

# 时空学习驱动的混合重要性高斯滤波

张宏伟

(中山大学航空航天学院, 广州深圳 518107)

**摘要:** 为消减由非线性动态系统与状态约束不一致引起的高斯截断误差和线性化误差, 提出时空学习驱动的混合重要性高斯滤波 (Mixed Importance Gaussian Filtering, MIGF) 算法. 该算法采用软约束和稀疏正则技术表征目标状态真实参数和当前时刻测量之间的时空因果映射, 利用瑞利熵混合历史状态和最新测量构建次优建议分布, 根据因果不变结构融合重要性高斯-埃尔米特积分进行预测和更新, 从而平衡样本数目和滤波精度并自适应地修正 Sigma 点权重, 提升约束动态系统建模的准确性和参数估计的鲁棒性. 实验结果表明, 在综合性非线性标量状态估计中, 相比无迹粒子滤波 (Unscented Particle Filtering, UPF), MIGF 的滤波状态协方差减小 45.37%. 在小型固定翼无人机纯方位跟踪实验中, 相比混合截断无迹卡尔曼滤波 (Mixture Truncated Unscented Kalman Filtering, MTUKF)、交互多模型无迹卡尔曼滤波 (Interacting Multiple-model Unscented Kalman Filtering, IMMUKF) 和多模型 Rao-blackwell 粒子滤波 (Multi-model Rao-Blackwell particle filtering, MMRBPF), MIGF 算法在时空一致约束下优化动态模型结构, 获得更为准确、鲁棒的状态参数估计, 整体运行时间相比 IMMUKF 增加一个数量级, 而相比 MMRBPF 以模型集数目成倍减小.

**关键词:** 高斯截断误差; 线性化误差; 稀疏正则; 时空学习; 时空因果映射; 瑞利熵

**基金项目:** 广东省基础与应用基础研究基金 (No.2019A1515111099); 中山大学青年培育项目 (No.20lgy72). 中国科学院空间精密测量重点实验室开放基金项目 (No.SPMT2021002, No.SPMT2022001)

中图分类号: TN953

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(XXXX)XX-0001-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20230056

## Spatiotemporal Learning Driven Mixture Importance Gaussian Filtering

ZHANG Hong-Wei

(School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen, 518107, China)

**Abstract:** To reduce the Gaussian truncation error and linearization error caused by the inconsistency between the nonlinear dynamic and state constraints, this paper proposes a spatiotemporal learning-driven mixed importance Gaussian filtering (MIGF) algorithm. The algorithm uses soft constraint and sparse regularization technology to represent the spatiotemporal causal mapping between the true parameters of the target state and the current time measurement, uses Rayleigh entropy to mix the historical state and the latest measurement to establish the suboptimal recommendation distribution, and integrates the importance Gauss-Hermite integral to predict and update according to the causal invariant structure, adaptively correcting the Sigma points' weights and balancing the sample size and filtering accuracy to improve the accuracy of constrained dynamic system modeling and the robustness of parameter estimation. Experimental results show that, compared with the unscented particle filtering (UPF), the filtered state covariance decreases by 45.37% for the comprehensive nonlinear scalar state estimation. Furthermore, in the bearings-only tracking experiment for a small fixed-wing UAV, compared with the mixture truncated unscented Kalman filtering (MTUKF), interactive multi-model unscented Kalman filtering (IMMUKF) and multi-model Rao-blackwell particle filtering (MMRBPF), the MIGF algorithm optimizes the dynamic model structure consistent spatiotemporal constraint to obtain more accurate and robust state parameter estimation. However, the overall running time is an order of magnitude higher than that of IMMUKF, while compared with MMRBPF, the reduction factor is the size of the model set.

**Key words:** Gaussian truncation error; linearization error; sparse regularization; spatiotemporal learning; spatiotemporal causal mapping; Rayleigh entropy

**Foundation Item(s):** Guangdong basic and applied fundamental research fund project (No.2019A1515111099).

Open research fund of CAS key laboratory of space precision measurement technology(No.SPMT2021002, SPMT2022001), and Sun Yat-sen University Youth Cultivation Project(No.20lgpy72).

## 1 引言

在经典信号处理和随机控制中,系统状态演化的随机微分方程往往建模为高斯过程,在贝叶斯范式下,通常采用卡尔曼滤波(Kalman Filtering, KF)类方法解决该高斯回归过程中的推理问题<sup>[1]</sup>. 然而,最优KF算法的成功实施依赖于模型结构参数的精确程度. 对于实际工程中复杂的非线性非高斯问题,如纯方位机动目标跟踪,由于测量平台的不稳定性、方位数据的不完备和目标运动的不确定性,造成动态系统和状态约束不一致,严重制约约束动态系统建模的准确性和参数估计的鲁棒性<sup>[2,3]</sup>.

理论上,粒子滤波(Particle Filtering, PF)算法可通过在状态空间中传播随机样本集近似任意分布的状态后验<sup>[4,5]</sup>. 然而,广义PF(Generalized PF, GPF)算法存在维数灾难问题,尤其在测量噪声方差较小的情况下,会发生严重的样本衰减和权值退化的现象<sup>[6]</sup>. 文献[7], [8]和[9]分别采用扩展泰勒级数、无迹变换或高斯积分改善PF的建议分布,推导扩展粒子滤波(Extended PF, EPF)、无迹粒子滤波(Unscented PF, UPF)和高斯积分粒子滤波(Quadrature PF, QPF)算法. 该类算法在提升非线性非高斯估计精度的同时,计算复杂度也随之增加,从而影响PF的并行实现. 另外,多模型滤波器细化目标运动的状态空间,交互多模型扩展卡尔曼滤波(Interacting Multiple Model EKF, IMMEKF)、交互多模型无迹卡尔曼滤波(IMMUKF)<sup>[10,11]</sup>和 Rao-Blackwell 多模型粒子滤波(Rao-Blackwell Multiple Model PF, MMRBPF)<sup>[12]</sup>等已广泛应用于参数已知的目标跟踪场景. 本文作者<sup>[13]</sup>提出多模态重要性UKF算法,利用对极几何约束信息提升动力学模型与目标机动运动的适配程度,成功应用于多站光电经纬仪跟踪系统. 总之,在非线性非参数估计问题中,如何保持动态系统的时空约束一致是优化动态模型结构和平衡计算复杂度的关键<sup>[14,15]</sup>.

