J}})]$;

(3) i - v 补集 $\vec{C} = \bar{\vec{I}}$ 也是一个 i - v 模糊集合，且满足 $ivf_{\vec{C}}(x) = [1 - b_{\vec{I}}, 1 - a_{\vec{I}}]$;

(4) $\vec{I}$ 包含于 $\vec{J}(\vec{I} \subseteq \vec{J})$ 当且仅当 $a_{\vec{I}} \le b_{\vec{I}} \le a_{\vec{J}} \le b_{\vec{J}}$.

定义 3 称 $\tilde{V}$ 为空间 U 上的一个 Vague 集，它是指 $\forall x \in U$ 的确切隶属度 $vag_{\tilde{V}}(x)$ 无法具体确定，但可由两个常规模糊隶属函数所界定，且满足如下序偶结构：

$\tilde{V} = \{\langle x, \mu_{\tilde{V}}(x), \tau_{\tilde{V}}(x)\rangle \mid x \in U\}$，其中 $\mu_{\tilde{V}}, \tau_{\tilde{V}}: U \to [0,1]$ 分别表示了元素 $x \in U$ 隶属于和不隶属于 $\tilde{V}$ 的程度（也称真、假隶属度），并有 $0 \le \mu_{\tilde{V}}(x) + \tau_{\tilde{V}}(x) \le 1$ 成立. 事实上，$vag_{\tilde{V}}(x) \in [\mu_{\tilde{V}}(x), 1 - \tau_{\tilde{V}}(x)]$.

定义 4 设 $\tilde{V}$、$\tilde{W}$ 是论域 U 上的两个 Vague 集，则 Vague 并、交、补集以及包含运算可分别定义如下：

(1) Vague 并集 $\tilde{X} = \tilde{V} \tilde{\cup} \tilde{W}$ 是包含 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{W}$ 的最小 Vague 集 $\{\langle x, \mu_{\tilde{X}}(x), \tau_{\tilde{X}}(x)\rangle \mid x \in U\}$，且满足：① $\mu_{\tilde{X}}(x) = \max(\mu_{\tilde{V}}(x), \mu_{\tilde{W}}(x))$；② $1 - \tau_{\tilde{X}}(x) = \max(1 - \tau_{\tilde{V}}(x), 1 - \tau_{\tilde{W}}(x)) = 1 - \min(\tau_{\tilde{V}}(x), \tau_{\tilde{W}}(x))$，即 $\tau_{\tilde{X}}(x) = \min(\tau_{\tilde{V}}(x), \tau_{\tilde{W}}(x))$；

(2) Vague 交集 $\tilde{Y} = \tilde{V} \tilde{\cap} \tilde{W}$ 是包含于 $\tilde{V}$、$\tilde{W}$ 的最大 Vague 集 $\{\langle x, \mu_{\tilde{Y}}(x), \tau_{\tilde{Y}}(x)\rangle \mid x \in U\}$，且满足：① $\mu_{\tilde{Y}}(x) = \min(\mu_{\tilde{V}}(x), \mu_{\tilde{W}}(x))$；② $1 - \tau_{\tilde{Y}}(x) = \min(1 - \tau_{\tilde{V}}(x), 1 - \tau_{\tilde{W}}(x)) = 1 - \max(\tau_{\tilde{V}}(x), \tau_{\tilde{W}}(x))$，即 $\tau_{\tilde{Y}}(x) = \max(\tau_{\tilde{V}}(x), \tau_{\tilde{W}}(x))$；

(3) Vague 补集 $\tilde{Z} = \bar{\tilde{V}}$ 仍然是一个 Vague 集 $\{<x, \mu_{\tilde{Z}}(x), \tau_{\tilde{Z}}(x)> \mid x \in U\}$，且：① $\mu_{\tilde{Z}}(x) = \tau_{\tilde{V}}(x)$；② $\tau_{\tilde{Z}}(x) = \mu_{\tilde{V}}(x)$；

(4) $\tilde{V}$ Vague 包含于 $\tilde{W}(\tilde{v} \subseteq \tilde{W})$ 是指符合条件：① $\mu_{\tilde{V}}(x) \le \mu_{\tilde{W}}(x)$；② $1 - \tau_{\tilde{V}}(x) \le 1 - \tau_{\tilde{W}}(x)$，即 $\tau_{\tilde{V}}(x) \ge \tau_{\tilde{W}}(x)$.

这里并没有采纳类似于定义 2 中的"i - v 包含于"的形式，主要是考虑到 Vague 集的语义，因为 $\tau_{\tilde{V}}(x) \ge \tau_{\tilde{W}}(x)$ 意味着 $\tilde{W}$ 的假隶属度下界可作为 $\tilde{V}$ 的假隶属度下界，同时 $\mu_{\tilde{V}}(x) \le \mu_{\tilde{W}}(x)$ 则说明了 $\tilde{V}$ 的真隶属度下界也适用于 $\tilde{W}$ 的真隶属度下界.

