

# 尺度不变范数比正则的稀疏DOA估计

王圣杰<sup>1</sup>, 张 晗<sup>1,2\*</sup>, 杜朝辉<sup>3</sup>

(1. 长安大学工程机械学院, 陕西西安 710064; 2. 长安大学道路施工技术装备教育部重点实验室, 陕西西安 710064;  
3. 西北工业大学航海学院, 陕西西安 710072)

**摘要:** 波达方向估计(Direction Of Arrival, DOA)通过使用传感器阵列来识别声源方位, 而传统的DOA估计方法忽略了声源在空间分布的稀疏性, 目前的凸稀疏DOA估计方法和非凸稀疏DOA估计方法所使用的惩罚函数未考虑稀疏度量 $\ell_0$ 范数的重要特性——尺度不变性, 因此无法精确描述声源的空域稀疏结构, 难以获得较高的DOA估计精度. 为此, 本文首先使用具有尺度不变性的范数比函数来逼近 $\ell_0$ 范数, 刻画声源空域稀疏结构; 接着, 针对范数比函数的非凸特性, 采用光滑化的思想, 构建了平滑的近似函数; 然后, 构建了基于光滑 $\ell_p$ 比 $\ell_q$ 范数的稀疏DOA估计模型, 开发了基于光滑 $\ell_p$ 比 $\ell_q$ 范数的稀疏DOA估计算法(Smoothed  $\ell_p$ -Over- $\ell_q$  regularized Sparse DOA Estimation algorithm, SPOQ-SDOA). 大量仿真分析表明, 与流行的多快照DOA估计算法相比, 本文提出的算法在不同信噪比和快照数下有更高的DOA估计精度和更好的性能表现. SWellEx-96海试实验中的S5事件分析结果验证了所提算法的有效性.

**关键词:** 波达方向; 稀疏优化; 尺度不变性

**基金项目:** 国家自然科学基金(No.52275085, No.11804279); 陕西省自然科学基金(No.2020JQ-131); 中央高校基本科研业务费专项资金(No.300102252201)

中图分类号: TB566; TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2024)01-0298-13

电子学报URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20221343

## Scale Invariant Norm Ratio Regularized Sparse DOA Estimation

WANG Sheng-jie<sup>1</sup>, ZHANG Han<sup>1,2\*</sup>, DU Zhao-hui<sup>3</sup>

(1. School of Construction Machinery, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China;

2. Key Laboratory of Road Construction Technology and Equipment, Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China;

3. School of Navigation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

**Abstract:** Direction of arrival (DOA) estimation uses sensor arrays to identify the direction of sound sources, while traditional DOA estimation methods ignore the sparsity of sound sources in spatial distribution. The penalty function used by current convex sparse DOA estimation methods and non-convex sparse DOA estimation methods do not consider the important scale invariance feature of sparse  $\ell_0$  norm, which cannot accurately describe the spatial sparse structure of the sound source, and it is difficult to obtain high DOA estimation accuracy. For this reason, firstly, the scale-invariance norm ratio function is used to approximate the  $\ell_0$  norm and characterize the spatial sparse structure of the sound source in this paper; Secondly, aiming at the non-convex property of the norm ratio function, a smooth approximation function is constructed by using the idea of smoothing; Then, the scale-invariant  $\ell_p$ -over- $\ell_q$  regularized sparse DOA estimation model is constructed, and meanwhile an optimization algorithm is developed for it. A lot of simulation analysis demonstrate that the proposed algorithm has higher DOA estimation accuracy and better performance under different SNR and snapshot numbers than the popular multi-snapshot DOA estimation algorithm. The analysis results of S5 events in SWellEx-96 sea trial experiment verified the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** direction of arrival; sparse optimization; scale-invariant

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.52275085, No.11804279); Natural Science Foundation of Shanxi Province (No.2020JQ-131); Fundamental Research Funds for the Central Universities (No.300102252201)

## 1 引言

波达方向 (Direction Of Arrival, DOA) 估计一直是阵列信号处理中的研究热点<sup>[1]</sup>, 其主要目的是在复杂多变的环境中, 通过空间不同位置的传感器阵列来实现声源方位的准确识别. DOA 估计拥有实现简单、运算高效和结果准确的优点. 因此, DOA 估计被广泛地运用于地震波反演<sup>[2]</sup>、雷达<sup>[3]</sup>、语音增强<sup>[4]</sup>以及声呐<sup>[5]</sup>等领域.

经典的 DOA 估计算法可以分为 3 类: 波束扫描类方法、自适应波束扫描类方法和子空间类方法. 波束扫描类方法利用权值补偿各个方位声源引起的相位差异, 并将阵列的接收信号依次与权值相乘, 再对结果进行协方差运算, 从而得到空间谱分布, 其也被称为传统波束形成 (Conventional Beamforming, CBF) 算法<sup>[6]</sup>. 季浩然等人<sup>[7]</sup>在 CBF 基础上, 提出了一种功率受限的传统波束形成拟合算法. 自适应波束扫描类方法以最小方差无失真响应 (Minimum Variance Distortion-less Response, MVDR) 算法为代表. MVDR 算法基于最小均方误差准则, 在约束目标方向增益不变的同时使波束形成器输出总能量最小, 从而得到空间谱图. 王超等人<sup>[8]</sup>在 MVDR 算法的基础上, 提出稀疏近似最小方差算法来进行 DOA 估计. 子空间类方法以多重信号分类 (Multiple Signal Classification, MUSIC) 算法为代表. MUSIC 算法根据噪声子空间正交与信号子空间的特性, 用噪声子空间扫描方向矢量, 得到空间谱分布. 陈志菲等人<sup>[9]</sup>为了提高频域波束形成的宽带波达方向估计性能, 提出了类 MUSIC 波束形成算法. 但是, 经典的 DOA 估计方法对满足性能要求的快拍数量有着最低限制, 且未考虑声源在空域的稀疏性, 导致方向图中存在大量的伪源. 近年来, 学者们通过探究声源在空域分布的稀疏模式<sup>[10]</sup>, 将压缩感知<sup>[11]</sup> (Compressive Sensing, CS) 的思想引入 DOA 估计中, 从而形成稀疏 DOA 估计. 稀疏 DOA 估计通过离散网格来监听信源方位. 由于信源数目远少于离散化的方位角数目, 稀疏 DOA 估计可以被描述为一个具有稀疏约束的欠定系统.  $\ell_0$  范数统计向量内的非零元素个数, 因此  $\ell_0$  范数是向量稀疏性的度量.  $\ell_0$  范数度量向量稀疏性时, 不会受到向量中非零元素大小的影响, 即  $\ell_0$  范数具有尺度不变性. 因此, 基于具有尺度不变性的惩罚函数的算法可以避免非零元素大小的影响, 从而更好地描述声源的空域稀疏结构. 但是, 由于  $\ell_0$  范数是非凸函数, 其空间分布极度不连续, 基于  $\ell_0$  范数的算法难以精确求解. 因此, 稀疏 DOA 估计的经典策略之一是对 DOA 估计问题施加  $\ell_1$  范数作为稀疏约束<sup>[12]</sup>来逼近  $\ell_0$  范数, 因为  $\ell_1$  范数为向量中各个元素绝对值之和, 其