最近,高斯过程(Gaussian Process, GP)时空学习算法在目标跟踪领域取得了无模型滤波和鲁棒性的权衡. 在这类非参数模型中,学习是指基于测量信息计算目标状态后验的概率分布,从而估计状态的均值和协方差参数<sup>[1]</sup>. 文献[16]提出非递归高斯过程运动跟踪器,通过最大似然(Maximum Likelihood, ML)方法学习目标轨迹参数,可求解高阶位置导数实现目标速度的离线估计. 文献[17]提出递归高斯过程运动跟踪器,减少学习过程的计算时间,提高实时跟踪能力. 文献[18]推导数学等式/不等式表征动态系统和外部测量之间的物理约束先验. 对于等式约束,可通过增广测量方程、

最小二乘和插值投影等计算方法简化并计算系统模型参数<sup>[19]</sup>. 文献[20]提出牛顿内点法和集合激活等二次规划方法解决不等式约束问题. 概率密度函数截断法在不等式约束边界处截断概率密度函数,将其近似为与原始状态具有相同矩的高斯分布<sup>[21]</sup>. 文献[22]推导混合截断无迹卡尔曼滤波(Mixture Truncated UKF, MTUKF)算法,平滑纯方位机动目标跟踪系统中多域似然引起的测量野值.

目前,公开发表的数据驱动时空学习算法大多为高斯/混合高斯模型,非线性动态系统与状态约束不一致引起高斯截断误差和线性化高阶截断误差<sup>[3,6,23]</sup>. 为消减纯方位跟踪系统中的这两类误差,本文利用软约束和稀疏正则技术表征目标真实状态和最新测量之间的时空因果映射集合,利用瑞利熵因子混合历史状态和最新测量构建次优建议分布,同时融合重要性高斯-埃尔米特积分框架进行预测更新,因此命名为时空学习驱动的混合重要性高斯滤波(Mixture Importance Gaussian Filtering, MIGF)算法,蒙特卡罗中心极限定理和因果不变结构保证了MIGF收敛,旨在提升约束动态系统建模的准确性和参数估计的鲁棒性.

## 2 问题描述

### 2.1 随机动态系统时空因果映射模型

在笛卡尔坐标系下,记 $d_x$ 维状态变量为 $\mathbf{X}_k = (\chi_k^T, \dot{\chi}_k^T)^T \in \mathbb{R}^{d_x}$ ,其中上标T和下标 $k \in \mathbb{N}$ 分别表示转置和离散时刻, $\chi_k = (x_k, z_k, z_k)^T \in \mathbb{R}^{d_x}$ 和 $\dot{\chi}_k = (\dot{x}_k, \dot{z}_k, \dot{z}_k)^T \in \mathbb{R}^{d_x}$ 分别为目标状态的位置标量和速度矢量, $d_x = d_x + d_{\dot{x}}$ . 记 $d_z$ 维测量矢量为 $\mathbf{Z}_k \in \mathbb{R}^{d_z}$ ,考虑实际环境的随机干扰等因素,动态系统测量模型为

$$\mathbf{Z}_k = h_k(\mathbf{X}_k) + e_k \quad (1)$$

式中, $h_k(\cdot)$ 是非线性向量函数, $e_k$ 是测量噪声,概率密度函数 $p_e(e_k)$ 为任意分布<sup>[22]</sup>.

在目标状态演化过程中,测量模型难以精确建立且包含随机干扰,因此动态系统的真实状态参数和测量之间的因果映射关系为隐式且含有不确定噪声<sup>[24]</sup>. 在估计目标状态后验分布的过程中,本文修正文献[21,22]论述的两个相关假设:1)式(1)中非线性测量方程 $h_k(\cdot)$ 双射、连续,且只与目标状态标量 $X_k$ 有关,从而等式 $\mathbf{Z}_k = h_k(X_k)$ 中包含目标状态真值 $\tilde{X}_k(\mathbf{Z}_k)$ . 2)测量噪声概率密度函数 $p_e(e_k)$ 为连通、有界,记可行域为 $\mathbf{R}_{e_k}$ ,若 $\mathbf{R}_{e_k}$ 的模 $|\mathbf{R}_{e_k}|$ 足够小,则似然集合 $\mathbf{I}_{X_k}(\mathbf{Z}_k) = \{X_k:$

$\mathbf{Z}_k - h_k(\mathbf{X}_k) \in \mathbb{R}_{e_k}$  包含  $\tilde{\mathbf{X}}_k(\mathbf{Z}_k)$ . 进一步,从拓扑意义出发,定义非线性动态系统的时空因果映射集合为

$$I_{X_k}(\mathbf{Z}_k) = \left\{ \mathbf{X}_k \mid \mathbf{X}_k = \left[ \left( h_k^{-1}(\mathbf{Z}_k - \mathbf{e}_k) \right)^\top, \dot{\mathbf{X}}_k^\top \right]^\top \right\} \\ = I_{X_k}(\mathbf{Z}_k) \times \mathbb{R}^{d_x} \quad (2)$$

$$\text{s.t. } p_e(\mathbf{e}_k) = 0, \text{ if } \mathbf{e}_k \notin \mathbb{R}_{e_k} \subset \mathbb{R}^{d_z}$$

式中,  $h_k^{-1}$  是  $h_k(\mathbf{X}_k)$  的反函数,符号  $\times$  表示两个集合的笛卡尔乘积.

## 2.2 纯方位目标跟踪系统模型

方位测量具有非接触、隐蔽安全的优势,然而由于缺失目标距离信息,通常需采用单站动态或多站静态平台定位目标位置. 假设  $J$  个静态平台测角  $B_k = \{(A_{1,k}, E_{1,k}), \dots, (A_{J,k}, E_{J,k})\}$ , 其中  $(A_{j,k}, E_{j,k})$  分别是第  $j$  个传感器测得的方位角和俯仰角. 纯方位测量系统模型为

$$\begin{bmatrix} A_{j,k} \\ E_{j,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{y_k - y_{j,s}}{x_k - x_{j,s}}\right) \\ \arctan\left(\frac{z_k - z_{j,s}}{\sqrt{(x_k - x_{j,s})^2 + (y_k - y_{j,s})^2}}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{A,k} \\ e_{E,k} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中,等式右边第一项记为测量矩阵  $\mathbf{H}_{B,k}(\mathbf{x}_{j,s}, y_{j,s}, z_{j,s})$  是第  $j$  个测角传感器的位置,  $e_{A,k}$  和  $e_{E,k}$  分别是方位角和俯仰角测量噪声.