(5) Vague 必然与可能因子分别是指：$\Box\tilde{V} = \{\langle x, \mu_{\tilde{V}}(x), 1 - \mu_{\tilde{V}}(x)\rangle \mid x \in U\}$ 及 $\Diamond\tilde{V} = \{\langle x, 1 - \tau_{\tilde{V}}(x), \tau_{\tilde{V}}(x)\rangle \mid x \in U\}$.

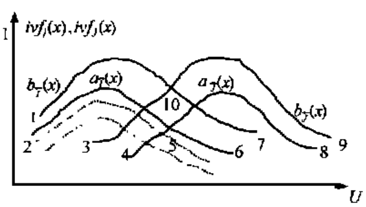

图 1 i - v 模糊集合的并集、交集和包含关系

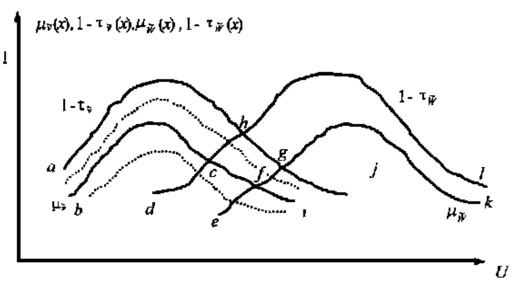

图 2 Vague 集的并集、交集和包含关系

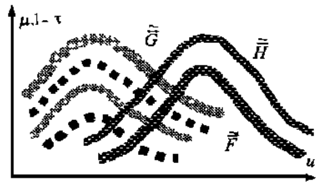

图 3 i - v Vague 集示意图($\vec{F} \subset \vec{G}$)

图 1 给出了 i - v 模糊集合的并集、交集和包含关系的示意图，其中并集 $\vec{A} = \vec{I} \vec{\cup} \vec{J}$, $ivf_{\vec{A}}(x) = [$曲线 2.5.8，曲线 1.10.9$]$；交集 $\vec{B} = \vec{I} \vec{\cap} \vec{J}$, $ivf_{\vec{B}}(x) = [$曲线 4.5.6，曲线 3.10.7$]$；虚线所标示的 i - v 模糊集合 $\vec{\subseteq} \vec{I}$. 图 2 显示了 Vague 集的并集、交集以及两 Vague 集间的包含关系，其中并集 $\tilde{X} = \tilde{V} \cup \tilde{W}$, $\mu_{\tilde{X}}(x)$、$1 - \tau_{\tilde{X}}(x)$ 分别由曲线 bfk 和 ahl 所组成；交集 $\tilde{Y} = \tilde{V} \cap \tilde{W}$, $\mu_{\tilde{Y}}(x)$、$1 - \tau_{\tilde{Y}}(x)$ 分别由曲线 efi 以及 dhj 所组成；虚线所表示的 Vague 集 $\subseteq \tilde{Y}$，这一关于 Vague 集的包含的解释是合理的，例如若有两 Vague 集 $\tilde{V}$、$\tilde{W}$ 在 x_0 的取值分别为 $<x_0, 0.3, 0.5>$ 及 $<x_0, 0.4, 0.2>$，这表明对于 $\tilde{V}$ 来说，支持、反对和弃权的证据分别为 3、5、2；对于 $\tilde{W}$ 来说，支持、反对和弃权的证据分别为 4、2、4，显然 $\tilde{V} \subseteq \tilde{W}$. 这里值得指出的是，Vague 集的上述运算并不同于传统数学意义下的区间运算，因为对于区间运算而言，并集事实上是由曲线 efi 和 ahl 所组成；交集是由曲线 cfg 和 chg 所构成；而区间 $[a, b]$ 包含于 $[c, d]$ 是指 $c \le a \le b \le d$ 成立.

3 i - v Vague 集理论

为了引入更深一层的不确定性，下面讨论以 i - v 模糊集合的有关概念来扩展 Vague 集. 为此，可将传统 Vague 集的真、假隶属度分别用 i - v 模糊集合来表示.

定义 5 称 Vague 集 $\vec{G} = \{\langle x, G_{\vec{I}}(x), G_{\vec{J}}(x)\rangle \mid x \in U\}$ 为 i - v Vague 集，其中，i - v 模糊集合 $G_{\vec{I}}$ 及 $G_{\vec{J}}$ 分别表示 $x \in U$ 关于 $\vec{G}$ 的真、假隶属度，$ivf_{G_{\vec{I}}}(x) = [a_{G_{\vec{I}}}(x), b_{G_{\vec{I}}}(x)]$, $ivf_{G_{\vec{J}}}(x) = [a_{G_{\vec{J}}}(x), b_{G_{\vec{J}}}(x)]$，且满足 $b_{G_{\vec{I}}}(x) + b_{G_{\vec{J}}}(x) \le 1$.