为  $\ell_0$  范数的凸近似. 稀疏 DOA 估计的发展早期, Gorodnitsky 等人<sup>[13]</sup>提出了基于递归加权最小范数声源定位算法, 此算法也被称为焦点未确定系统求解器, 经证明该算法与惩罚函数描述稀疏结构能力有关. 2005 年, Malioutov 等人<sup>[14]</sup>提出了 L1-SVD 算法, 其基于  $\ell_1$  范数施加惩罚来增强结果稀疏性, 对多快拍数据使用奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD) 来降低观察矩阵的阶数, 并将波达方向估计问题转换为二阶锥问题 (Second Order Cone Problem, SOCP). 由于  $\ell_1$  范数为凸函数, 基于  $\ell_1$  范数的算法求解过程简单可靠, 且具有全局最优解. 但是, 使用不具有尺度不变性的  $\ell_1$  范数作为具有尺度不变性的  $\ell_0$  范数的近似必然会导致结果的稀疏性下降, 进而也会导致稀疏 DOA 估计的性能下降<sup>[15]</sup>. 稀疏 DOA 估计的另一策略是对 DOA 估计问题施加非凸惩罚函数来增强结果的稀疏性<sup>[16]</sup>. Liu 等人<sup>[17]</sup>针对离网格 DOA 估计问题, 开发了一种由非凸稀疏诱导惩罚正则化的 DOA 估计算法. Yang 等人<sup>[18]</sup>将极小极大凹惩罚 (Minimax Concave Penalty, MCP) 函数运用到稀疏 DOA 估计中, 证明了其性能优于以  $\ell_1$  范数为惩罚函数的稀疏 DOA 估计. 丁飞龙等人<sup>[19]</sup>针对基于极小极大凹惩罚函数约束的压缩感知波束形成在强噪声背景下, 方位估计结果不稳定的问题, 提出了基于极小极大凹惩罚函数约束的多快拍压缩感知波束形成算法. 使用非凸惩罚函数作为稀疏约束, 虽然具有了比  $\ell_1$  范数更强的描述稀疏结构能力, 提高了算法的性能<sup>[20]</sup>, 但是目前研究所使用的非凸惩罚函数不具备尺度不变性, 从而无法精确逼近  $\ell_0$  范数, 难以描述声源的空域稀疏结构.

为了增强约束的描述稀疏能力并且保证避免陷入局部最小化问题, Afef Cherni 等人<sup>[21]</sup>提出了光滑  $\ell_p$  比  $\ell_q$  (Smoothed  $\ell_p$ -Over- $\ell_q$ , SPOQ) 范数, 在质谱分析领域展现了较好性能. SPOQ 范数不仅具备  $\ell_0$  范数的尺度不变性, 而且具有光滑可调的优点, 可以动态地调节范数比的光滑程度. 在收敛过程中, SPOQ 范数可以逐级减少光滑程度, 增强惩罚函数描述稀疏结构能力, 从而实现快速收敛, 并且保证结果稀疏. 经典方法、凸稀疏 DOA 估计方法和非凸稀疏 DOA 估计方法都忽略了  $\ell_0$  范数的尺度不变性. 在稀疏 DOA 估计模型中引入具有尺度不变性的惩罚函数可以有力地帮助模型描述声源的空域稀疏结构.

基于上述问题, 本文提出了基于光滑  $\ell_p$  比  $\ell_q$  范数的稀疏 DOA 估计算法 (Smoothed  $\ell_p$ -Over- $\ell_q$  regularized Sparse DOA Estimation algorithm, SPOQ-SDOA). 本文首先使用具有尺度不变性的范数比来逼近  $\ell_0$  范数, 从而精确描述声源的空域稀疏结构; 接着, 针对范数

比的非凸特性,采用光滑化的思想,构建了平滑的近似函数;最后,构建了基于 SPOQ 范数的稀疏 DOA 估计问题模型,开发了高效稳定的优化方法. 本文的贡献在于将尺度不变的 SPOQ 范数用于 DOA 估计问题.

## 2 信号模型

已知声速为  $c=1500$  m/s,阵列由  $M$  个阵元组成的均匀线阵,相邻阵元间距为  $d$ ,存在  $K$  个远场窄带信号源  $s_k(t)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,  $t=1, 2, \dots, J$  分别从  $K$  个不同的方向角  $\Theta_s = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]$  入射均匀线阵,其中,  $\theta_k$  表示第  $k$  个信号源的方向角,  $J$  为时域快拍数. 从方位角为  $\theta$  的信号源到各个阵元的传播延迟关系可由方向向量  $\mathbf{a}(\theta)$  描述,  $\mathbf{a}(\theta) = \left[ 1, \dots, e^{j(m-1)2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta}, \dots, e^{j(M-1)2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta} \right]$ , 其中,  $j$  为虚数单位,  $\lambda$  表示波长.

令阵列的接收信号为  $\mathbf{y}(t)$ , 源信号为  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$ , 加性噪声信号为  $\mathbf{e}(t)$ , 其中上标“T”为转置运算符, 则时域阵列观测信号可建模为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\Theta_s)\mathbf{s}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (1)$$

其中, 矩阵  $\mathbf{A}(\Theta_s) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_k), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$  称为阵列流形矩阵.

频域的 DOA 估计相较时域的 DOA 估计而言, 计算方便, 稳定高效, 因此对阵列观测信号模型(1)进行快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT), 将时域信号模型转化到频域信号模型, 则得到基于频率  $f$  的窄带频域信号模型:

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}(\Theta_s, f)\mathbf{s}(f) + \mathbf{e}(f) \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{A}(\Theta_s, f) = [\mathbf{a}(\theta_1, f), \dots, \mathbf{a}(\theta_k, f), \dots, \mathbf{a}(\theta_K, f)]$  为对应频率  $f$  的阵列流形矩阵,  $\mathbf{a}(\theta, f) = \left[ 1, \dots, e^{j(m-1)2\pi\frac{df}{c}\sin\theta}, \dots, e^{j(M-1)2\pi\frac{df}{c}\sin\theta} \right]$  为对应频率  $f$  和方位角  $\theta$  的方向向量.