4.2节图4描述交会测量方法定位空间点目标位置

$$p(\mathbf{X}_{0:k} \mid \mathbf{Z}_{1:k}, \mathbf{a}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{Z}_k - h_k(\mathbf{X}_k)) g_{I_{X_k}(\mathbf{Z}_k)}(\mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1}, \mathbf{a}_{1:k}) p(\mathbf{X}_{1:k-1} \mid \mathbf{Z}_{1:k-1}, \mathbf{a}_{1:k-1})}{p(\mathbf{Z}_k, \mathbf{a}_k \mid \mathbf{Z}_{1:k-1}, \mathbf{a}_{1:k-1})} \\ \propto p(\mathbf{Z}_k \mid \mathbf{X}_k, \mathbf{a}_k) p_1(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{a}_{1:k}) p(\mathbf{X}_{1:k-1} \mid \mathbf{Z}_{1:k-1}, \mathbf{a}_{1:k-1}) \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{a}_k$  是目标特征变量集合,  $p(\mathbf{Z}_k - h_k(\mathbf{X}_k))$  是测量似然,  $p(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1}, \mathbf{a}_{1:k})$  是系统状态的先验分布, 分母  $p(\mathbf{Z}_k, \mathbf{a}_k \mid \mathbf{Z}_{1:k-1}, \mathbf{a}_{1:k-1})$  是积分常数.  $g_{I_{X_k}(\mathbf{Z}_k)}$  是子集合  $I_{X_k}(\mathbf{Z}_k)$  的指示函数, 当  $\mathbf{Z}_k \in I_{X_k}(\mathbf{Z}_k)$  时,  $g_{I_{X_k}(\mathbf{Z}_k)} = 1$ , 反之则为 0. 由此可得, 在时空因果映射约束下, 动态系统的截断先验概率密度函数  $p_1(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_k, \mathbf{a}_{1:k})$  为

$$p_1(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_k, \mathbf{a}_{1:k}) \\ = p(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1}, \mathbf{a}_{1:k}) g_{I_{X_k}(\mathbf{Z}_k)}(\mathbf{X}_k) / \varsigma_1 \quad (7)$$

式中,  $\varsigma_1$  为常数. 直观上, 求解式(7)需要设置截断阈值  $\varsigma_1$  或确定因果映射集合  $I_{X_k}(\mathbf{Z}_k)$ . 为消减高斯截断误差和线性化高阶截断误差, MIGF 算法在时空因果约束下融合重要性积分框架, 重构因果不变的预测更新方程.

的几何解释, 在实际工程中, 仅当交会角在  $[30^\circ, 150^\circ]$  区间, 交会解算结果较为可靠. 考虑测量平台不稳定以及目标机动行为先验未知, 纯方位机动目标跟踪系统和状态约束之间为部分兼容. 为使  $B_k = \mathbf{H}_{B,k}(\mathbf{X}_k)$  满足 2.1 节中时空因果映射集合的假设条件, 提出算法通过稀疏结构正则跟踪有效测量信息并约束目标状态, 混合历史状态和最新测量构建次优建议分布, 通过传播高似然重要性样本取代高斯-埃尔米特积分框架中的线性化运算. 因而, 本文选用文献[2]中的近似匀速直线运动模型描述目标运动过程

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{v}_k$  是过程噪声,  $N(\mu, \mathbf{P})$  表示均值和方差分别为  $\mu$  和  $\mathbf{P}$  的高斯分布. 状态转移矩阵  $\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k)$  和过程噪声方差矩阵  $\mathbf{Q}_k$  分别为

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & T_k \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \frac{T_k^3}{3} \bar{\mathbf{Q}} & \frac{T_k^3}{2} \bar{\mathbf{Q}} \\ \frac{T_k^3}{2} \bar{\mathbf{Q}} & T_k \bar{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  和  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  分别是  $3 \times 3$  单位矩阵和零矩阵.  $T_k = t_k - t_{k-1}$  是测量采样时间间隔,  $t_k$  和  $t_{k-1}$  分别是第  $k$  和第  $k-1$  时刻的测量时间.  $\bar{\mathbf{Q}} = \text{diag}(q_x, q_y, q_z)$ , 其中  $q_x, q_y$  和  $q_z$  是过程噪声在三维坐标轴上的谱密度.

请注意, 即使设定初始先验为高斯均匀分布, 随着时间推移, 状态过程噪声将演化为非高斯<sup>[25]</sup>. 根据贝叶斯全概率公式, 结合公式(2), 将动态系统目标状态后验概率密度分布  $p(\mathbf{X}_{0:k} \mid \mathbf{Z}_{1:k}, \mathbf{a}_{1:k})$  近似为

最后, 理论分析收敛误差和计算复杂度, 通过两个实验场景验证 MIGF 算法的跟踪滤波性能.

## 3 混合重要性高斯滤波算法的实现

### 3.1 稀疏结构正则

考虑测量平台不稳定及方位传输的非线性非连续造成的数据不完备, 呼应 2.1 节中时空因果映射集合中的有效测量, 本小节采用稀疏正则  $\ell_{2,1}$  范数维持测量信息的结构不变性, 构建目标函数为

$$\arg \min_{\mathbf{Z}_k, \mathbf{e}_k} \left\{ \left( \mathbf{Z}_k - \mathbf{H}(\mathbf{X}_k) \right)^\top \mathbf{R}_k^{-1} \left( \mathbf{Z}_k - \mathbf{H}(\mathbf{X}_k) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\text{s.t. } p_e(\mathbf{e}_k) = 0, \text{ if } \mathbf{e}_k \notin \mathbb{R}_{e_k} \subset \mathbb{R}^{d_z}$$

式中,  $\mathbf{R}_k$  是测量新息协方差.

进一步, 为了抑制目标突然机动引起的跟踪性能

下降,可采用 $\ell_1$ 范数约束状态标量,取该约束变量的自然对数作为式(8)的惩罚项,从而将(8)修正为无约束的增广目标函数

$$\arg \min_{X_k, e_k, v_k} \left[ \sum_{j=1}^J \|B_k - \mathbf{H}_{j,k}(X_k)\|_{2,1} - r_k \ln |X_k| \right] \quad (9)$$

式中, $\|\cdot\|_{2,1}$ 是公式(8)中定义的 $\ell_{2,1}$ 范数运算, $r_k \in (0,1]$ 是常数比例因子.

