

基于原子范数最小化的极化敏感阵列 DOA 估计

陈 涛, 李敏行, 郭立民, 申梦雨

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 黑龙江哈尔滨 150001)

摘要: 为了提高极化敏感阵列中压缩感知类波达方向 (Direction Of Arrival, DOA) 估计算法的精度, 避免网格失配问题, 本文使用正交偶极子阵列在原子范数最小化 (Atomic Norm Minimization, ANM) 的理论基础上提出一种无网格波达方向估计算法. 首先, 将一维正交偶极子天线接收到的多快拍信号分解为两个子阵再求和, 然后通过解决半正定规划问题恢复出一个含有入射信源信息的半正定 Toeplitz 矩阵, 继而对该矩阵进行 Vandermonde 分解, 恢复入射信源的 DOA 信息. 同时结合协方差矩阵的向量化结果和最小二乘法计算得到入射信源的极化辅助角和极化相位角信息. 通过仿真实验, 在不同快拍数和信噪比下, 对比子空间类算法和压缩感知类算法, 证明了该算法具有较高的测角精度.

关键词: 波达方向估计; 正交偶极子阵列; 网格失配; 原子范数最小化

基金项目: 国家自然科学基金 (No.62071137)

中图分类号: TN91

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2023)04-0835-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20220429

DOA Estimation of Polarization Sensitive Array Based on Atomic Norm Minimization

CHEN Tao, LI Min-xing, GUO Li-min, SHEN Meng-yu

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: In order to improve the accuracy of the compressed sensing direction of arrival (DOA) estimation algorithm in polarization-sensitive arrays and avoid the off-grid problem, this paper proposes a gridless direction estimation algorithm using orthogonal dipole arrays based on the theory of atomic norm minimization (ANM). First, the multi-snapshot signal received by the one-dimensional-orthogonal dipole antenna is decomposed into two sub-arrays to be then added up. Then, a semi-definite programming problem is solved to recover a semi-definite Toeplitz matrix containing the information of the incident source, followed by a Vandermonde decomposition of this matrix to recover the DOA information of incoming. At the same time, the covariance matrix vectorization results and the least-squares method are combined to calculate the polarization angle and polarization phase information. By comparing the subspace algorithm and the compressed sensing algorithm under different snapshot numbers and signal-to-noise ratios through simulation experiments, it is proved that the algorithm has a high accuracy of angle measurement.

Key words: direction of arrival estimation; orthogonal dipole array; off-grid; atomic norm minimization

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62071137)

1 引言

波达方向 (Direction Of Arrival, DOA) 估计在阵列信号处理中占据了非常重要的地位, 在民用和军事领域的应用已经非常普遍^[1,2], 现有的研究已经涉及雷达、制导、水下探测等多个领域. 另外, 对比传统的标量阵列, 极化敏感阵列出于其优秀的性能, 可以获得更高精度的 DOA 估计结果, 具有更好的分辨能力, 因此基于极

化敏感阵列的 DOA 估计在近年来得到了广泛的关注和研究^[3].

在传统的 DOA 估计算法中, 作为子空间类算法^[4,5] 代表的多重信号分类 (Multiple Signal Classification, MUSIC) 算法以及旋转不变子空间 (Estimating Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT) 算法已经逐渐被应用于极化敏感阵列. 文献^[4] 首先

将 MUSIC 算法引入到了极化域中. 之后文献[6]基于全电磁矢量阵列的子空间的旋转不变特性采用 ESPRIT 算法实现了空域参数和极化域参数的联合估计, 但是子空间类算法普遍存在计算复杂度较高的问题, 且在少快拍相干信号情况下不具有较好的估计效果.

为了解决该问题, 以 ℓ_1 -svd 算法^[7,8]为代表的稀疏重构和压缩感知 (Compressive Sensing, CS) 类算法^[9]也被逐渐应用于极化敏感阵列中. 文献[10]为了实现空域参数和极化参数的联合估计, 提出了一种基于压缩感知的正交偶极子阵列 DOA 估计算法, 该算法将阵元垂直方向和水平方向的极化信息分为两个子阵, 通过两个子阵的自相关矩阵来实现 DOA 估计.

但是压缩感知类算法存在网格失配问题, 即算法需要对空间角度进行离散网格处理, 而如果目标信号的真实入射方向跟离散网格之间出现偏差, 会严重影响算法的性能. 为了解决这种网格失配问题^[11], 无网格 DOA 估计算法得到了众多学者的研究.

原子范数最小化 (Atomic Norm Minimization, ANM) 算法的提出为解决网格失配问题带来了可能性. 基于原子范数最小化的 DOA 估计算法进一步促进了 DOA 估计算法的发展. 该无网格算法不需要在空域内提前设置好离散网格, 不会存在由模型偏差引来的网格失配问题. 文献[12]在线性谱估计中使用远低于传统采样理论的均匀采样值来重构原始信号, 并给出求解 ANM 问题的可行性方法. 文献[13]提出了一种将原子范数最小化理论的根本问题转化为一个等价的半正定规划问题的过程. 在求解出了半正定规划问题的最优解之后, 可通过 Toeplitz 矩阵的 Vandermonde 分解过程恢复出 DOA 估计参数^[14,15]. 但目前这种算法的应用仍然停留于标量阵列, 并没有被引入到极化敏感阵列中. 因此本文在极化敏感阵列模型下, 提出了基于原子范数最小化的无网格 DOA 估计算法.