定义 6 设 $\vec{G}$、$\vec{H}$ 分别为两个 i - v Vague 集，则有 i - v Vague 集的并集、交集、补集、集合间的包含关系以及必然因子 $\Box$、可能因子 $\Diamond$ 的定义如下：

(1) i - v Vague 并集；

$$\vec{G} \cup \vec{H} = \{\langle x, G_{\vec{I}}(x), G_{\vec{J}}(x)\rangle\} \cup \{\langle x, H_{\vec{I}}(x), H_{\vec{J}}(x)\rangle\} = \{\langle x, [a_{G_{\vec{I}}}(x) \vee a_{H_{\vec{I}}}(x), b_{G_{\vec{I}}}(x) \vee b_{H_{\vec{I}}}(x)], [a_{G_{\vec{J}}}(x) \wedge a_{H_{\vec{J}}}(x), b_{G_{\vec{J}}}(x) \wedge b_{H_{\vec{J}}}(x)]\rangle\};$$

(2) i - v Vague 交集；

$$\vec{G} \cap \vec{H} = \{\langle x, G_{\vec{I}}(x), G_{\vec{J}}(x)\rangle\} \cap \{\langle x, H_{\vec{I}}(x), H_{\vec{J}}(x)\rangle\} = \{\langle x, [a_{G_{\vec{I}}}(x) \wedge a_{H_{\vec{I}}}(x), b_{G_{\vec{I}}}(x) \wedge b_{H_{\vec{I}}}(x)], [a_{G_{\vec{J}}}(x) \vee a_{H_{\vec{J}}}(x), b_{G_{\vec{J}}}(x) \vee b_{H_{\vec{J}}}(x)]\rangle\};$$

(3) i - v Vague 补集；

$\overline{\overleftrightarrow{G}}=\{\langle x, G_{\overleftrightarrow{J}}(x), G_{\overleftrightarrow{I}}(x)\rangle\}$;

(4) $i-v$ Vague **包含关系(真包含于** $\subseteq_{\Box}$、**假包含于** $\subseteq_{\Diamond}$);

$\overleftrightarrow{G}$**包含于** $\overleftrightarrow{H}$,**即** $\overleftrightarrow{G}\subseteq\overleftrightarrow{H}\Leftrightarrow G_{\overleftrightarrow{I}}\,\overleftrightarrow{\subseteq}\,H_{\overleftrightarrow{I}}$ **且** $H_{\overleftrightarrow{J}}\,\overleftrightarrow{\subseteq}\,G_{\overleftrightarrow{J}}\Leftrightarrow a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x)\le b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x)\le a_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x)\le b_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x)$ **且** $a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x)\le b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x)\le a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)\le b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)$;**另有** $\overleftrightarrow{G}\subseteq_{\Box}\overleftrightarrow{H}$ iff $(\forall x\in U)([a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x)]\,\overleftrightarrow{\subseteq}\,[a_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x), b_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x)])$; $\overleftrightarrow{G}\subseteq_{\Diamond}\overleftrightarrow{H}$ iff $(\forall x\in U)([a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x)]\,\overleftrightarrow{\subseteq}\,[a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)])$;

(5) $i-v$ Vague **必然因子** $\Box$**及可能因子** $\Diamond$:

$\Box\overleftrightarrow{G}=\{\langle x, G_{\overleftrightarrow{I}}(x), [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x), 1-b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x)]\rangle \mid x\in U\}$;

$\Diamond\overleftrightarrow{G}=\{\langle x, [a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x), 1-b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)], G_{\overleftrightarrow{J}}(x)\rangle \mid x\in U\}$.

性质 1　(1) $\overleftrightarrow{G}\subseteq\overleftrightarrow{H}\Leftrightarrow\overline{\overleftrightarrow{H}}\subseteq\overline{\overleftrightarrow{G}}$;

(2) $\overleftrightarrow{G}\subseteq\overleftrightarrow{H}\Rightarrow\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H}=\overleftrightarrow{G}\Leftrightarrow\overleftrightarrow{G}\cup\overleftrightarrow{H}=\overleftrightarrow{H}$;

(3) $\overleftrightarrow{G}\cup\overleftrightarrow{H}=\overleftrightarrow{H}\cup\overleftrightarrow{G}$; $\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H}=\overleftrightarrow{H}\cap\overleftrightarrow{G}$;