对基于频率  $f$  的窄带频域信号模型进行协方差矩阵表示:

$$\mathbf{R}_f = \mathbb{E}[\mathbf{y}(f)\mathbf{y}^H(f)] = \mathbf{A}(\Theta_s, f)\mathbf{R}_s^f\mathbf{A}^H(\Theta_s, f) + \mathbf{R}_e^f \quad (3)$$

其中,  $\mathbb{E}[\cdot]$  表示期望运算, 上标“H”为厄米特转置运算符,  $\mathbf{R}_s^f = \mathbb{E}[\mathbf{s}(f)\mathbf{s}^H(f)] \in \mathbb{C}^{K \times K}$  和  $\mathbf{R}_e^f = \mathbb{E}[\mathbf{e}(f)\mathbf{e}^H(f)] \in \mathbb{C}^{K \times K}$  分别是源信号  $\mathbf{s}(f)$  和噪声信号  $\mathbf{e}(f)$  的协方差矩阵. 另外, 当信号源之间不相关、信号源和噪声非相关, 且噪声为独立同分布的高斯白噪声时, 等式(3)中的协方差矩阵  $\mathbf{R}_f$  可以修改为

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{A}(\Theta_s, f)\mathbf{R}_s^f\mathbf{A}^H(\Theta_s, f) + \sigma_f^2\mathbf{I} \quad (4)$$

其中,  $\sigma_f^2$  为加性噪声的方差.

将矢量化运用于式(4), 可以得到以下关系:

$$\mathbf{r}_f = \overline{\mathbf{A}}(\Theta_s, f)\mathbf{p}_f + \sigma_f^2 \text{vec}(\mathbf{I}) \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{r}_f = \text{vec}(\mathbf{R}_f) \in \mathbb{C}^{M^2 \times 1}$ , 其中  $\text{vec}(\cdot)$  表示矢量化处理;  $\overline{\mathbf{A}}(\Theta_s, f) = [\mathbf{a}^*(\theta_1, f) \otimes \mathbf{a}(\theta_1, f), \dots, \mathbf{a}^*(\theta_k, f) \otimes \mathbf{a}(\theta_k, f), \dots, \mathbf{a}^*(\theta_K, f) \otimes \mathbf{a}(\theta_K, f)]$  为方向矢量协方差的矢量化矩阵, 其中  $\otimes$  表示克罗内克积, 其中上标“\*”为共轭运算符,  $\mathbf{p}_f = \text{vec}(\text{diag}(\mathbf{R}_s^f))$  表示  $\mathbf{R}_s^f$  的对角元素矢量化.

## 3 光滑 $\ell_p$ 比 $\ell_q$ 范数稀疏 DOA 估计

### 3.1 稀疏协方差拟合

在稀疏谱协方差拟合<sup>[22]</sup>中, 引入  $\overline{\mathbf{A}}(\Theta_s, f)$  的过完备表示:

$$\overline{\mathbf{A}}(\Theta_\Omega, f) = [\mathbf{a}^*(\theta_1, f) \otimes \mathbf{a}(\theta_1, f), \dots, \mathbf{a}^*(\theta_n, f) \otimes \mathbf{a}(\theta_n, f), \dots, \mathbf{a}^*(\theta_N, f) \otimes \mathbf{a}(\theta_N, f)] \quad (6)$$

其中,  $\Theta_\Omega = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]$  为观测空间的角度扫描网格,  $N$  为网格点的数量. 信号源入射方位角度集合  $\Theta_s$  为扫描网格集合  $\Theta_\Omega$  的子集, 即扫描网格数远大于信号源数目. 因此, 基于频率  $f$  的窄带频域信号模型可进行协方差矩阵表示:

$$\mathbf{r}_f = \overline{\mathbf{A}}(\Theta_\Omega, f)\mathbf{x}_f + \sigma_f^2 \text{vec}(\mathbf{I}) \quad (7)$$

简记为

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (8)$$

其中, 向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  为解向量, 解向量  $\mathbf{x}$  只有  $K$  个非零元素, 非零元素的索引为集合  $\Theta_s$  的子集, 对应的角度表示实际信号源的方位角, 由于声源在空间的分布具有稀疏性, 因此  $K \ll N$ . 稀疏 DOA 估计问题为在已知阵列输出  $\mathbf{r}$  和字典矩阵  $\mathbf{A}$  的条件下, 计算出解向量  $\mathbf{x}$  中所有非零元素的位置索引.

声源在空间中的分布是稀疏的, 则稀疏 DOA 估计问题可以转化为稀疏重构问题:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \tau f(\mathbf{x}) \quad (9)$$

其中,  $\tau \geq 0$  为正则化参数, 控制稀疏约束项和数据保真项的平衡;  $f(\mathbf{x})$  为稀疏惩罚函数, 用来描述声源的空域稀疏结构. 将公式(8)中的  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  左移, 则得到

$$\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e} \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{e}$  为噪声信号矢量, 在高斯白噪声的假设下,  $\mathbf{e}$  服从高斯分布. 稀疏重构问题中  $\|\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2$  为数据保真项, 描述了噪声信号矢量  $\mathbf{e}$  服从高斯分布的物理模型. 因此, 式(9)中的估计解向量  $\hat{\mathbf{x}}$  描述了阵列扫描区域, 其非零元素的索引确定了重要目标的方位.

### 3.2 尺度不变性稀疏惩罚函数的构造

对于任意的  $\alpha$ , 稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$  满足

$$f(\alpha\mathbf{x})=f(\mathbf{x}) \quad (11)$$

则认为稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$  具有尺度不变性.

$\ell_0$  范数作为稀疏度量, 统计向量中的非零元素个数, 是理想的稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$ . 显然,  $\|\alpha\mathbf{x}\|_0 = \|\mathbf{x}\|_0$ , 则理想稀疏惩罚函数  $\ell_0$  范数具有尺度不变性, 即非零元素的大小不会影响  $\ell_0$  范数的统计结果. 尺度不变性是理想稀疏惩罚函数  $\ell_0$  范数的重要特性. 但是, 由于  $\ell_0$  范数是非凸函数, 其空间分布极度不连续, 基于  $\ell_0$  范数的算法难以精确求解.