本算法是一种针对一维正交偶极子阵列的基于原子范数最小化理论的空域和极化域参数的联合估计算法. 首先将阵列接收到的水平和垂直极化方向的多快拍数据矩阵求和, 然后通过求解原子范数模型等效的半正定规划问题, 得到待优化变量的最优解, 最后利用得到的半正定 Toeplitz 矩阵进行 Vandermonde 分解得到空域 DOA 参数, 在此基础上再将两个不同极化指向子阵的协方差矩阵向量化, 结合最小二乘法来确定入射信源的极化域 DOA 参数.

本文所使用的数学符号如下所示:

$[\cdot]^T$ 表示对矩阵进行转置; $[\cdot]^H$ 表示对矩阵进行共轭转置; $\|\cdot\|_F$ 表示求矩阵的 Frobenius 范数; \otimes 表示 Kronecker 积; \odot 表示 Khatri-Rao 积; $\inf\{\cdot\}$ 表示函数的下确

界; $\text{Toep}(\cdot)$ 表示 Toeplitz 矩阵; $\text{tr}[\cdot]$ 表示求矩阵的迹; $E[\cdot]$ 表示数学期望; $\text{vec}(\cdot)$ 表示矩阵的向量化; $\text{mod}(A, B)$ 表示求 A/B 的余数; $\text{imag}(\cdot)$ 表示复数的虚部; $\text{angle}(\cdot)$ 表示复数的幅角.

2 ANM-DOA 估计模型

假设信号为远场窄带完全极化的独立信号, 入射波可视为平面波. 在极化敏感阵列中, 一维正交偶极子阵列的模型如图 1 所示. 该均匀阵列由 Q 个正交偶极子组成, 每个阵元之间间距记为 $d = \lambda/2$, 每个阵元可以接收两个相互正交的极化方向的信息.

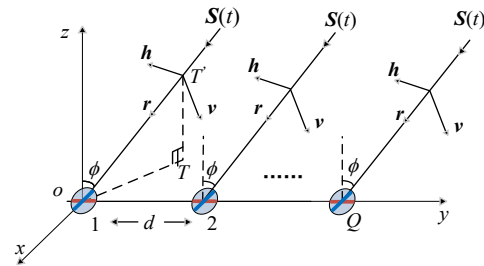


图1 阵列空间结构及电磁波传播示意图

设每个阵元接收到的信号为 M 个在 yo z 平面上的信号, 其电场和磁场始终垂直于波的传播方向 \mathbf{h} , \mathbf{h} 平行于 xoy 平面且垂直于 TOT' 平面, 即电场水平方向矢量, \mathbf{v} 位于 TOT' 平面且与 \mathbf{h} 正交, 即电场垂直方向矢量. 此外, 第 m ($m=1, 2, \dots, M$) 个人射信号的 DOA 参数和极化域参数为 $(\phi_m, \gamma_m, \eta_m)$, $\phi_m \in [-90^\circ, 90^\circ]$ 表示信号的俯仰角, $\gamma_m \in [0^\circ, 90^\circ]$ 表示极化辅助角, $\eta_m \in [0^\circ, 360^\circ)$ 表示极化相位角.

将偶极子极化方向为 x 轴正向的子阵列接收信号设为 $\mathbf{x}_h(t)$, 偶极子极化方向为 y 轴正向的子阵列接收信号设为 $\mathbf{x}_v(t)$, 阵列接收信号模型如式(1)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_h(t) &= \sum_{m=1}^M [\mathbf{a}_u(\phi_m) \otimes \mathbf{a}_{p,1}(\phi_m, \gamma_m, \eta_m)] s_m(t) + \mathbf{n}_h(t) \\ &= \mathbf{A}_h \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_h(t) \\ \mathbf{x}_v(t) &= \sum_{m=1}^M [\mathbf{a}_u(\phi_m) \otimes \mathbf{a}_{p,2}(\phi_m, \gamma_m, \eta_m)] s_m(t) + \mathbf{n}_v(t) \\ &= \mathbf{A}_v \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_v(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, \mathbf{A}_h 和 \mathbf{A}_v 为不同极化指向上的空域-极化域联合导向矢量, $s_m(t)$ 表示第 m 个信号在 t 时刻的取值, $\mathbf{n}_h(t)$ 以及 $\mathbf{n}_v(t)$ 均为在传输过程中产生的高斯白噪声, $\mathbf{a}_u(\phi_m) = (u_{m,1}, \dots, u_{m,q}, \dots, u_{m,Q})^T$ 为空域导向矢量. 将首个阵元设置为参考阵元, 第 q 个阵元的形式为 $u_{m,q} = \exp(-j\pi(q-1)\sin(\phi_m))$. $\mathbf{a}_{p,1}(\phi_m, \gamma_m, \eta_m)$ 以及 $\mathbf{a}_{p,2}(\phi_m, \gamma_m, \eta_m)$ 分别为两个子阵的极化域导向矢量, 其表示形式如式(2)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{p,1}(\phi_m, \gamma_m, \eta_m) &= -\cos(\gamma_m) \\ \mathbf{a}_{p,2}(\phi_m, \gamma_m, \eta_m) &= \cos(\phi_m) \sin(\gamma_m) e^{j\eta_m} \end{aligned} \quad (2)$$