在可行域 $R_{e_k}$ ,由最小二乘法定位目标初始位置 $X_{LS}$ ,采用牛顿内点法求解中心位置的均值 $\bar{X}_k$ 和协方差 $\mathbf{P}_{X,k}$

$$\begin{aligned} \bar{X}_k &= X_{LS} - \mu_k \left( (\nabla J)^{-1} \Big|_{X_{LS}} \right), \\ \mathbf{P}_{X,k} &= \tilde{\mathbf{H}}_k^{-1} \mathbf{R}_k (\tilde{\mathbf{H}}_k^{-1})^T \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $\nabla J$ 是代价函数(9)在 $X_{LS}$ 处的梯度, $\tilde{\mathbf{H}}_k$ 是测量矩阵的逆.本小节通过目标特性集合 $\mathbf{a}_k$ 确定步长 $\mu_k$

$$\mu_k = \left( T_k^2 \cdot V_k^2 \cdot \mathbf{R}_k^2 \right) / \left( \lambda \cdot \sigma_{e,k}^2 + T_k^2 \cdot V_k^2 \cdot \mathbf{R}_k^2 \right) \quad (11)$$

式中, $\lambda$ 是常数, $V_k$ 是目标速度矢量, $\sigma_{e,k}^2$ 是测量噪声方差.

至此,截断先验 $p_1(\cdot)$ 的均值和协方差为

$$\bar{\mathbf{X}}_k = \begin{bmatrix} \bar{X}_k \\ \bar{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{X,k} & \mathbf{P}_{XX,k} \\ \mathbf{P}_{XX,k}^T & \mathbf{P}_{X,k} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \omega_k^i &\propto \frac{p(\mathbf{X}_{0:k} | \mathbf{Z}_{1:k}, \mathbf{a}_{1:k})}{\pi(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{0:k-1}, \mathbf{Z}_{1:k}, \mathbf{a}_{1:k})} \propto \omega_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k) p_1(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{a}_{1:k})}{\alpha_k p_1(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{a}_{1:k}) + (1 - \alpha_k) p_0(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1})} \\ \tilde{\omega}_k^i &= \omega_k^i / \sum_{i=1}^N \omega_k^i \end{aligned} \quad (15)$$

式中,权重因子 $\alpha_k \in [0,1]$ 通过埃尔米特矩阵的瑞利熵(Rayleigh entropy)计算

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \left( p_1 \| p_0 \right) = -\frac{1}{2(\lambda-1)} \log \frac{|\mathbf{P}_1|^{\lambda} |\mathbf{P}_0|^{1-\lambda} (\mu_1)}{\lambda \mathbf{P}_1 + (1-\lambda) \mathbf{P}_0} \quad (16) \\ &+ \frac{\lambda}{2} (\mu_1 - \mu_0)^T (\lambda \mathbf{P}_1 + (1-\lambda) \mathbf{P}_0)^{-1} (\mu_1 - \mu_0) \end{aligned}$$

式中, $\lambda \in (0,1)$ 是瑞利熵参数.请注意,至此,无须再计算式(7)中的常数因子 $\varsigma_1$ .若当前时刻测量包含信息更为准确,则 $\alpha_k$ 更接近于1.

传递重要性Sigma点,修正均值 $\bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}^l$ 和方差 $\mathbf{P}_{k+1|k}^l$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1|k}^{l,i} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k^{l,i}), \\ \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}^l &= \sum_{i=1}^{n_l} \tilde{\omega}_k^i \mathbf{X}_{k+1|k}^{l,i}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^l = \sum_{i=1}^{n_l} \tilde{\omega}_k^i \left[ \mathbf{X}_{k+1|k}^{l,i} - \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}^l \right] \left[ \mathbf{X}_{k+1|k}^{l,i} - \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}^l \right]^T$$

计算状态预测均值 $\bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k+1|k}$

$$\sum_{l=1}^{n_q} \omega_l \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}^l, \quad \mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{Q}_k + \sum_{l=1}^{n_q} \omega_l \mathbf{P}_{k+1|k}^l \quad (18)$$

## 2) 测量更新

根据状态预测选取新的重要性Sigma点组合,即

式中, $\bar{\mathbf{X}}_k, \mathbf{P}_{XX,k}, \mathbf{P}_{X,k}$ 的详细推导见文献[22].

## 3.2 时空因果不变混合结构

本小节基于3.1节的稀疏结构正则测量,推导时空学习驱动的MIGF算法,这里的混合包含两层含义:在时空因果映射约束条件下,混合多域似然构建次优建议分布以及融合重要性高斯-埃尔米特积分框架.

### 1) 时间预测

根据高斯-埃尔米特理论<sup>[26]</sup>,得到三坐标轴上单位Sigma点及其权值集合 $\{\xi_l, \omega_l\}_{l=1}^{n_q}$ ,该集合的笛卡尔积生成 $d_X$ 维单位正交Sigma点及其权值

$$\xi_l = \xi_{l,x} \times \xi_{l,y} \times \cdots \times \xi_{l,z}, \quad \omega_l = \omega_{l,x} \times \omega_{l,y} \times \cdots \times \omega_{l,z} \quad (13)$$

MIGF算法对修正先验 $p_1(\cdot)$ 的协方差进行Cholesky分解, $\mathbf{P}_k = \left( \sqrt{\mathbf{P}_k} \right)^T \sqrt{\mathbf{P}_k}$ ,生成正交Sigma点 $\mathbf{X}_k^l = \left( \sqrt{\mathbf{P}_k} \right)^T \xi_l + \bar{\mathbf{X}}_{k|k}$ ,从 $\mathbf{X}_k^l$ 采样 $n_l$ 个重要性样本,即

$\{\mathbf{X}_k^{l,i}\}_{i=1}^{n_l} \sim \mathbf{X}_k^l$ .记初始先验分布为 $p_0(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1})$ ,同时将当前时刻测量和历史数据融入建议分布

$\pi(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{0:k-1}, \mathbf{Z}_{1:k}, \mathbf{a}_{1:k})$ ,计算重要性权值 $\omega_k^i$ 及归一化权值 $\tilde{\omega}_k^i$

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k) p_1(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{a}_{1:k}) / \left[ \alpha_k p_1(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{a}_{1:k}) + (1 - \alpha_k) p_0(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1}) \right] \quad (14)$$

$$\mathbf{X}_{k+1|k}^l = \left( \sqrt{\mathbf{P}_{X,k|k+1}} \right)^T \xi_l + \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}, \quad (19)$$

$$\{\mathbf{X}_{k+1|k}^{l,i}\}_{i=1}^{n_l} \sim N(\mathbf{X}_{k+1|k}^l, \mathbf{P}_{X,k|k+1})$$

引入最新测量,计算测量预测均值 $\bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k}^l$ 和协方差 $\mathbf{P}_{ZZ,k+1}^l$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k+1|k}^{l,i} &= \mathbf{H}_k(\mathbf{X}_{k+1|k}^{l,i}), \\ \bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k}^l &= \sum_{i=1}^{n_l} \tilde{\omega}_{k+1}^i \mathbf{Z}_{k+1|k}^{l,i}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{ZZ,k+1}^l = \sum_{i=1}^{n_l} \tilde{\omega}_{k+1}^i \left[ \mathbf{Z}_{k+1|k}^{l,i} - \bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k}^l \right] \left[ \mathbf{Z}_{k+1|k}^{l,i} - \bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k}^l \right]^T$$

式中, $\tilde{\omega}_{k+1}^i$ 由公式(15)计算.