(4) $\overleftrightarrow{G}\cup\overleftrightarrow{G}=\overleftrightarrow{G}$; $\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{G}=\overleftrightarrow{G}$;

(5) $\overleftrightarrow{F}\cup(\overleftrightarrow{G}\cup\overleftrightarrow{H})=(\overleftrightarrow{F}\cup\overleftrightarrow{G})\cup\overleftrightarrow{H}$;

$\overleftrightarrow{F}\cap(\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H})=(\overleftrightarrow{F}\cap\overleftrightarrow{G})\cap\overleftrightarrow{H}$;

(6) $\overleftrightarrow{F}\cup(\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H})=(\overleftrightarrow{F}\cup\overleftrightarrow{G})\cap(\overleftrightarrow{F}\cup\overleftrightarrow{H})$;

$\overleftrightarrow{F}\cap(\overleftrightarrow{G}\cup\overleftrightarrow{H})=(\overleftrightarrow{F}\cap\overleftrightarrow{G})\cup(\overleftrightarrow{F}\cap\overleftrightarrow{H})$;

(7) $\overleftrightarrow{G}\cup(\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H})=\overleftrightarrow{G}$; $\overleftrightarrow{G}\cap(\overleftrightarrow{G}\cup\overleftrightarrow{H})=\overleftrightarrow{G}$;

(8) $\overline{\overline{\overleftrightarrow{G}}}=\overleftrightarrow{G}$; $\overline{\Diamond\overline{\overleftrightarrow{G}}}=\Box\overleftrightarrow{G}$; $\overline{\Box\overline{\overleftrightarrow{G}}}=\Diamond\overleftrightarrow{G}$

(9) $\overline{\overleftrightarrow{G}\cup\overleftrightarrow{H}}=\overline{\overleftrightarrow{G}}\cup\overline{\overleftrightarrow{H}}$; $\overline{\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H}}=\overline{\overleftrightarrow{G}}\cup\overline{\overleftrightarrow{H}}$.

定义 7　**设** $\overleftrightarrow{G}=\{\langle x, G_{\overleftrightarrow{I}}(x), G_{\overleftrightarrow{J}}(x)\rangle \mid x\in U\}$**为实数域上的** $i-v$ Vague **集,则** $\boldsymbol{\Gamma}_{\overleftrightarrow{G},\lambda}=\{x\in U \mid a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x)\ge\lambda_{a_{\overleftrightarrow{I}}}, b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x)\ge\lambda_{b_{\overleftrightarrow{I}}}, 1-a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)\ge\lambda_{a_{\overleftrightarrow{J}}}, 1-b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)\ge\lambda_{b_{\overleftrightarrow{J}}}\}$**称为** $\overleftrightarrow{G}$**的** λ **截集,其中** $\lambda_{a_{\overleftrightarrow{I}}}, \lambda_{b_{\overleftrightarrow{I}}}, \lambda_{a_{\overleftrightarrow{J}}}, \lambda_{b_{\overleftrightarrow{J}}}\in[0,1]$.

定义 8　**一个** $i-v$ Vague **集是凸** $i-v$ Vague **集,当且仅当满足下面两个条件中的任何一个**:

(1) $\forall\lambda_{a_{\overleftrightarrow{I}}}, \lambda_{b_{\overleftrightarrow{I}}}, \lambda_{a_{\overleftrightarrow{J}}}, \lambda_{b_{\overleftrightarrow{J}}}\in[0,1]$, $\overleftrightarrow{G}$**的** λ **截集** $\boldsymbol{\Gamma}_{\overleftrightarrow{G},\lambda}$**都是凸的**;

(2) $\forall_{x,y}\in U$, $\forall\boldsymbol{\phi}\in[0,1]$,**以下各式均成立**:

①$a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(\boldsymbol{\phi}*x+(1-\boldsymbol{\phi})*y)\ge\min(a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x), a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(y))$;

②$b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(\boldsymbol{\phi}*x+(1-\boldsymbol{\phi})*y)\ge\min(b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(y))$;

③$1-a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(\boldsymbol{\phi}*x+(1-\boldsymbol{\phi})*y)\ge\min(1-a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x), 1-a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(y))$;

④$1-b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(\boldsymbol{\phi}*x+(1-\boldsymbol{\phi})*y)\ge\min(1-b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x), 1-b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(y))$.

事实上,由传统模糊集合理论不难看出上述两个条件是等价的[6]. **若** $\overleftrightarrow{G}$、$\overleftrightarrow{H}$**分别是两个凸** $i-v$ Vague **集,则** $\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H}$**也是一个凸** $i-v$ Vague **集(限于篇幅,证明从略)**.