在理想无噪声的单快拍模型下,将式(2)带入到式(1)中,得到极化指向为x轴正向和y轴正向的子阵列接收信号的模型如式(3)和式(4)所示:

$$\mathbf{x}_h(t) = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M -s_m(t) \cos(\gamma_m) \\ \cdots \\ \sum_{m=1}^M -s_m(t) e^{-j\pi(Q-1)\sin(\phi_m)} \cos(\gamma_m) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_v(t) = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M s_m(t) \cos(\phi_m) \sin(\gamma_m) e^{j\eta_m} \\ \cdots \\ \sum_{m=1}^M s_m(t) e^{-j\pi(Q-1)\sin(\phi_m)} \cos(\phi_m) \sin(\gamma_m) e^{j\eta_m} \end{bmatrix} \quad (4)$$

由于偶极子极化方向为单一方向的子阵列接收信号并不能包括所有极化方向上的信源信息,故为了构造联合观测模型,对含有全部极化信息的 $\mathbf{x}_h(t)$ 和 $\mathbf{x}_v(t)$ 之和 $\mathbf{x}(t)$ 进行处理,保证对不同极化方向信号的DOA估计性能,具体形式如式(5)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_v(t) \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M s_m(t) t(\phi_m, \gamma_m, \eta_m) \\ \cdots \\ \sum_{m=1}^M s_m(t) e^{-j\pi(Q-1)\sin(\phi_m)} t(\phi_m, \gamma_m, \eta_m) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $t(\phi, \gamma, \eta) = \cos(\phi) \sin(\gamma) e^{j\eta} - \cos(\gamma)$.

$\mathbf{x}(t)$ 中的第 q 个天线的单快拍接收数据模型可以表示为式(6),下文为了方便证明,将 $s_m(t)$ 表示为 $|s_m(t)| e^{-j\varphi_m}$ 的形式, $|s_m(t)|$ 表示入射信号的模值, $\varphi_m \in [0, 2\pi)$ 表示入射信号的初始相位.

$$\begin{aligned} x_q(t) &= \sum_{m=1}^M |s_m(t)| e^{-j[\pi(q-1)\sin(\phi_m) - \varphi_m]} t(\phi_m, \gamma_m, \eta_m) \\ &= \sum_{m=1}^M |s_m(t)| \mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m) \end{aligned} \quad (6)$$

根据式(6)定义一个原子如式(7)所示:

$$\mathbf{w}(\phi, \varphi, \gamma, \eta) = \begin{bmatrix} e^{j\varphi} t(\phi, \gamma, \eta) \\ \cdots \\ e^{-j[\pi(Q-1)\sin(\phi) - \varphi]} t(\phi, \gamma, \eta) \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

由此定义原子集合如式(8)所示:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{ \mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m) : \\ &\quad \phi_m \in [-90^\circ, 90^\circ], \varphi_m \in [0, 360^\circ), \\ &\quad \gamma_m \in [0^\circ, 90^\circ], \eta_m \in [0^\circ, 360^\circ) \} \end{aligned} \quad (8)$$

给出该原子集合上原子范数的定义,如式(9)所示:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} &= \inf_{\substack{|s_m| \geq 0 \\ \phi_m \in [-90^\circ, 90^\circ], \varphi_m \in [0, 360^\circ) \\ \gamma_m \in [0^\circ, 90^\circ], \eta_m \in [0^\circ, 360^\circ)}} \left\{ \sum_{m=1}^M |s_m| : \right. \\ &\quad \left. \mathbf{x} = \sum_{m=1}^M |s_m| \mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

为了证明式(9)满足范数的定义,首先要证明该原子集合是一个关于原点中心对称的集合,证明过程如式(10)所示:

$$\begin{aligned} -\mathbf{w}(\phi, \varphi, \gamma, \eta) &= \begin{bmatrix} -e^{j\varphi} t(\phi, \gamma, \eta) \\ \cdots \\ -e^{-j[\pi(q-1)\sin(\phi) - \varphi]} t(\phi, \gamma, \eta) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} e^{j(\varphi + \pi)} t(\phi, \gamma, \eta) \\ \cdots \\ e^{-j[\pi(q-1)\sin(\phi) - (\varphi + \pi)]} t(\phi, \gamma, \eta) \end{bmatrix}^T \\ &= \mathbf{w}(\phi, \varphi + \pi, \gamma, \eta) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\varphi + \pi \in [\pi, 3\pi)$. 当 $\varphi + \pi \in [\pi, 2\pi)$ 时,由式(10)可以推得 $-\mathbf{w}(\phi, \varphi, \gamma, \eta) = \mathbf{w}(\phi, \varphi + \pi, \gamma, \eta) \in \mathcal{A}$ 成立;当 $\varphi + \pi \in [2\pi, 3\pi)$ 时,设 $\tilde{\varphi} = \varphi - \pi \in [0, \pi)$,可推得 $-\mathbf{w}(\phi, \tilde{\varphi}, \gamma, \eta) = \mathbf{w}(\phi, \tilde{\varphi} + \pi, \gamma, \eta) \in \mathcal{A}$ 成立,综上可以证明,原子集合 \mathcal{A} 关于原点中心对称.

下面证明该原子集合上的原子范数满足范数的三条性质,即满足非负性、齐次性和三角不等性.式(10)中 $t(\phi, \gamma, \eta)$ 为固定项,不影响以下证明,即可以化入模值和相位中.

证明

(1) $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \geq 0$, 当且仅当 \mathbf{x} 为零向量时等号成立.

通过反证法证明非负性成立.当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时,设 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = 0$. 为了使 $\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M |s_m| \mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m) \neq \mathbf{0}$ 成立,需要使所有的 $|s_m| \geq 0$,且 $\sum_{m=1}^M |s_m| = 0$. 可得 $|s_1| = |s_2| = \cdots = |s_M| = 0$,即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,假设不成立,故 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \neq 0$. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时等号成立.非负性得证.