计算测量均值 $\bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k}$ 、协方差 $\mathbf{P}_{ZZ,k+1}$ 和互协方差 $\mathbf{P}_{XZ,k+1}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k} &= \sum_{l=1}^{n_q} \omega_l \bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k}^l, \\ \mathbf{P}_{ZZ,k+1} &= \mathbf{R}_k + \sum_{l=1}^{n_q} \omega_l \mathbf{P}_{ZZ,k+1}^l, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{XZ,k+1} = \sum_{l=1}^{n_q} \omega_l \left[ \mathbf{X}_{k+1|k}^l - \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k} \right] \left[ \mathbf{Z}_{k+1|k}^l - \bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k} \right]^T$$

计算滤波增益 $\mathbf{G}_{k+1}$ 为

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{P}_{XZ,k+1} \mathbf{P}_{ZZ,k+1}^{-1} \quad (22)$$

输出滤波均值 $\bar{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$

$$\bar{X}_{k+1|k+1} = \bar{X}_{k+1|k} + G_{k+1}(\mathbf{Z}_{k+1} - \bar{\mathbf{Z}}_{k+1|k}), \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}\mathbf{Z},k+1|k+1} \mathbf{G}_{k+1}^T$$

### 3.3 收敛及计算复杂度分析

蒙特卡罗逼近的收敛性可由中心极限定理保证<sup>[8]</sup>, 其误差项具有维数不变性<sup>[24]</sup>. 在式(2)定义的时空因果映射约束下, MIGF算法通过稀疏正则约束维持时空因

$$E \left[ \left( \sum_l \omega_l \sum_{i=1}^{n_i} w_k^i \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}^i) - \int \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}) p(\mathbf{X}_{0:k} | \mathbf{X}_{1:k}, \mathbf{Z}_{1:k}, \mathbf{a}_{1:k}) d(\mathbf{X}_{0:k}) \right)^2 \right] \\ \propto \left| \int \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}^i) \sum_l \omega_l \sum_{i=1}^{n_i} w_k^i \delta(\mathbf{X}_{0:k}^i - \bar{\mathbf{X}}_{k|k}) d(\mathbf{X}_{0:k}^i) - \int_{\mathbb{R}_{x_k}} \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}^i) \pi(\mathbf{X}_{0:k} | \mathbf{X}_{0:k-1}, \mathbf{Z}_{1:k}, \mathbf{a}_{1:k}) d(\mathbf{X}_{0:k}^i) \right| \\ \leq C_k \frac{1}{n_i n_q} \sum_l \omega_l \sum_{i=1}^{n_i} w_k^i \|\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}^i)\| \quad (24)$$

果不变结构<sup>[27]</sup>, 测量似然 $p(\mathbf{Z}_{1:k} | \mathbf{X}_{0:k}, \mathbf{a}_{1:k})$ 在可行域 $R_{e_k}$ 内有界, 在重要性高斯-埃尔米特积分框架下, 采用Frobenius范数表示传播重要性积分点的上界, 即 $\|\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}^i)\|_{Fro} = \sup_{\mathbf{X}_{0:k}^i \in I_{x_i}(\mathbf{Z}_k)} |\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}^i)|$ . 因而, 数值近似目标状态后验的数学期望方差为

式中,  $C_k$ 是常数. 所以MIGF算法收敛速度与状态维度无关, 状态更新误差项为 $\mathcal{O}((n_q n_i)^{-1/2})$ .

在非参数状态估计过程中, 时间计算和空间存储的复杂度为点目标数量 $n_x$ 和测量数量 $n_z$ 的三次方, 即 $\mathcal{O}(n_x^3 n_z^3)$ <sup>[28]</sup>. 对于特定的核函数, 文献[1]将高斯过程回归转换为KF状态估计问题, 计算复杂度为 $\mathcal{O}(n_x)$ , 到目前为止, 这种方法仅适用于一维输入. MIGF在时空学习驱动下, 重构具有因果不变性的重要性积分方程进行预测更新, 从而平衡样本数目和滤波精度并自适应地修正正交Sigma点权重, 提高非线性动态系统建模的鲁棒性, 将高精度的高斯-埃尔米特积分推广应用到非高斯估计场景, 计算复杂度为 $\mathcal{O}(n_q n_i n_x)$ .

果不变结构<sup>[27]</sup>, 测量似然 $p(\mathbf{Z}_{1:k} | \mathbf{X}_{0:k}, \mathbf{a}_{1:k})$ 在可行域 $R_{e_k}$ 内有界, 在重要性高斯-埃尔米特积分框架下, 采用Frobenius范数表示传播重要性积分点的上界, 即 $\|\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}^i)\|_{Fro} = \sup_{\mathbf{X}_{0:k}^i \in I_{x_i}(\mathbf{Z}_k)} |\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_{0:k}^i)|$ . 因而, 数值近似目标状态后验的数学期望方差为

## 4 实验结果与分析

### 4.1 综合性非线性标量状态估计

本小节选用文献[8]中的综合性标量状态估计案例比较MIGF算法的滤波性能, 系统状态模型为

$$x_{k+1} = 1 + \sin(\omega\pi t) + \phi_1 x_k + v_k$$

式中, 系数为已知常数,  $\omega = 4e^{-2}$ ,  $\phi_1 = 0.5$ , 过程噪声 $v_k$ 为伽马 $Ga(3, 2)$ 随机变量. 非平稳测量模型为

$$z_k = \begin{cases} \phi_2 x_k^2 + e_k & k \leq 30 \\ \phi_3 x_k - 2 + e_k & k > 30 \end{cases}$$

式中,  $\phi_2 = 0.2$ ,  $\phi_3 = 0.5$ . 将文献[8]中高斯测量噪声加上散粒噪声<sup>[29]</sup>, 即 $e_k = N(0, 0.00001) + \text{Shot noise}$ .