凸稀疏 DOA 估计一般使用  $\ell_1$  范数来近似  $\ell_0$  范数作为稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$ , 但是  $\|\alpha\mathbf{x}\|_1 = \alpha\|\mathbf{x}\|_1$ ,  $\ell_1$  范数不具备尺度不变性. 因此, 使用不具备尺度不变性  $\ell_1$  范数来逼近具备尺度不变性的理想稀疏惩罚函数  $\ell_0$  范数, 将难以精确描述声源的空域稀疏结构, 进而导致稀疏 DOA 估计算法的性能下降<sup>[15]</sup>.

非凸稀疏 DOA 估计一般使用非凸惩罚函数来近似  $\ell_0$  范数作为稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$ . 以基于 MCP 惩罚函数<sup>[18]</sup>的非凸稀疏 DOA 估计为例, MCP 惩罚函数如下:

$$\Psi^{\text{MCP}}(\mathbf{s}; \tau, \Sigma) = \tau \left( \|\mathbf{s}\|_1 - \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{1}{2} \|\Sigma(\mathbf{s} - \mathbf{u})\|_2^2 \right\} \right) \quad (12)$$

对 MCP 惩罚函数, 下式成立:

$$\Psi^{\text{MCP}}(\alpha\mathbf{s}; \tau, \Sigma) = \tau\alpha\|\mathbf{s}\|_1 - \tau \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{1}{2} \|\Sigma(\alpha\mathbf{s} - \mathbf{u})\|_2^2 \right\} \quad (13)$$

显然, MCP 惩罚不具备尺度不变性, 无法精确地逼近  $\ell_0$  范数, 无法精确描述声源的空域稀疏结构. 目前研究所使用的非凸惩罚函数不具备尺度不变性, 从而无法精确描述声源的空域稀疏结构.

令  $p \in [0, 2]$ ,  $q \in [2, +\infty)$ , 范数比定义如下:

$$\|\mathbf{x}\|_p / \|\mathbf{x}\|_q \quad (14)$$

接下来, 证明范数比的尺度不变性.

对于  $\|\mathbf{x}\|_p$ , 下式成立:

$$\|\alpha\mathbf{x}\|_p = \alpha\|\mathbf{x}\|_p \quad (15)$$

对于  $\|\mathbf{x}\|_q$ , 下式成立:

$$\|\alpha\mathbf{x}\|_q = \alpha\|\mathbf{x}\|_q \quad (16)$$

因此, 对于范数比  $\|\mathbf{x}\|_p / \|\mathbf{x}\|_q$ , 下式成立:

$$\frac{\|\alpha\mathbf{x}\|_p}{\|\alpha\mathbf{x}\|_q} = \frac{\alpha\|\mathbf{x}\|_p}{\alpha\|\mathbf{x}\|_q} = \frac{\|\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_q} \quad (17)$$

显然, 范数比  $\|\mathbf{x}\|_p / \|\mathbf{x}\|_q$  具有理想的稀疏惩罚函数  $\ell_0$  范数的重要特性——尺度不变性. 利用范数比

$\|\mathbf{x}\|_p / \|\mathbf{x}\|_q$  作为稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$ , 可以更精确地近似  $\ell_0$  范数, 从而精确地描述声源的空域稀疏结构.

### 3.3 稀疏惩罚函数光滑化处理

范数比  $\|\mathbf{x}\|_p / \|\mathbf{x}\|_q$  与  $\ell_0$  范数一样不光滑, 因此直接使用范数比作为稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$  来求解式 (9) 会陷入局部最小值困境. 对范数比进行光滑化处理, 既可以避免局部最小值问题, 又可以动态地调节惩罚函数的光滑性.

令  $p \in [0, 2]$ ,  $\ell_{p,\alpha}(\mathbf{x})$  为常数  $\alpha \in (0, +\infty)$  参数化的  $\ell_p$  平滑近似:

$$\ell_{p,\alpha}(\mathbf{x}) = \left( \sum_{n=1}^N \left( (\mathbf{x}_n^2 + \alpha^2)^{\frac{p}{2}} - \alpha^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (18)$$

其中, 参数  $\alpha$  为光滑可控参数, 可以逐级调节光滑性.

令  $q \in [2, +\infty)$ ,  $\ell_{q,\eta}(\mathbf{x})$  为常数  $\eta \in (0, +\infty)$  参数化的  $\ell_q$  平滑近似:

$$\ell_{q,\eta}(\mathbf{x}) = \left( \eta^q + \sum_{n=1}^N |\mathbf{x}_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (19)$$

其中, 参数  $\eta$  的作用为保证  $\mathbf{x}$  为零向量时, 计算结果非奇异.

光滑  $\ell_p$  比  $\ell_q$  范数 (SPOQ 范数)  $\Psi(\mathbf{x})$  的数学表达式如下:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \log \left( \frac{(\ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) + \beta^p)^{\frac{1}{p}}}{\ell_{q,\eta}(\mathbf{x})} \right) \quad (20)$$

其中,  $\beta \in (0, +\infty)$  是为了考虑  $\log$  函数在 0 处没有定义的情况.

通过三维空间的几何分析来评估 SPOQ 范数的稀疏演变机制. 计算不同稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$  随向量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$  的变化, 其中  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ , 图 1 为归一化不同稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$  随  $\mathbf{x}$  取值变化的对比图像, 从上到下、从左到右依次是  $\ell_0$  范数、 $\ell_1$  范数、光滑  $\ell_1$  比  $\ell_2$  范数、SOOT 范数<sup>[23]</sup>、光滑  $\ell_{1/4}$  比  $\ell_2$  范数和 SPOQ 范数, 其参数设置为  $(\alpha, \beta, \eta) = (7 \times 10^{-7}, 3 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-1})$ . 根据声源的空域稀疏结构, 需要寻找稀疏性强的解, 以  $\ell_0$  范数作为衡量目标稀疏性的准则. 由图 1 可知, 当  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_0$  时, 若  $x_1, x_2$  均不为 0, 则归一化  $f(\mathbf{x}) = 1$ ; 若  $x_1$  和  $x_2$  中存在一个为 0, 则归一化  $f(\mathbf{x}) = 1/2$ ; 若  $x_1$  和  $x_2$  都为 0, 则归一化  $f(\mathbf{x}) = 0$ . 因此,  $\ell_0$  范数的空间分布不连续, 取稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$  为  $\ell_0$  范数, 会使得模型 (9) 的求解为 NP-hard 问题. 当  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1$  时,  $\ell_1$  范数不具备尺度不变性, 因此  $f(\mathbf{x})$  的空间不能精确逼近  $\ell_0$  范数的空间. 当  $f(\mathbf{x})$  为光滑  $\ell_1$  比  $\ell_2$  范数或光滑  $\ell_{1/4}$  比  $\ell_2$  范数时,  $f(\mathbf{x})$  具有弱尺度不变性, 但是  $f(\mathbf{x})$  的空间对  $\ell_0$  范数的空间的