4　i - v Vague 决策系统及不确定性描述

一个决策系统(decision system)**可以定义为四元组** $DS=\langle U, C\cup\{d\}, V, f\rangle$[7,11],**其中非空有限集** U **为论域**; C、d **分别为条件属性集和决策属性**; $V=\bigcup_{a\in C\cup\{d\}}V_a$ **表示属性的值域**; $f: U\times C\cup\{d\}\to V$ **是一个决策函数,即对** $\forall x\in U$ **及** $a\in C\cup\{d\}$,**有** $f(x,a)\in V_a$ **成立**. U **中的每个对象实际上对应了一条决策规则,规则的前件由** C **中属性及其取值之合取式所确定,而后件则由** d **及其取值决定**.

为了能在决策系统中最大限度地表达决策数据本身的不确定性,采用 $i-v$ Vague **集将是一个很好的选择. 为此需对决策系统作适当形式的改进. 首先若属性为数值型数据,则应对其作适当的预处理,所有数据被离散化成若干个子区间,每个子区间对应了某个语义概念. 若考虑将决策系统横向展开,即所有非数值型数据以及数值型数据的语义概念取值作为新决策系统的属性,于是有如下关于** $i-v$ Vague **决策系统的定义**.

定义 9　**考虑决策系统** $DS=\langle U, C\cup\{d\}, V, f\rangle$, $v_a\in V_a$ **为属性** a **上的一个不精确概念取值,则** $\overleftrightarrow{v}_a$ **可以看作是定义在** U **上的** $i-v$ Vague **集,于是有** $i-v$ Vague **决策系统**: $DS^{vag}_{i-v}=\langle U, C\cup\{d\}, \overleftrightarrow{V}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{\rho}}\rangle$,**其中** $\overleftrightarrow{V}=(\bigcup_{a\in C}\overleftrightarrow{V}_a)\cup\overleftrightarrow{V}_d$ **为决策系统中所有属性的** $i-v$ Vague **集取值**, $i-v$ Vague **决策函数** $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\rho}}: U\times\mathrm{des}(\overleftrightarrow{V})\to S^{vag}_{i-v}$**指明了决策对象** $x\in U$ **关于** $\mathrm{des}(\overleftrightarrow{V})$ **的** $i-v$ Vague **取值**, $\mathrm{des}(\overleftrightarrow{V})$ **是描述** $\overleftrightarrow{V}$**的标识名**, S^{vag}_{i-v}**是所有单元素** $i-v$ Vague **取值的集合**.

采用 $i-v$ Vague **集来描述决策表中的不确定数据给决策过程带来了很大的方便. 令** $\overleftrightarrow{G}=\{\langle x, G_{\overleftrightarrow{I}}(x), G_{\overleftrightarrow{J}}(x)\rangle \mid x\in U\}=\{\langle x, [a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}, b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}], [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}, b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}]\rangle\}$,**则当** $a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}=b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}$ **且** $a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}=b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}$**时**, $i-v$ Vague **集退化成** Vague **集;进一步,当** $a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}=b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}=1-a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}=1-b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}$**时,则** Vague **集便变为了模糊集合;如果** $a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}=b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}=a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}=b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}=0$ **或** 1,**此时模糊集合便成为普通集合**, x **是否隶属于** $\overleftrightarrow{G}$**是精确可判断的**.

对于缺失数据的不确定性,可根据对其实际了解程度的不同划分成以下几种情形:

(1) **(类型 Ⅰ)全局型不确定性**($\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{I}}$);

当 $\overleftrightarrow{G}=\{\langle x, [0,0], [0,0]\rangle \mid x\in U\}$**时表明对于数据一无所知,也就是说对任何对象** x **来说,其肯定与否定证据均为**

0,既不能作出肯定也不能作出否定的判断.

(2) (类型 II) 真型不确定性(ϕ_2);

当 $\overleftrightarrow{G}=\{\langle x,[0,1],[0,0]\rangle \mid x\in U\}$ 时表明确切地知道否定证据为 0,即可断定不会否定 x 隶属于 $\overleftrightarrow{G}$ 的情形,但从肯定证据的角度来看,则表现为最大的不确定性 $[0,1]$.

(3) (类型 III) 假型不确定性(ϕ_3).

当 $\overleftrightarrow{G}=\{\langle x,[0,0],[0,1]\rangle \mid x\in U\}$ 时表明确切地知道肯定证据为 0,然而从否定证据的角度来看,其隶属度却可能取值为 $[0,1]$ 中的任何值,表现为最大的不确定性.