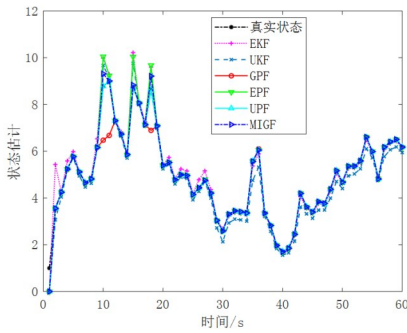


图1 真实状态和滤波状态分布

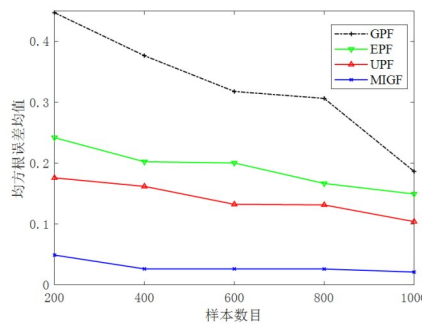


图2 不同样本数目下滤波均方根误差均值

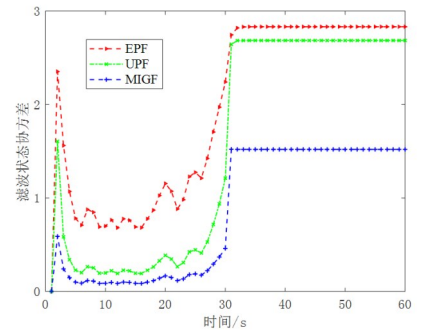


图3 样本为400时滤波状态协方差

图1是状态真值和EKF, UKF, GPF, EPF, UPF, MIGF 6种算法的滤波状态值, 滤波结果与真实状态分布的贴切度排序为EKF, UKF, GPF, EPF, UPF和MIGF, 相比于EKF和UKF算法, 重要性采样方法显示出处理非线性非高斯噪声问题的优势. 设置样本数目为200, 400, 600, 800和1000, 图2是GPF, EPF, UPF和MIGF 4种算法滤波均方根误差的均值, MIGF滤波误差最小且平稳, 这主要是因为MIGF方法根据瑞利熵平滑因子权

衡最新测量和历时状态的即时修正和反馈补偿作用, 据此构建的混合重要性函数更贴近多峰似然后验分布, 从而提升重要性样本的多样性和准确性, 有效平衡样本数目和滤波精度. 设置样本数目为400, 图3是EPF, UPF和MIGF 3种算法的滤波状态协方差, MIGF的滤波协方差的统计均值相比UPF减小了45.37%, 这表明MIFG系统模型的状态过程噪声和测量噪声之间耦合较小, 主要是因为MIGF传播重要性样本取代高斯

积分线性化运算,从而自适应地修正正交 Sigma 点权重,从根本上增强了非线性非高斯动态系统状态预测的准确性和测量更新的容错性.

表 1 统计运行时间 单位:s

算法	EKF	UKF	GPF	EPF	UPF	MIGF
运行时间	3.099 3e-05	7.668 2e-05	0.004 9	0.007 5	0.016 1	0.079 3

表 1 统计了 6 种算法的运行时间, GPF 运行时间相比 KF 类非线性算法增加一个数量级, 而 EPF 运行时间是 GPF 的 1.53 倍. UPF 通过无迹变换近似状态后验, 使得运行时间相较 EPF 增加了一个数量级, 而因为迭代

优化步骤, MIGF 运行时间是 UPF 的 4.93 倍. 这些定量统计分析与 3.3 节推导的计算复杂度一致.

#### 4.2 小型固定翼无人机纯方位跟踪

本小节跟踪对象为一小型电驱动固定翼无人机, 由厘米精度实时动态定位 (Real-time kinematic, RTK) 测量提供航迹真值, 航迹包含滑行、爬升、巡航阶段. 双站静态测角传感器分别布站在 (100 m, 0 m, 0 m)、(-300 m, 0 m, 0 m) 处, 采用交会测量方法定位点目标位置, 如图 4 所示. 选择文献 [13] 中的模型集合及切换概率矩阵, 比较 IMMUKF<sup>[10]</sup>, IMMUKF<sup>[11]</sup>, MMRBPF<sup>[12]</sup>, MTUKF<sup>[22]</sup> 和 MIGF 算法的跟踪滤波性能.