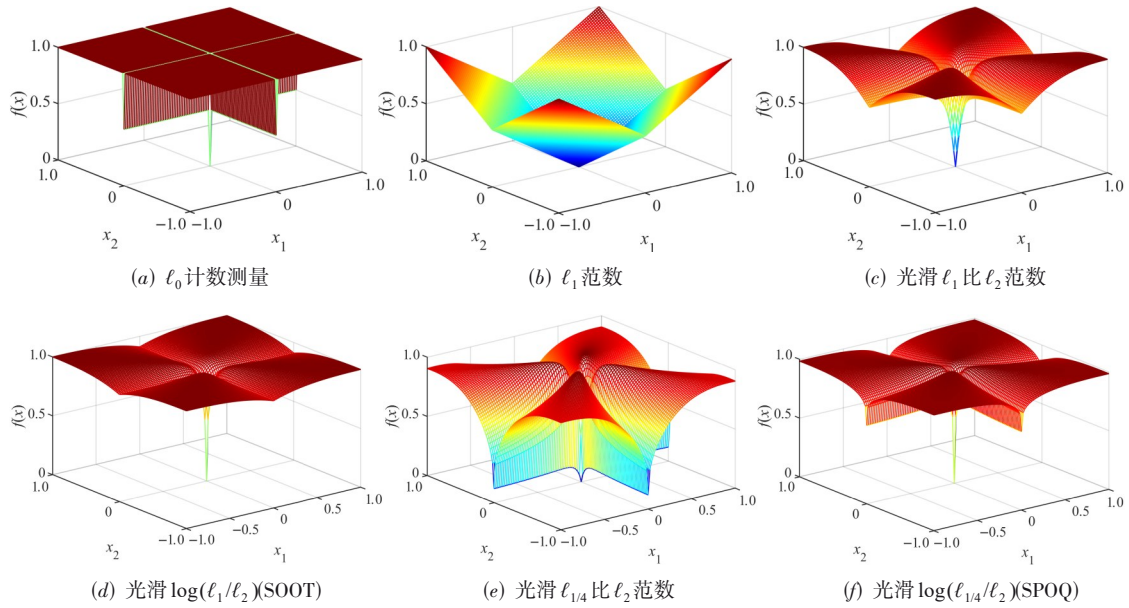


图1 归一化不同稀疏惩罚函数 $f(\mathbf{x})$ 随 $\mathbf{x}$ 取值变化的对比图像<sup>[21]</sup>

逼近还是有所不足. SOOT 范数和 SPOQ 范数具有较强的尺度不变性, 因此当 $f(\mathbf{x})$ 为 SOOT 范数或 SPOQ 范数时,  $f(\mathbf{x})$ 的空间几乎不受 $\mathbf{x}$ 中非零元素大小的影响. 与 SOOT 范数相比, 若 $x_1$ 和 $x_2$ 中存在一个逼近0时, SPOQ 范数更逼近1/2, 更加精确逼近 $l_0$ 范数的空间. 综上分析可知, SPOQ 范数不仅具有尺度不变性, 且空间分布连续, 便于优化. 因此, 本研究选择 SPOQ 范数作为式(9)的稀疏惩罚函数 $f(\mathbf{x})$ .

图2为不同 $\alpha$ 条件下归一化 SPOQ 范数图像, 其参数设置为 $(\beta, \eta) = (3 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-1})$ . 如图2所示, 当 $\alpha =$

1时, 若 $x_1$ 和 $x_2$ 都逼近0时, SPOQ 范数逼近1, SPOQ 范数空间与 $l_0$ 范数存在较大差异, 这是由于过大的 $\alpha$ 影响了 $l_p$ 平滑近似. 当 $\alpha < 1$ 时, SPOQ 范数空间存在以下规律: 参数 $\alpha$ 较大时, SPOQ 范数接近 $l_1$ 范数, 能够帮助式(9)的求解过程快速收敛; 参数 $\alpha$ 较小时, SPOQ 范数较接近 $l_0$ 范数, 从而增强模型(9)描述声源的空域稀疏结构能力. 因此, 式(18)中的参数 $\alpha$ 为光滑可控参数, 可以逐级调节 SPOQ 范数描述声源的空域稀疏结构能力. 在模型的优化迭代求解过程中, 令参数 $\alpha$ 由大到小逐级变化, 可使迭代过程快速收敛, 且同时保证模型的

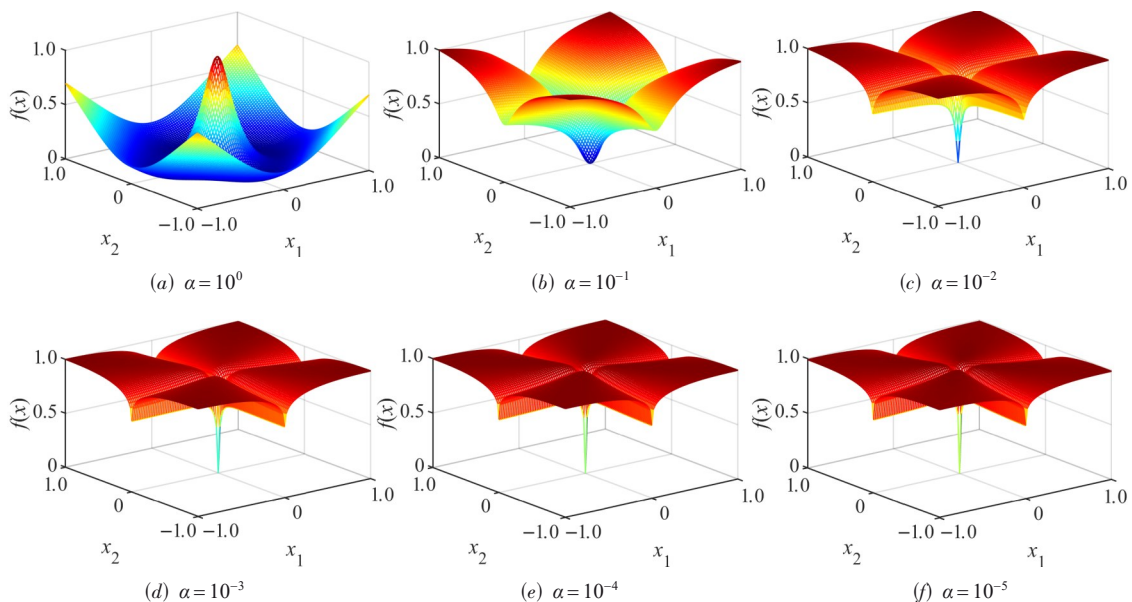


图2 不同 $\alpha$ 条件下归一化 SPOQ 范数图像

解具有稀疏性和尺度不变性。

### 3.4 基于光滑 $\ell_p$ 比 $\ell_q$ 范数的稀疏 DOA 估计模型

根据稀疏重构式(9),使用 SPOQ 范数作为稀疏惩罚函数  $f(\mathbf{x})$ ,则可以得到范数比稀疏 DOA 估计的优化模型:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \tau \Psi(\mathbf{x}) \quad (21)$$