5 i - v Vague 规则提取策略

依照 Rough 集理论中有关近似集的思想,从分类的角度来看,若按条件属性集所划分的不分明类能完全包含于某个决策类中,则由此所导出的规则是确定的;如果和决策类间存在相交元素,则对应了可能规则. 基于如此考虑,本文借鉴近似集的思想,提出以下两个因子并将其应用于 i - v Vague 决策系统的情形.

定义 10 设有两个 i - v Vague 集 $\overleftrightarrow{G}$、$\overleftrightarrow{H}$,则可分别定义其包含(α)与相交因子(β)如下:

(1) $\alpha(\overleftrightarrow{G}\subseteq\overleftrightarrow{H}) \doteq \alpha(\overleftrightarrow{G}\rightarrow\overleftrightarrow{H}) \doteq \alpha(\overline{\overleftrightarrow{G}}\cup\overleftrightarrow{H}) \doteq \alpha(\langle x, G_{\overleftrightarrow{J}}(x), G_{\overleftrightarrow{I}}(x)\rangle \cup \langle x, H_{\overleftrightarrow{I}}(x), H_{\overleftrightarrow{J}}(x)\rangle) \doteq \alpha(\langle x, G_{\overleftrightarrow{J}}(x)\ \overleftrightarrow{\cup}\ H_{\overleftrightarrow{I}}(x), G_{\overleftrightarrow{I}}(x)\ \overleftrightarrow{\cap}\ H_{\overleftrightarrow{J}}(x)\rangle) \doteq \alpha(\langle x, [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \vee a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \vee b_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x)], [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \wedge a_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x) \wedge b_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x)]\rangle) \doteq \min\limits_{x\in U}\{(\max(a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}, a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}) + \max(b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}, a_{H_{\overleftrightarrow{I}}}) + \max(1-a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}, 1-a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}) + \max(1-b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}, 1-b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}))/4\}$.

(2) $\beta(\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H}) \doteq \beta(\langle x, G_{\overleftrightarrow{I}}(x), G_{\overleftrightarrow{J}}(x)\rangle \cap \langle x, H_{\overleftrightarrow{I}}(x), H_{\overleftrightarrow{J}}(x)\rangle) \doteq \beta(\langle x, [a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x) \wedge a_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}(x) \wedge b_{H_{\overleftrightarrow{I}}}(x)], [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \vee a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \vee b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x)]\rangle) \doteq \max\limits_{x\in U}\{(\min(a_{G_{\overleftrightarrow{I}}}, a_{H_{\overleftrightarrow{I}}}) + \min(b_{G_{\overleftrightarrow{I}}}, b_{H_{\overleftrightarrow{I}}}) + \min(1-a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}, 1-a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}) + \min(1-b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}, 1-b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}))/4\}$.

根据上述 i - v Vague 集的包含与相交因子的定义,若事先给定某阈值,则不难得到决策表中相应的肯定与可能规则. 如需获取否定规则,则可类似地定义对偶的 $\alpha'(\neg(\overleftrightarrow{G}\subseteq\overleftrightarrow{H}))$ 及 $\beta'(\neg(\overleftrightarrow{G}\cap\overleftrightarrow{H}))$,即满足 $\alpha+\alpha'=1$;$\beta+\beta'=1$.

6 实例分析

设有一个决策系统 $DS=\langle U, C\cup\{d\}, V, f\rangle$,其中,$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$,$C=\{C_1, C_2\}$,$V_{C_1}=\{c_{11}, c_{12}\}$,$V_{C_2}=\{c_{21}, c_{22}\}$,$V_d=\{d_1, d_2\}$. 于是有 i - v Vague 决策系统如表 1 所示,$\{\overleftrightarrow{c_{11}}、\overleftrightarrow{c_{12}}, \overleftrightarrow{c_{21}}, \overleftrightarrow{c_{22}}\}$ 构成了 DS^{vag}_{i-v} 的条件属性集,$\{\overleftrightarrow{d_1}, \overleftrightarrow{d_2}\}$ 构成了 DS^{vag}_{i-v} 的决策属性集. 表中 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 分别表示了三种类型的缺失数据.

由定义 10,不难计算出 $\bigcap\limits_{c\in V_C}\overleftrightarrow{c}$ 与 $\overleftrightarrow{d_i}$ 间的 α、β 因子如下所示,其中三种类型的缺失数据 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 可分别代之以 $\langle[0,0],[1,1]\rangle$、$\langle[0,1],[0,0]\rangle$ 和 $\langle[0,0],[0,1]\rangle$,另外 $d_i\in V_d$ 为第 i 个决策属性取值,并记 $\alpha_{\{ij,mn\},k}=\alpha((\overleftrightarrow{c_{ij}}\cap\overleftrightarrow{c_{mn}})\subseteq\overleftrightarrow{d_k})$.