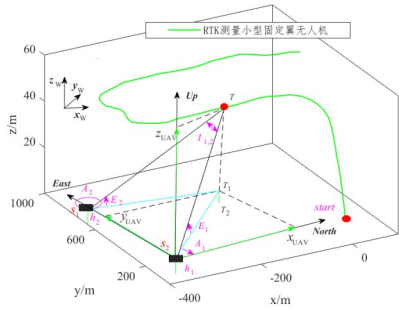


图 4 测角传感器交会测量定位点目标

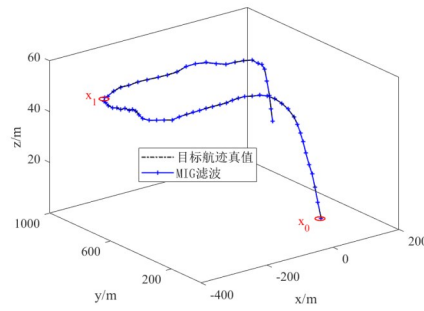


图 5 小型固定翼无人机航迹和 MIGF 滤波

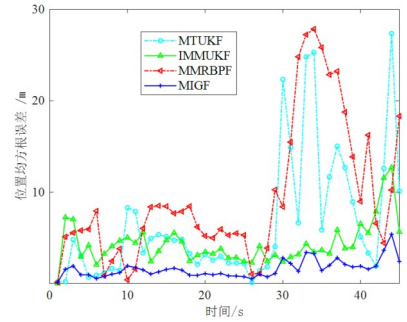


图 6 种滤波算法位置均方差误差

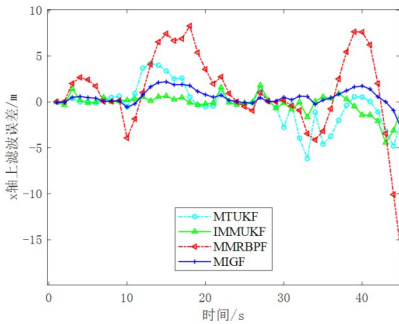


图 7 x 轴上的滤波误差

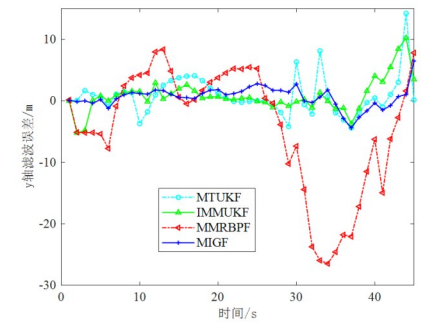


图 8 y 轴上的滤波误差

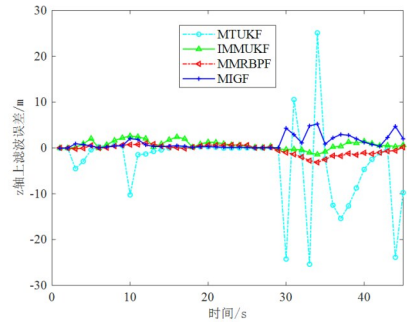


图 9 z 轴上的滤波误差

小型固定翼无人机灵活、机动性强, 在仿真实验中, MIGF 算法能够稳定跟踪, 如图 5 所示. 起始点为  $X_0$  (用红色椭圆标记), IMMUKF 在从爬升到巡航阶段连接处发散, 这主要是因为扩展泰勒级数的线性化运算产生高阶截断误差. IMMUKF 和 MMRBPF 算法在第 3 个转弯点  $X_1$  处, 跟踪误差超过 41 米, 这是主要因为在有限的测量误差范围内采样, 目标突然地机动行为引起模型切换延迟. 因此, 选取无人机在  $X_0$  到  $X_1$  段航迹, 比较 IMMUKF、MTUKF 和 MIGF 算法的跟踪性能, 目标在起始和终点的 RTK 测量为

$$X_0 = [-23.74 \text{ m}, 28.02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 809.08 \text{ m}, -5.52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 49.93 \text{ m}, -1.15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]^T,$$

$$X_1 = [-317.25 \text{ m}, 19.06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 779.26 \text{ m}, 17.35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 49.18 \text{ m}, -0.32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]^T.$$

考虑传感器系统误差和测量环境干扰等不确定性因素, 设置起始状态的初始先验  $p_0(\mathbf{X}; \mathbf{X}_{00}, \mathbf{P}_{00})$  的均值和协方差为

$$\mathbf{X}_{00} = \mathbf{X}_0 + \text{diag}[1.0 \text{ m}, 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 1.0 \text{ m}, 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 1.0 \text{ m}, 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}],$$

$$\mathbf{P}_{00} = \text{diag}[0.2 \text{ m}^2, 0.02 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, 0.2 \text{ m}^2, 0.02 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, 0.2 \text{ m}^2, 0.02 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}].$$

仿真实验表明, 异常值的更新协方差非常大, 但发

生概率相对较低,符合拉普拉斯分布的厚尾特征. 因此本节采用分数函数混合低概率高振幅拉普拉斯噪声和高概率低振幅高斯噪声来建模闪烁噪声  $p_g(e_k)$

$$p_g(e_k) = (1 - \varepsilon)N(e_k; \mu_G, \mathbf{P}_G) + \varepsilon La(e_k; \mu_{La}, \mathbf{P}_{La})$$

式中, 闪烁概率  $\varepsilon = 0.05$ , 高斯分布的过程和测量噪声方差为  $\sigma_v = 0.01 \text{ km} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\sigma_e = 1.5 \text{ mrad}$ ; 拉普拉斯分布

$$La(e_k; \mu_{La}, \mathbf{P}_{La}) = \frac{1}{2\mathbf{P}_{La}} \exp\left(-\frac{|\mu_{La} - X_k|}{\mathbf{P}_{La}}\right) \text{ 的过程}$$

表2 统计滤波误差(均值、协方差)和运行时间

算法	位置均方根误差		x轴上滤波误差		y轴上滤波误差		z轴上滤波误差		运行时间(s)
	均值(m)	协方差(m <sup>2</sup> )	最大值(m)	协方差(m <sup>2</sup> )	最大值(m)	协方差(m <sup>2</sup> )	最大值(m)	协方差(m <sup>2</sup> )	
IMMUKF	4.31	2.29	1.81	1.09	10.23	2.71	2.61	0.94	0.121
MTUKF	6.56	6.99	4.18	2.21	14.23	3.23	25.12	8.37	<b>0.028</b>
MMRBPF	9.40	7.66	8.28	4.64	8.36	10.05	<b>1.03</b>	<b>1.04</b>	3.113
MIGF	<b>2.67</b>	<b>1.77</b>	<b>0.52</b>	<b>0.91</b>	<b>0.64</b>	<b>1.73</b>	1.15	1.43	1.461

表2列出了4种算法的统计滤波误差(均值、协方差)和运行时间. 对于位置均方根误差和x轴上滤波误差, MMRBPF统计滤波误差的均值和协方差最大, 依次为MTUKF、IMMUKF和MIGF. 这是因为图1中小型固定翼无人机在爬升、巡航和俯冲阶段的连续三次转弯发生在不同的坐标平面上, 因此传统多模型算法不能及时切换模型, 并造成PF的累积误差急剧增大, 而MIGF在时空因果映射约束下重构覆盖多域似然先验的建议分布, 能够自适应地修正Sigma点权重并控制滤波增益, 有效提升动态系统建模的准确性和参数估计的鲁棒性. 对于y轴上滤波误差, MTUKF滤波误差的统计均值和协方差最大, 依次为IMMUKF、MMRBPF和MIGF, 这体现出重要性采样方法有效克服了高斯过程的先验限制. MIGF在z轴上滤波误差稍大于MMRBPF, 这是因为在外部测量干扰和航迹复杂度均相对平稳的条件下, 多模型集合能够细化点目标运动状态空间, 然而需牺牲时空计算复杂度为代价. MTUKF计算负担最小, MIGF整体运行时间相比IMMUKF增加一个数量级, 而相比MMRBPF以模型集数目成倍减小, 与3.3节计算复杂度的分析一致.