其中,  $\|\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2$  作为数据保真项,描述了噪声信号矢量  $\mathbf{e}$  服从高斯分布的物理模型;  $\Psi(\mathbf{x})$  为 SPOQ 范数,作为稀疏惩罚函数,其具有理想稀疏惩罚函数  $\ell_0$  范数的重要特性——尺度不变性,精确地描述了声源的空域稀疏结构;  $\tau \geq 0$  为正则化参数,控制稀疏程度和拟合度的平衡. 通过求解式(21)可以计算出解向量  $\mathbf{x}$  中所有非零元素的位置索引,从而识别实际信号源的方位角.

### 3.5 基于光滑 $\ell_p$ 比 $\ell_q$ 范数的稀疏 DOA 估计算法

针对非光滑 SPOQ 范数的稀疏 DOA 估计模型(21),使用光滑代理函数来设计收敛的优化算法,代理函数采用凹函数的一阶泰勒展开近似. 在  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  处, SPOQ 范数  $\Psi$  中分子  $\ell_{p,\alpha}^p$  和分母  $\ell_{q,\eta}^q$  各部分梯度和 Hessian 矩阵可计算如下:

$$\nabla \ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) = p \left( x_n (x_n^2 + \alpha^2)^{\frac{p}{2}-1} \right)_{1 \leq n \leq N} \quad (22)$$

$$\nabla^2 \ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) = p \text{diag} \left( \left( (p-1)x_n^2 + \alpha^2 \right) (x_n^2 + \alpha^2)^{\frac{p}{2}-2} \right)_{1 \leq n \leq N} \quad (23)$$

$$\nabla \ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x}) = q \left( \text{sign}(x_n) |x_n|^{q-1} \right)_{1 \leq n \leq N} \quad (24)$$

$$\nabla^2 \ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x}) = q(q-1) \text{diag} \left( \left( |x_n|^{q-2} \right)_{1 \leq n \leq N} \right) \quad (25)$$

其中,  $\text{sign}(x)$  为符号函数,对  $x=0$ ,  $\text{sign}(x)$  为 0,对  $x < 0$ ,  $\text{sign}(x)$  为 -1,对  $x > 0$ ,  $\text{sign}(x)$  为 1. 同时,对数运算可以将 SPOQ 范数比分解为以下求差形式:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_1(\mathbf{x}) - \Psi_2(\mathbf{x}) \quad (26)$$

其中,

$$\Psi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{p} \log \left( \ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) + \beta^p \right) \quad (27)$$

$$\Psi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{q} \log \left( \ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x}) \right) \quad (28)$$

因此, SPOQ 范数的梯度和 Hessian 矩阵为

$$\nabla \Psi(\mathbf{x}) = \nabla \Psi_1(\mathbf{x}) - \nabla \Psi_2(\mathbf{x}) \quad (29)$$

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}) = \nabla^2 \Psi_1(\mathbf{x}) - \nabla^2 \Psi_2(\mathbf{x}) \quad (30)$$

其中,

$$\nabla \Psi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{p} \frac{\nabla \ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x})}{\ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) + \beta^p} \quad (31)$$

$$\nabla \Psi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{q} \frac{\nabla \ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x})}{\ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x})} \quad (32)$$

$$p \nabla^2 \Psi_1(\mathbf{x}) = \frac{\nabla^2 \ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x})}{\ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) + \beta^p} - \frac{\nabla \ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) \left( \nabla \ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) \right)^H}{\left( \ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{x}) + \beta^p \right)^2} \quad (33)$$

$$q \nabla^2 \Psi_2(\mathbf{x}) = \frac{\nabla^2 \ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x})}{\ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x})} - \frac{\nabla \ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x}) \left( \nabla \ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x}) \right)^H}{\ell_{q,\eta}^{2q}(\mathbf{x})} \quad (34)$$

其中,上标“H”为 Hermit 转置运算符.

基于泰勒展开原理,在变量  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$  附近的局部区域,光滑函数  $\Psi(\mathbf{x})$  具有局部近似函数:

$$Q(\mathbf{x}|\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}) + \nabla \Psi^H(\mathbf{u})(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{u})^H B(\mathbf{u})(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \quad (35)$$

其中,  $B(\mathbf{u})$  为  $\nabla^2 \Psi(\mathbf{u})$  的上界近似,表达式如下:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}) &= \frac{q-1}{\ell_{q,\eta}^q(\mathbf{x})} \sup_{1 \leq n \leq N} |u_n|^{q-2} + \frac{\text{diag} \left( \left( u_n^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \right)_{1 \leq n \leq N}}{\ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{u}) + \beta^p} \\ &\leq \frac{q-1}{\left( \eta^q + \sum_{n=1}^N |u_n|^q \right)^{\frac{2}{q}}} + \frac{\text{diag} \left( \left( u_n^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \right)_{1 \leq n \leq N}}{\ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{u}) + \beta^p} \\ &\leq \frac{q-1}{\eta^2} + \frac{\text{diag} \left( \left( u_n^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \right)_{1 \leq n \leq N}}{\ell_{p,\alpha}^p(\mathbf{u}) + \beta^p} \end{aligned} \quad (36)$$

$B(\mathbf{u})$  满足下式:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{u}) \prec B(\mathbf{u}) \quad (37)$$

由于式(36)对于任意变量  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  均成立,因此,式(21)的最小值优化可以转换为优化其局部近似上界  $Q(\mathbf{x}|\mathbf{u})$ ,进而得到如下优化问题:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \tau Q(\mathbf{x}|\mathbf{u}) \quad (38)$$

目标函数式(38)比原问题式(21)简单,更易于优化,求其梯度  $\nabla Q(\mathbf{x}|\mathbf{u}) = 0$ ,可以得到如下更新公式:

$$\left( \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^H \mathbf{A} + B(\mathbf{u}) \right) \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^H \mathbf{r} - \nabla \Psi(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (39)$$