$\alpha_{11,1}=0.200$ $\alpha_{21,1}=0.200$ $\alpha_{\{11,21\},1}=0.200$ $\alpha_{\{12,21\},1}=0.775$

$\beta_{11,1}=0.900$ $\beta_{21,1}=0.275$ $\beta_{\{11,21\},1}=0.275$ $\beta_{\{12,21\},1}=0.225$

$\alpha_{11,2}=0.100$ $\alpha_{21,2}=0.725$ $\alpha_{\{11,21\},2}=0.725$ $\alpha_{\{12,21\},2}=0.775$

$\beta_{11,2}=0.875$ $\beta_{21,2}=0.800$ $\beta_{\{11,21\},2}=0.750$ $\beta_{\{12,21\},2}=0.225$

$\alpha_{12,1}=0.750$ $\alpha_{22,1}=0.200$ $\alpha_{\{11,22\},1}=0.200$ $\alpha_{\{12,22\},1}=0.775$

$\beta_{12,1}=0.875$ $\beta_{22,1}=0.900$ $\beta_{\{11,22\},1}=0.900$ $\beta_{\{12,22\},1}=0.675$

$\alpha_{12,2}=0.175$ $\alpha_{22,2}=0.100$ $\alpha_{\{11,22\},2}=0.100$ $\alpha_{\{12,22\},2}=0.375$

$\beta_{12,2}=0.275$ $\beta_{22,2}=0.800$ $\beta_{\{11,22\},2}=0.800$ $\beta_{\{12,22\},2}=0.250$

从决策系统的物理含义上来看,"可能"程度一般不会小于"确定"程度,所以对于 α 与 β 的取值应加以如下限制:$\beta\geq\alpha$. 假设例中 α、β 的阈值选定为 0.600,于是有如下确定规则:

(1) if $\overleftrightarrow{c_{12}}$ then $\overleftrightarrow{d_1}$; (2) if $\overleftrightarrow{c_{21}}$ then $\overleftrightarrow{d_2}$; (3) if $\overleftrightarrow{c_{11}}\wedge\overleftrightarrow{c_{21}}$ then $\overleftrightarrow{d_2}$. 有可能规则:(1) if $\overleftrightarrow{c_{11}}$ then $(\overleftrightarrow{d_1}\vee\overleftrightarrow{d_2})$; (2) if $\overleftrightarrow{c_{22}}$ then $(\overleftrightarrow{d_1}\vee\overleftrightarrow{d_2})$; (3) if $(\overleftrightarrow{c_{11}}\wedge\overleftrightarrow{c_{22}})$ then $(\overleftrightarrow{d_1}\vee\overleftrightarrow{d_2})$; 当然上面的确定规则也应在可能规则之列.

由表 1 也许已经注意到尽管它们是 Vague 的,但具体到某个属性的取值基本上还是比较"确定"的. 这里之所以选择如此数据,主要是考虑到传统 Rough 集方法不允许数据本身的不确定性或者决策对象在某属性同时取若干不同值的情形[6,11]. 为了验证上述方法的有效性,特采用 Rough 集方法与之对比. 首先,将表 1 化成 Rough 集所能处理的非 Vague 型数

表 1 i - v Vague 决策系统举例

对象	条件属性 C_1		条件属性 C_2		决策属性 d	
	$\overleftrightarrow{c_{11}}$	$\overleftrightarrow{c_{12}}$	$\overleftrightarrow{c_{21}}$	$\overleftrightarrow{c_{22}}$	$\overleftrightarrow{d_1}$	$\overleftrightarrow{d_2}$
x_1	$\langle[0.1,0.1],[0.9,0.9]\rangle$	$\langle[0.8,0.9],[0.0,0.1]\rangle$	ϕ_1	ϕ_2	$\langle[0.8,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.8,0.8]\rangle$
x_2	$\langle[0.5,0.9],[0.0,0.1]\rangle$	ϕ_3	$\langle[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[0.1,0.1],[0.7,0.9]\rangle$	$\langle[0.0,0.2],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.7,0.9],[0.0,0.1]\rangle$
x_3	ϕ_1	$\langle[0.0,0.1],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.5,0.8],[0.0,0.1]\rangle$	$\langle[0.1,0.3],[0.7,0.7]\rangle$	$\langle[0.1,0.3],[0.7,0.7]\rangle$	$\langle[0.8,0.9],[0.0,0.1]\rangle$
x_4	$\langle[0.8,0.9],[0.0,0.1]\rangle$	$\langle[0.0,0.2],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.1,0.3],[0.6,0.7]\rangle$	$\langle[0.8,0.9],[0.0,0.1]\rangle$	$\langle[0.8,0.9],[0.0,0.1]\rangle$	$\langle[0.0,0.1],[0.8,0.9]\rangle$
x_5	$\langle[0.0,0.2],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.7,0.8],[0.0,0.1]\rangle$	$\langle[0.0,0.2],[0.6,0.7]\rangle$	ϕ_2	$\langle[0.8,1.0],[0.0,0.0]\rangle$	$\langle[0.1,0.3],[0.6,0.7]\rangle$
x_6	$\langle[0.7,0.9],[0.0,0.1]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.6,0.8]\rangle$	$\langle[0.0,0.0],[0.8,1.0]\rangle$	$\langle[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.9,0.9],[0.0,0.0]\rangle$

据如表 2 所示.