(2) $\|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$, λ 为一实数.

$\lambda = 0$ 时,齐次性显然成立.

$\lambda \neq 0$ 时,若证明出式(11)成立的同时有式(12)成立,则可推结论成立.

$$\|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \geq \lambda \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \quad (11)$$

$$\|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq \lambda \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \quad (12)$$

设有 $\lambda \mathbf{x} = \sum_{m=1}^M |s_m| \mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m)$ 成立,且有 $\|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \sum_{m=1}^M |s_m|$, $|s_m| \geq 0$, $\mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m) \in \mathcal{A}$. 当 $\lambda > 0$ 时,有 $\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M |s_m| \mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m) / \lambda$ 成立,由范数定义式

可知 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^M |s_m| = \frac{1}{\lambda} \|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$. 当 $\lambda < 0$ 时, 有 $\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M |s_m| [-\mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m)] / (-\lambda)$ 成立. 根据原子集合原点中心对称的性质可知, 原子集合 $-\mathbf{w}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m) \in \mathcal{A}$, 由此可以推出不等式 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^M |s_m| = \frac{1}{\lambda} \|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ 成立, 故可推得式(11)成立.

与此同时, 有 $\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \widetilde{s}_m \widetilde{\mathbf{w}}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m)$ 成立, 且 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \sum_{m=1}^M \widetilde{s}_m$ 成立. 式中 $\widetilde{s}_m \geq 0$, 且原子集合 $\widetilde{\mathbf{w}}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m) \in \mathcal{A}$.

当 $\lambda > 0$ 时, 取 $|s_1| = \lambda |\widetilde{s}_1|, \dots, |s_m| = \lambda |\widetilde{s}_m|$, 有 $\lambda \mathbf{x} = \sum_{m=1}^M |s_m| \widetilde{\mathbf{w}}(\phi_m, \varphi_m, \gamma_m, \eta_m)$ 成立. 根据原子范数定义式, 有 $\|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq \sum_{m=1}^M |s_m| = \lambda \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ 成立. 而当 $\lambda < 0$ 时, 取 $|s_1| = -\lambda |\widetilde{s}_1|, \dots, |s_m| = -\lambda |\widetilde{s}_m|$, 则上述结论仍成立, 故可推得式(12)成立.

由此可推得 $\|\lambda \mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ 成立. 齐次性得证.

$$(3) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{A}}$$

存在所有的 $|s_x| \geq 0$ 与 $\mathbf{w}(\phi_x, \varphi_x, \gamma_x, \eta_x) \in \mathcal{A}$, 使得 $\mathbf{x} = \sum_x |s_x| \mathbf{w}(\phi_x, \varphi_x, \gamma_x, \eta_x)$, 且 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \sum_x |s_x|$ 成立. 同时所有的 $|\widehat{s}_y| \geq 0$ 与 $\widehat{\mathbf{w}}(\phi_y, \varphi_y, \gamma_y, \eta_y) \in \mathcal{A}$, 使得 $\mathbf{y} = \sum_y |\widehat{s}_y| \widehat{\mathbf{w}}(\phi_y, \varphi_y, \gamma_y, \eta_y)$, 且 $\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{A}} = \sum_y |\widehat{s}_y|$ 成立. 故可推得式(13)成立:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \sum_x |s_x| \mathbf{w}(\phi_x, \varphi_x, \gamma_x, \eta_x) + \sum_y |s_y| \mathbf{w}(\phi_y, \varphi_y, \gamma_y, \eta_y) \\ &\leq \sum_x |s_x| + \sum_y |s_y| = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (13)$$

综上所述, 在所设置原子集合关于原点中心对称的情况下, 式(5)定义的在极化模型下的原子范数是一个范数. 证毕

3 算法原理

在多快拍有噪声的情况下, 基于原子范数的 DOA 估计算法的原始数学模型为式(14)所示, 其中, \mathbf{X} 为接收信号数据矩阵,

$$\arg \min_{\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{Q \times L}} \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{A}}, \quad \text{s.t.}, \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|_{\text{F}} \leq \varepsilon \quad (14)$$

可以将式(14)中的原始模型等价式为式(15)所示的半正定规划过程:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^Q, \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{Q \times L}, \mathbf{W} \in \mathbb{C}^{L \times L}} & \frac{1}{2Q} \text{tr}[\text{Toep}(\mathbf{u})] + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{W}), \\ \text{s.t.}, & \begin{pmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^{\text{H}} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \geq 0 \\ & \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|_{\text{F}} \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

其中, L 为快拍数; \mathbf{Y} 是一个经过重构优化后的多快拍数据矩阵; $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ 为噪声容限参数, 该约束项表示了重构信号的精度, 即重构信号和实际信号之间的偏差大小; \mathbf{W} 是由原子范数能量系数构成的矩阵.

通过解上式的半正定规划问题, 得到最优解之后恢复待估计的参数. 本文采用矩阵束算法进行参数恢复. 该算法的原理是利用广义特征值分解, 求解出在计算原子范数的过程中获得的半正定 Toeplitz 矩阵的 Vandermonde 分解结果, 从而得到 DOA 估计结果 $\tilde{\phi}_m$. 同时, Toeplitz 矩阵的低秩、共轭对称等特性也使得得到的 $\tilde{\phi}_m$ 具有唯一性.