## 5 结论

本文针对非线性动态系统和状态约束不一致问题, 挖掘真实状态参数和最新测量之间的时空因果映射集合, 根据因果不变性推导时空学习驱动的混合重要性高斯滤波算法, 有效消减了高斯截断和线性化高阶截断两类误差. 实验结果表明, 该算法充分利用重要性权重的自适应性和瑞利熵的平滑性, 将高精度的高斯积分滤波推广应用到包含不一致约束和非高斯噪声干扰的复杂场景. 后续工作将结合无人机编队飞行场

和测量噪声方差分别为  $\sigma_v = 0.02 \text{ km} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\sigma_e = 2.0 \text{ mrad}$ .

图6是4种跟踪滤波算法的位置均方根误差, 图7、图8和图9分别给出了x轴、y轴和z轴方向上跟踪机动目标的位置误差. 定性比较跟踪效果的可知: 相比于传统交互多模型滤波算法和MTUKF算法, MIGF算法在跟踪稳定性和滤波精度方面均表现出明显优势. 这主要是因为MIGF在时空约束一致的可行域采样, 传播重要性样本取代高斯-埃尔米特积分框架中的线性化运算, 从而减小高斯截断误差和线性化误差.

景, 进一步研究时空学习驱动的MIGF算法在数据关联和多目标跟踪中的应用.

## 参考文献

- [1] SARKKA S, SOLIN A, HARTIKAINEN J. Spatiotemporal learning via infinite-dimensional Bayesian filtering and smoothing: A look at Gaussian process regression through Kalman filtering[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2013, 30(4): 51-61.
- [2] RONG LI X, JILKOV V P. Survey of maneuvering target tracking. Part I. Dynamic models[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(4): 1333-1364.
- [3] RONG LI X. Compatibility and modeling of constrained dynamic systems[C]//2016 19th International Conference on Information Fusion (FUSION). Piscataway: IEEE, 2016: 240-247.
- [4] Doucet A, Johansen A M. A tutorial on particle filtering and smoothing: Fifteen years later[J]. Handbook of nonlinear filtering, 2009, 12(656-704): 3.
- [5] 奚畅, 蔡志明, 袁骏. 被动声纳粒子滤波检测前跟踪的检测门限设置方法[J]. 电子学报, 2022, 50(7): 1722-1734. XI C, CAI Z M, YUAN J. A method of determining detection threshold for particle filter track-before-detect in passive sonar[J]. Acta Electronica Sinica, 2022, 50(7): 1722-1734. (in Chinese)
- [6] LIU C J, LI B B, CHEN W H. Particle filtering with soft state constraints for target tracking[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 55(6): 3492-3504.

- [7] DUAN B, ZHANG Q, GENG F, et al. Remaining useful life prediction of lithium-ion battery based on extended Kalman particle filter[J]. *International Journal of Energy Research*, 2020, 44(3): 1724-1734.
- [8] Van Der Merwe R, Doucet A, De Freitas N, et al. The unscented particle filter[J]. *Advances in neural information processing systems*, 2000, 13.
- [9] ELVIRA V, MARTINO L, CLOSAS P. Importance Gaussian quadrature[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 474-488.
- [10] 叶瑾, 许枫, 杨娟, 等. 一种基于多传感器的复合量测 IMM-EKF 数据融合算法[J]. *电子学报*, 2020, 48(12): 2326-2330.
- YE J, XU F, YANG J, et al. A composite measurement IMM-EKF data fusion algorithm based on multi-sensor [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2020, 48(12): 2326-2330. (in Chinese)
- [11] YAO Y Q, XU X S, YANG D R, et al. An IMM-UKF aided SINS/USBL calibration solution for underwater vehicles[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2020, 69(4): 3740-3747.
- [12] HOSTETTLER R, SÄRKKÄ S. Rao-blackwellized Gaussian smoothing[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(1): 305-312.
- [13] ZHANG H W. Multiple importance unscented Kalman filtering with soft spatiotemporal constraint for multi-passive-sensor target tracking[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, 33(1): 264-281.
- [14] RONG LI X, JILKOV V P. Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, 41(4): 1255-1321.
- [15] SIMON D. Kalman filtering with state constraints: A survey of linear and nonlinear algorithms[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(8): 1303-1318.
- [16] AFTAB W, MIHAYLOVA L. A Gaussian process regression approach for point target tracking[C]//2019 22th International Conference on Information Fusion (FUSION). Piscataway: IEEE, 2020: 1-8.
- [17] AFTAB W, MIHAYLOVA L. A learning Gaussian process approach for maneuvering target tracking and smoothing[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 57(1): 278-292.
- [18] SIMON D, CHIA T L. Kalman filtering with state equality constraints[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2002, 38(1): 128-136.
- [19] BOYD S, VANDENBERGHE L. *Convex Optimization* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [20] LI B B, LIU C J, CHEN W H. An auxiliary particle filtering algorithm with inequality constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62(9): 4639-4646.
- [21] GARCIA-FERNANDEZ Á F, MORELANDE M R, GRAJAL J. Truncated unscented Kalman filtering[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3372-3386.
- [22] GARCÍA-FERNÁNDEZ Á F, MORELANDE M R, GRAJAL J. Mixture truncated unscented Kalman filtering [C]//2012 15th International Conference on Information Fusion. Piscataway: IEEE, 2012: 479-486.
- [23] DE GEETER J, VAN BRUSSEL H, DE SCHUTTER J, et al. A smoothly constrained Kalman filter[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(10): 1171-1177.
- [24] Särkkä S, Svensson L. *Bayesian filtering and smoothing* [M]. Cambridge university press, 2023.
- [25] CRASSIDIS J L, JUNKINS J L. *Optimal estimation of dynamic systems*[M]. 2nd ed. Boca Raton, Fla.: Chapman and Hall/CRC, 2011.
- [26] ARASARATNAM I, HAYKIN S, ELLIOTT R J. *Discrete-time nonlinear filtering algorithms using gauss-Hermite quadrature*[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(5): 953-977.
- [27] BECKERS S. Equivalent causal models[J]. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2021, 35(7): 6202-6209.
- [28] HUBER M F. *Recursive Gaussian process: On-line regression and learning*[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2014, 45: 85-91.
- [29] Izanloo R, Fakoorian S A, Yazdi H S, et al. Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise[C]//2016 Annual Conference on Information Science and Systems (CISS). IEEE, 2016: 500-505.

#### 作者简介



张宏伟 女, 1982年生, 河南南阳人. 中山大学航天航空学院, 副研究员, 博士. 主要研究方向: 智能信息处理, 信息融合, 目标跟踪.

E-mail: zhanghw69@mail.sysu.edu.cn