表 2　表 1 所对应的非 Vague 型决策系统(近似)

对象	C_1	C_2	d	对象	C_1	C_2	d
x_1	c_{12}	?	d_1	x_4	c_{11}	c_{22}	d_1
x_2	c_{11}(?)	c_{21}	d_2	x_5	c_{12}	c_{22}(?)	d_1
x_3	c_{11}(?)	c_{21}	d_2	x_6	c_{11}	c_{22}	d_2

为了适合于 Rough 集计算,将表 2 中的未知数据“?”分别代之以值域中的所有可能取值. 于是, $\underline{\mathfrak{R}}(\overleftrightarrow{d_1}) = \{[x]_{\mathfrak{R}} \subseteq \{\overleftrightarrow{d_1}\} \mid x \in U\} = \{x_1, x_5\}$; $\underline{\mathfrak{R}}\{\overleftrightarrow{d_2}\} = \{x_2, x_3\}$. 进一步进行值约简后可得与上面完全一致的肯定规则. 由 $\overline{\mathfrak{R}}\{\overleftrightarrow{d_1}\} = \{[x]_{\mathfrak{R}} \cap \{\overleftrightarrow{d_1}\} \neq \Phi \mid x \in U\} = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$ 及 $\overline{\mathfrak{R}}\{\overleftrightarrow{d_2}\} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 可以获得可能规则,它们和通过 α、β 因子计算所得到的可能规则也是一致的.

7　结束语

区间值模糊集合和 Vague 集是描述数据不确定性的两种新的有效手段. 本文通过两者的结合给出了 $i-v$ Vague 集的概念,并对其性质作了研究. 通过实例分析,提出了 $i-v$ Vague 集间的包含与相交因子的计算方法,讨论了 $i-v$ Vague 决策系统中的规则提取策略. 最后由传统 Rough 集方法对其正确性作了验证,但本文所提出的方法具有更强和更灵活的不确定数据表达能力.

参考文献:

[1]　Gau, W. L., Buehrer, D. J. Vague sets [J]. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, 23(2): 610 - 614.

[2]　Atanassov, K. T. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87 - 96.

[3]　CHEN Shyi-Ming, TAN Jiann-Mean. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163 - 172.

[4]　CHEN Shyi-Ming. Measures of similarity between vague sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74(2): 217 - 223.

[5]　Dug Hun Hong, Chul Kim. A note on similarity measures between vague sets and between elements [J]. Information Sciences, 1999, 115(1): 83 - 96.

[6]　李凡. 模糊信息处理系统 [M]. 北京:北京大学出版社, 1998: 118 - 132.

[7]　马志锋,邢汉承,郑晓妹. 不完整 Vague 决策表中的近似集学习方法 [J]. 计算机研究与发展, 2000, 37(9): 1050 - 1057.

[8]　马志锋,邢汉承. 加权 Vague 知识约简:基于误判代价的区别矩阵方法 [A]. 第七届中国机器学习学术会议论文集 [C], 南京大学学报, 2000, 36(计算机专辑): 143 - 150.

[9]　Zadeh L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning [J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199 - 249.

[10]　Gorzalczany, M. B. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 21(1): 1 - 17.

[11]　马志锋,邢汉承,郑晓妹. 决策表中规则获取的不确定性研究 [J]. 控制与决策, 2000, 15(6): 703 - 707.

作者简介:

马志锋　1970 年生. 1990 年毕业于上海铁道学院计算机系,获工学学士学位. 1997 年毕业于东南大学自动控制系,获工学硕士学位. 现为东南大学计算机系博士生. 曾发表论文十余篇. 主要研究方向为机器学习,知识获取,Vague 集理论及应用.

邢汉承　东南大学计算机系教授,博士生导师. 中国电子学会资深会员,中国人工智能协会理事,获五项省部级科技奖. 长期从事计算机软件研究工作. 主要研究领域:人工智能,模式识别.

郑晓妹　1995 年毕业于上海铁道学院计算机系,获工学学士学位. 现为南京航空航天大学计算机系硕士研究生. 主要研究方向为人工智能,操作系统.