通过采用矩阵向量化的方式进行极化参数的恢复, 所使用的协方差矩阵表达形式如式(16)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{z,k} &= \text{E}[\mathbf{x}_z(t) \mathbf{x}_k^{\text{H}}(t)] \\ &= \mathbf{A}_u \mathbf{A}_{p,z} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}_{p,k}^{\text{H}} \mathbf{A}_u^{\text{H}} + \chi_{z,k} \mathbf{I}_M \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $1 \leq z, k \leq 2$. 当 $z = k$ 时, 式(16)表示信号的自相关矩阵; 当 $z \neq k$ 时, 式(16)表示信号之间的协方差矩阵. $\mathbf{A}_u = [\mathbf{a}_u(\phi_1), \mathbf{a}_u(\phi_2), \dots, \mathbf{a}_u(\phi_M)]$ 表示空域导向矢量矩阵, $\mathbf{A}_{p,z}$ 表示不同子阵的极化域导向矢量矩阵, $\mathbf{R}_{ss} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2, \dots, \sigma_M^2)$ 表示入射信号的协方差矩阵, \mathbf{I}_Q 为 Q 维单位矩阵. $\chi_{z,k}$ 由两个子阵分别接收的理想高斯白噪声方构成, 是一个表示噪声能量的函数.

对 $\mathbf{R}_{z,k}$ 进行向量化处理, 如式(17)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{z,k} &= \text{vec}(\mathbf{R}_{z,k}) \\ &= \text{vec}(\mathbf{A}_u \mathbf{A}_{p,z} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}_{p,k}^{\text{H}} \mathbf{A}_u^{\text{H}}) + \chi_{z,k} \mathbf{i}_{Q^2} \\ &= (\mathbf{A}_u^* \odot \mathbf{A}_u) \mathbf{b}_{z,k} + \chi_{z,k} \mathbf{i}_{Q^2} \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\mathbf{i}_{Q^2} = \text{vec}(\mathbf{I}_{Q^2})$, $\mathbf{b}_{z,k}$ 为对角线元素.

记 $\tilde{\mathbf{U}} = (\mathbf{A}_u^* \odot \mathbf{A}_u)$, 而后将该式展开可以得到式 $\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{a}_u^*(\tilde{\phi}_1) \otimes \mathbf{a}_u(\tilde{\phi}_1), \dots, \mathbf{a}_u^*(\tilde{\phi}_M) \otimes \mathbf{a}_u(\tilde{\phi}_M)]$ 成立. 根据上述向量化结果, 再结合最小二乘法可推得 $\tilde{\mathbf{b}}_{z,k} = (\tilde{\mathbf{U}}^{\text{H}} \tilde{\mathbf{U}})^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^{\text{H}} \mathbf{r}_{z,k}$, 极化域参数可根据 $\tilde{\mathbf{b}}_{z,k}$ 恢复, 如式(18)和式(19)所示:

$$\tilde{\gamma}_m = \arctan \left(\frac{(\tilde{b}_{22,m} / \tilde{b}_{11,m})^{\frac{1}{2}}}{\cos(\tilde{\phi}_m)} \right) \quad (18)$$

$$\tilde{\eta}_m = \begin{cases} \text{mod} \left(\frac{\arg(\tilde{b}_{21,m} / \tilde{b}_{12,m})}{2}, \pi \right), & \text{imag}(\tilde{b}_{12,m}) > 0 \\ \text{mod} \left(\frac{\arg(\tilde{b}_{21,m} / \tilde{b}_{12,m})}{2}, \pi \right) + \pi, & \text{imag}(\tilde{b}_{12,m}) \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中, $\tilde{b}_{zk,m}$ 代表 \tilde{b}_{zk} 中的第 m 个元素. 完整的算法流程如算法 1 所示.

算法 1 基于原子范数最小化的极化敏感阵列 DOA 估计

- 输入: 阵列接收到的多快拍信号.
- 输出: 入射信源的 DOA 估计结果 $\tilde{\phi}_m$ 及极化参数估计结果 $\tilde{\gamma}_m$ 和 $\tilde{\eta}_m$.
- 步骤 1 将阵列接收的多快拍信号分为 $\mathbf{x}_h(t)$ 和 $\mathbf{x}_v(t)$;
- 步骤 2 求出含有全部极化域信息的多快拍信号 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_v(t)$;
- 步骤 3 构造式(15)中的半正定规划问题;
- 步骤 4 通过解该半正定规划问题得到最优解 Toeplitz 矩阵 $\text{Toep}(\mathbf{u})$;
- 步骤 5 对 Toeplitz 矩阵进行 Vandermonde 分解, 根据 $\tilde{\phi}_m = \arcsin[\text{angle}(\lambda_m)/\pi]$ 计算入射信源的 DOA 参数;
- 步骤 6 将两个子阵的互相关矩阵和自相关矩阵向量化;
- 步骤 7 结合矩阵向量化和最小二乘法得到 \tilde{b}_{zk} ;
- 步骤 8 根据式(18)和式(19)计算得到极化参数估计结果 $\tilde{\gamma}_m$ 和 $\tilde{\eta}_m$.

4 仿真实验

通过秩亏 MUSIC 算法、 ℓ_1 -svd 算法进行对比试验验证本文算法的估计性能. 对比实验中所使用的阵列排布方式如图 1 所示, 为 7 阵元的正交偶极子阵列, 阵元间距设置为信号的半波长, 所使用秩亏 MUSIC 算法和 ℓ_1 -svd 算法搜索间隔设为 1° .