为了进行迭代更新,在当前更新得到的  $\mathbf{x}^k$  进行局部上界近似,从而令  $\mathbf{u} = \mathbf{x}^k$ ,得到如下线性方程组:

$$\begin{cases} \left( \mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda B(\mathbf{x}^k) \right) \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{b} = \mathbf{A}^H \mathbf{r} - \lambda \nabla \Psi(\mathbf{x}^k) + \lambda B(\mathbf{x}^k) \mathbf{x}^k \end{cases} \quad (40)$$

式(40)中的  $\mathbf{x}^k$  具有高的维度,直接求逆运算量大,同时  $B(\mathbf{x}^k)$  具有对角阵的特殊结构,因此,采用

Sherman-Morrison-Woodbury (SWM) 公式<sup>[24]</sup>进行快速求逆更新  $\mathbf{x}$ . 应用 SWM 公式可以得到:

$$\left(\mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x}^k)\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^H (\mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \quad (41)$$

其中,  $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x}^k)$ , 同时为半正定矩阵, 从而可以把式(40)转换为小维度下的矩阵求逆和矩阵向量运算, 即先求解如下小维度线性方程组:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^H) \mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (42)$$

进而得到最后的  $\mathbf{x}$  闭式更新公式:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{z} \quad (43)$$

本文开发了 SPOQ-SDOA 算法. 具体步骤如算法 1 所示.

#### 算法 1 SPOQ-SDOA 算法

输入: 阵列观测数据  $\mathbf{y}(t)$ , 设置超参数  $\tau$ ,  $\alpha^0 = 0.2$ ,  $\beta = 5 \times 10^{-3}$ ,  $\eta = 40$ ,  $p = 0.25$ ,  $q = 2$ , 最大迭代次数  $W$ , 终止  $\text{tol} = 10^{-6}$ .

输出: DOA 估计的角度  $\theta^*$ .

1. 根据式(5)计算协方差矩阵的矢量化  $\mathbf{r}$ , 计算过完备矩阵  $\mathbf{A}$ , 计算初始值  $\mathbf{x}^0$  为  $\mathbf{A}^H \mathbf{r}$
2. for  $w = 1, 2, \dots, W$  do
3. 根据式(29)、式(31)和式(32)计算  $\mathbf{x}^w$  的惩罚函数的梯度  $\mathbf{G}$ , 根据公式(36)代理函数的 Hessian 矩阵  $\mathbf{B}$
4. 计算式(40)的右项  $\mathbf{b}^w = \mathbf{A}^H \mathbf{r} + \tau(\mathbf{B} \mathbf{x}^w - \mathbf{G})$
5. 计算式(40)的右项  $\hat{\mathbf{b}}^w = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}^w$
6. 计算  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^H$  减少存储空间
7. 使用 LU 分解求解  $(\mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{s} = \hat{\mathbf{b}}^w$  的解  $\mathbf{s}^w$
8. 更新解向量  $\mathbf{x}^{w+1} = \mathbf{x}^w - \mathbf{B} \mathbf{s}^w$
9. 更新  $\alpha^{w+1}$  为  $\alpha^w$  和 0.9 倍的  $\mathbf{x}^{w+1}$  绝对值最大分量之间的最小值,
10. if  $\alpha^{w+1}$  小于通过  $\text{tol}$  设置的最小值 then
11. 停止迭代, 且最优估计  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{w+1}$
12. 寻找到  $\mathbf{x}^*$  的峰值, 并将其对应到 DOA 估计的角度  $\theta^*$
13. end if
14. end for

## 4 仿真与分析

本节主要讨论 SPOQ-SDOA 算法的性能. 考虑一个阵元数目  $M = 16$  且阵元间距为半波长的均匀线阵. 为了更加全面地评估算法的性能, 本文采用随机信号模型进行仿真分析. 随机信号模型如下通过下式来生成单个频域随机源信号:

$$s(n) = a(n) + j b(n) \quad (44)$$

其中,  $a(n)$  和  $b(n)$  是均值为 0 且方差为 1 高斯分布的随机数, 多个频域快拍源信号组合为源信号矩阵  $\mathbf{s}(n) = [s_1(n), s_2(n), \dots, s_K(n)]^T$ , 通过下式来生成频域阵列接收信号:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A} \mathbf{s}(n) + \mathbf{e}(n) \quad (45)$$

其中,  $\mathbf{A}$  为方向矩阵,  $\mathbf{e}(n)$  为根据信噪比对  $\mathbf{A} \mathbf{s}(n)$  添加的

高斯白噪声. 综合考虑 DOA 估计的精度和算法计算效率, 过完备字典矩阵  $\mathbf{A}$  定义在角度扫描网格  $\Theta_\Omega = [-90^\circ, -89^\circ, \dots, 90^\circ]$  中. 以均方根误差 (Root Mean Squared Error, RMSE) 作为算法性能评估指标:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^P \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k(i) - \theta_k)^2}{PK}} \quad (46)$$

其中,  $\theta_k$  为第  $k$  个信号的实际方位角,  $\hat{\theta}_k(i)$  为对  $\theta_k$  的第  $i$  次估计值,  $P$  为蒙特卡罗仿真模拟次数.

### 4.1 不同参数 $p$ 和 $q$ 组合的算法性能对比

假设存在 3 个能级相同的源信号, 它们的方位角分别为  $[-3^\circ \ 0^\circ \ 20^\circ]$ . 阵列观测数据  $\mathbf{y}(t)$  的信噪比  $\text{SNR} = 0$  dB, 频域快拍数  $T = 50$ . 图 3 展现了不同参数  $p$  和  $q$  的组合下 SPOQ-SDOA 算法的方位谱图. 如图 3 所示, 过小的  $p$  会导致方位谱图过于稀疏, 从而无法分辨  $-3^\circ$  和  $0^\circ$  两个相邻声源; 过大的  $p$  会导致方位谱图稀疏性不足, 进而使方向图中出现大量的旁瓣, 并无法解耦  $-3^\circ$  和  $0^\circ$  两个相邻声源. 较小的  $p/q$  使式(21)中正则化项  $\Psi(\mathbf{x})$  比误差项  $\|\mathbf{r} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|_2^2$  更占主导地位, 增强方位谱图的稀疏性, 而较大的  $p/q$  使误差项  $\|\mathbf{r} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|_2^2$  比正则化项  $\Psi(\mathbf{x})$  更占主导地位, 减弱方位谱图的稀疏性.