对比性能指标: 均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE), 计算方式为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{KN} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K (\tilde{\phi}_{k,n} - \phi_k)^2}$$

其中, N 代表进行蒙特卡洛实验的次数, ϕ_k 代表第 k 个待估计信号的入射方向, $\tilde{\phi}_{k,n}$ 代表第 k 个待估计信号在第 n 次实验的 DOA 估计值, 噪声容限均设置为 0.25. 仿真实验所设三个信号均为远场窄带完全极化的独立信号, 信号的俯仰角、极化辅助角和极化相位角给出: $\phi_k \in [-60^\circ, 60^\circ], \gamma_k \in [0^\circ, 90^\circ], \eta_k \in [0^\circ, 360^\circ)$.

首先验证算法的可行性. 设置快拍数为 100, 信噪比分别设为 5 dB 和 10 dB. 其中 5 dB 时真实入射角度为 $[-47.32^\circ -26.06^\circ 53.14^\circ]$, 10 dB 时真实入射角度为 $[-21.64^\circ 24.84^\circ 58.67^\circ]$, 得到了如图 2 和图 3 给出的不同算法在不同信噪比下的 DOA 估计性能结果.

由图 2 和图 3 可以看出, DOA 估计空间谱图的峰值都较为明显, 验证了本文算法的可行性, 且与秩亏 MUSIC 算法都能较好地估计出入射信号的角度. 在信噪比较低的时候, ℓ_1 -svd 算法的空间谱图出现伪峰, 峰值并不明显, 相较之下本文算法估计效果更好一些.

接下来对比极化敏感阵列相较于标量阵列中同样使用原子范数算法的差异. 设置快拍数为 100, 设置信噪比从 5 dB 增加到 30 dB, 步长为 5 dB. 用于与本文阵列对比的标量阵列为由 7 个阵元组成的均匀阵列. 通

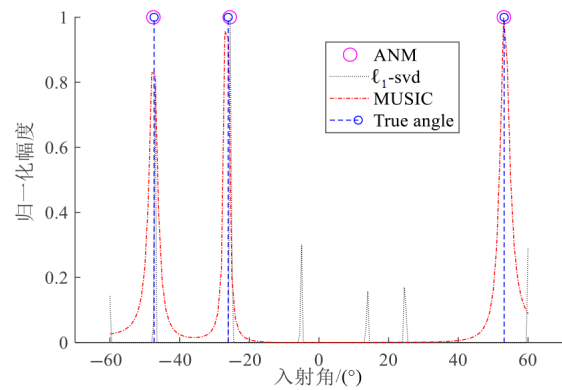


图 2 5 dB 时 DOA 估计空间谱图

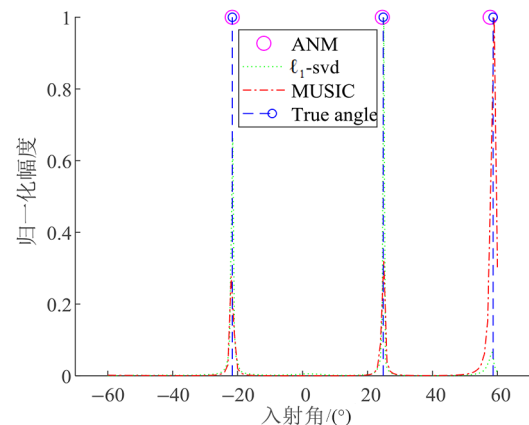


图 3 10 dB 时 DOA 估计空间谱图

过进行 500 次蒙特卡洛实验得到不同算法之间的最小均方误差随信噪比变化产生的影响, 得到的结果如图 4 所示.

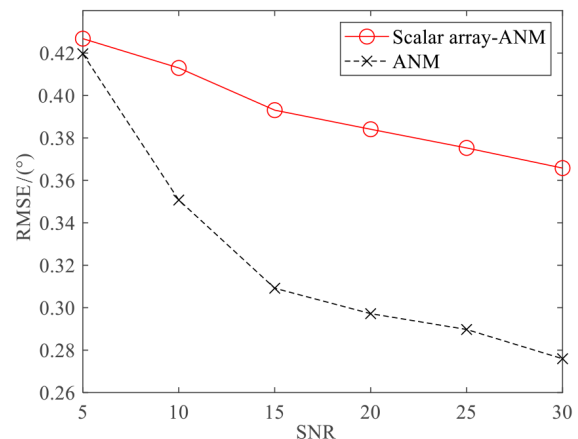


图 4 均方根误差在正交偶极子阵列和标量阵列中随信噪比的变化

通过图 4 可以看出, 相较于标量阵列中的原子范数算法, 由于正交偶极子接收信号中含有极化信息, 相当于在相同的阵元数目下接收到了更多的信号信息, 故具有更好的估计精度.

从信噪比、快拍数和分辨成功率的角度将本文算法与秩亏 MUSIC 算法和 ℓ_1 -svd 算法进行对比。

(1) RMSE 随信噪比的变化

本实验设置快拍数为 500, 设置信噪比从 -5 dB 增加到 30 dB, 步长为 5 dB. 通过进行 500 次蒙特卡洛实验得到不同算法之间的最小均方误差随信噪比变化产生的影响, 得到的结果如图 5 所示。

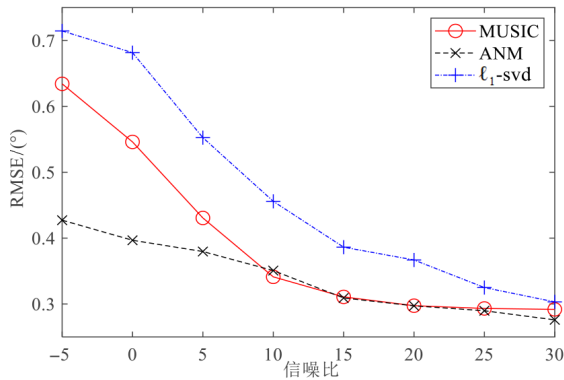


图5 均方根误差随信噪比的变化

根据图 5 的结果, 本文提出的算法在各个信噪比下较 ℓ_1 -svd 算法有更好的估计精度, 相对于秩亏 MUSIC 算法, 避免了计算量大的问题的同时在低信噪比下也有一定的优势。

(2) RMSE 随快拍数的变化

本实验设置信噪比为 10 dB, 设置一组快拍数为 [20 50 100 150 200]. 通过进行 500 次蒙特卡洛实验得到不同算法之间的最小均方误差随快拍数变化产生的影响, 结果如图 6 所示。

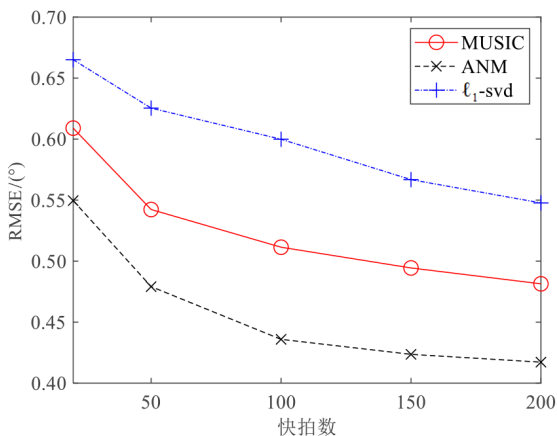


图6 均方根误差随快拍数的变化

根据图 6 的结果, 在少快拍的情况下, ℓ_1 -svd 算法和秩亏 MUSIC 算法的性能不如本文算法, 验证了本文在少快拍的情况下有较高的估计精度。

(3) 不同角度间隔下的分辨成功率比较

在空间内入射两个信号, 入射信源的 DOA 参数设置为 10° 和 $10^\circ + \Delta$, 其中 Δ 从 1° 随步长 1° 均匀增长至 10° . 实验中极化辅助角 γ_k 在 $[0^\circ, 90^\circ]$ 中随机产生, 极化相位差 η_k 在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 中随机产生, 快拍数设为 100, 信噪比设置为 10 dB, 各角度进行 500 次蒙特卡洛实验, 不同算法随入射信源角度差变化的分辨成功率如图 7 所示。

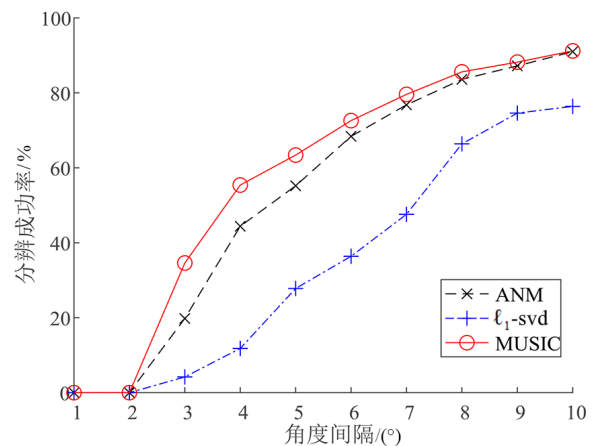


图7 不同算法随入射信源角度差变化的分辨成功率

从图 7 中可以看出各个算法随着 Δ 变大, 分辨成功率均有所提升, 而本文提出算法的成功率要优于 ℓ_1 -svd, 同时在避免了高维谱峰搜索的情况下, 与秩亏 MUSIC 保持相近性能, 有相对较强的信号分辨能力。

(4) 算法复杂度比较

本实验对比分析三种算法的复杂度方面的性能, 解决半正定规划问题中单次迭代的复杂度为 $O(8Q^3)$, $O(Q)$ 是半正定规划中未知数的个数, 所需要的迭代次数为 $o(\log \mu)$, L 为快拍数, P 为压缩感知类算法的网格数目。

为了测试实际运算过程中的效率, 图 8 给出不同信噪比下快拍数设为 100, 各进行 100 次蒙特卡洛实验再取平均值后的算法运行时间。

在解决半正定规划的过程中, 由于待估计参数的恢复过程所耗费的时间占比很少, 所以忽略恢复待估计参数部分的算法复杂度。综上所述, 三种算法的复杂度如表 1 所示。

由复杂度公式可知, 本文算法因为不需要矩阵分解的运算过程, 也不需要受到网格数目的限制, 所以在多快拍的情况下与 ℓ_1 -svd 相比有一定的优势。同时也避免了复杂的谱峰搜索过程, 运算时间相比于秩亏 MUSIC 算法明显缩短。可以看出本文算法在多快拍情况下具有更低的复杂度和更快的运算速度。

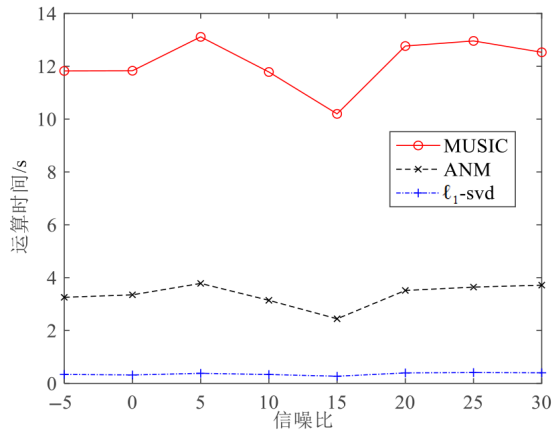


图 8 不同算法在不同信噪比下的运行时间

表 1 算法复杂度

算法	复杂度
ℓ_1 -svd	$O(8Q^3P^3)$
秩亏 MUSIC	$O[4Q^2L + 8Q^3 + 120(4Q^2 - 2QK)]$
ANM	$O(8Q^3L^3 \log \mu)$

5 结论

为了解决极化敏感阵列中压缩感知类 DOA 估计算法中网格失配带来的估计精度下降问题,本文针对正交偶极子天线阵列提出一种无网格估计 DOA 算法. 该算法以原子范数最小化理论作为基础,结合极化敏感阵列,首先将不同极化方向的两个子阵接收到的多快拍矩阵求和,再通过原子范数理论恢复出一个 Toeplitz 矩阵,最后通过矩阵束理论恢复出入射信源的 DOA 参数,并结合协方差矩阵的向量化和最小二乘法恢复出极化域中的 DOA 参数. 仿真实验验证了本文算法相比 ℓ_1 -svd 算法有更好的估计性能,相较于极化 MUSIC 算法在低信噪比时有更好的估计性能,同时相较于标量阵列中的算法也有更低的误差,验证了原子范数最小化算法在极化敏感阵列中的可行性.

参考文献

- [1] WAN L T, LIU K H, LIANG Y C, et al. DOA and polarization estimation for non-circular signals in 3-D millimeter wave polarized massive MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2021, 20(5): 3152-3167.
- [2] 王琦森, 余华, 李杰, 等. 基于稀疏贝叶斯学习的空间紧邻信号 DOA 估计算法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(3): 708-716.
WANG Q S, YU H, LI J, et al. Sparse Bayesian learning based algorithm for DOA estimation of closely spaced signals[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2021, 43(3): 708-716. (in Chinese)
- [3] 李槟槟, 张袁鹏, 陈辉, 等. 分离式长电偶极子稀疏阵列的相干信号多维参数联合估计[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(9): 2695-2702.
LI B B, ZHANG Y P, CHEN H, et al. Coherent sources multidimensional parameters estimation with sparse array of spatially spread long electric-dipoles[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2021, 43(9): 2695-2702. (in Chinese)
- [4] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
- [5] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995.
- [6] LI J. Direction and polarization estimation using arrays with small loops and short dipoles[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1993, 41(3): 379-387.
- [7] 梁国龙, 韩博, 林旺生, 等. 基于稀疏信号重构的近场源定位[J]. 电子学报, 2014, 42(6): 1041-1046.
LIANG G L, HAN B, LIN W S, et al. Near-field sources localization based on sparse signal reconstruction[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(6): 1041-1046. (in Chinese)
- [8] VON GLADIß A, AHLBORG M, KNOPP T, et al. Compressed sensing of the system matrix and sparse reconstruction of the particle concentration in magnetic particle imaging[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(2): 1-4.
- [9] BAIDOO E, HU J, ZENG B, et al. Joint DOD and DOA estimation using tensor reconstruction based sparse representation approach for bistatic MIMO radar with unknown noise effect[J]. Signal Processing, 2021, 182: 107912.
- [10] CHALISE B K, ZHANG Y D, HIMED B. Compressed sensing based joint DOA and polarization angle estimation for sparse arrays with dual-polarized antennas[C]// 2018 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP). Anaheim: IEEE, 2018: 251-255.
- [11] CHI Y, SCHARF L L, PEZESHKI A, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(5): 2182-2195.
- [12] Bhaskar B N, Tang G, Recht B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(23): 5987-5999.
- [13] TANG G G, BHASKAR B N, SHAH P, et al. Compressed sensing off the grid[J]. IEEE Transactions on In-

formation Theory, 2013, 59(11): 7465-7490.

- [14] PAN Y, YAO M, LUO G Q, et al. Underdetermined direction-of-arrival estimation with coprime array via atomic norm minimization[J]. Radio Engineering, 2020, 29(2): 405-413.
- [15] YANG Z, XIE L H, STOICA P. Vandermonde decomposition of multilevel toeplitz matrices with application to multidimensional super-resolution[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(6): 3685-3701.

作者简介



陈涛 男, 1974 年出生, 辽宁省铁岭市人。分别在 1997 年、2001 年和 2004 年于哈尔滨工程大学获得工学学士、硕士以及博士学位。现为哈尔滨工程大学信息与通信工程学院教授。主要研究方向为波达方向估计、宽带信号处理。中国电子学会会员编号: E190014745S。
E-mail: chentao@hrbeu.edu.cn



李敏行 男, 1999 年出生, 辽宁省大连市人。在 2021 年于东北大学获得工学学士学位。现于哈尔滨工程大学攻读工学硕士学位。主要研究方向为阵列信号处理、波达方向估计。
E-mail: liminxing1115@163.com



郭立民(通讯作者) 男, 1977 年出生, 吉林省吉林市人。分别在 2000 年、2005 年、2009 年于哈尔滨工程大学获得工学学士、硕士以及博士学位。现为哈尔滨工程大学信息与通信工程学院副教授。主要研究方向为宽带信号检测、处理与识别。
E-mail: guolimin@hrbeu.edu.cn



申梦雨 女, 1997 年出生, 河南新乡人。2020 年于哈尔滨工程大学获得工学学士学位, 现于哈尔滨工程大学攻读工学硕士学位。主要研究方向为阵列信号处理、波达方向估计。
E-mail: shenmengyu@hrbeu.edu.cn