图 4 展现了不同信噪比下参数  $p$  和  $q$  组合对 SPOQ-SDOA 算法结果的 RMSE 的影响. 仿真信号设置与上文一致, 蒙特卡罗仿真模拟次数  $P = 200$ . 如图 4 所示,  $p$  和  $q$  的选择显著影响结果的 RMSE, 过大的  $p$  和过大的  $p/q$  导致方位谱图的稀疏性过弱, 使结果的 RMSE 增大. 过小  $p$  和过小的  $p/q$  导致方位谱图的稀疏性过强, 同样使结果的 RMSE 增大. 因此, 参数  $p$  和  $q$  的组合对 SPOQ-SDOA 算法的方位谱图的影响显著, 需要根据实际情况来选择. 由图 4 可知, 当参数  $p = 0.25$ ,  $q = 2$  时, SPOQ-SDOA 算法结果的 RMSE 相对其他参数设置而言更加稳定, 所以推荐选择的  $p = 0.25$ ,  $q = 2$ .

### 4.2 与经典多快拍 DOA 估计算法性能对比

为了进一步验证所提出的 SPOQ-SDOA 算法的性能, 将其与 CBF 算法<sup>[6]</sup>、MVDR 算法<sup>[8]</sup>、MUSIC 算法<sup>[25]</sup> 和 L1-SVD 算法<sup>[14]</sup> 进行对比. 设置 3 个能级相同的独立源信号, 对应方位角分别为  $[-3^\circ \ 0^\circ \ 20^\circ]$ , 阵列观测数据  $\mathbf{y}(t)$  的信噪比  $\text{SNR} = 0$  dB, 频域快拍数  $T = 50$ . 不同算法的方位谱图对比如图 5 所示. 在图 5(a)、图 5(b) 和图 5(c) 中, 由于  $-3^\circ$  和  $0^\circ$  的两个源信号的间隔角度过小, CBF 算法、MVDR 算法和 MUSIC 算法都无法解耦这两个相邻的源信号, 只能估计出单个声源. CBF 算法的波束宽度近似为  $102^\circ/M = 6.375^\circ$ , 大于  $-3^\circ$  和  $0^\circ$  的两个相邻源信号的角度间隔  $3^\circ$ , 所以 CBF 算法无法解耦  $-3^\circ$  和  $0^\circ$  的两个相邻源信号. MVDR 算法受到较强的噪声

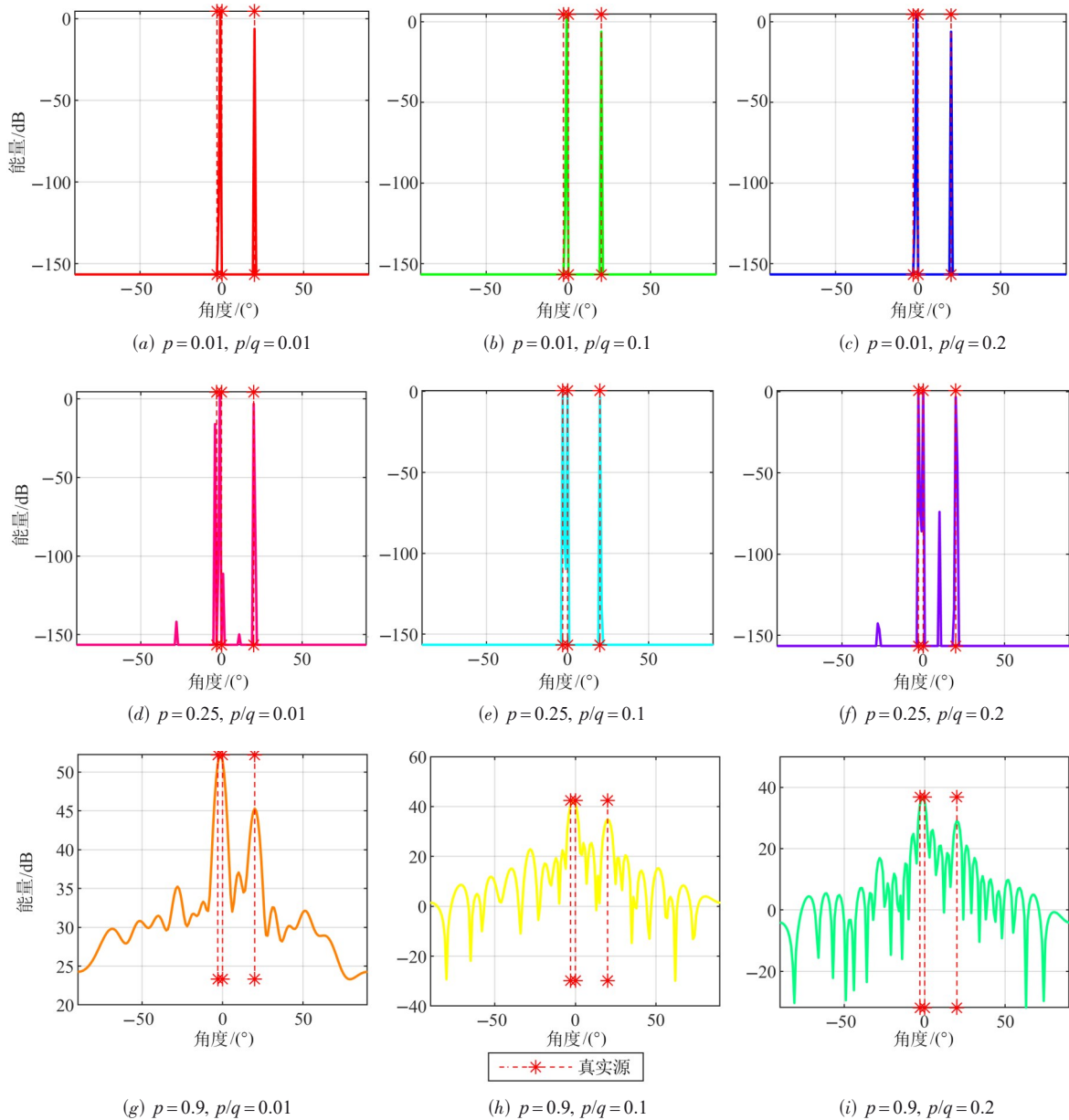


图3 不同参数 $p$ 和 $q$ 的组合下SPOQ-SDOA算法的方位谱图对比

影响,并且较少的快拍数导致其估计的协方差矩阵精度较低,所以无法解耦 $-3^\circ$ 和 $0^\circ$ 的两个相邻源信号. MUSIC算法在少快拍数条件下易受噪声的影响,从而无法解耦 $-3^\circ$ 和 $0^\circ$ 的两个相邻源信号.图5(d)的L1-SVD算法虽然识别出 $-3^\circ$ 和 $0^\circ$ 的两个相邻源信号,但由于 $\ell_1$ 范数无法精确描述声源的空域稀疏结构,导致其无法对 $-3^\circ$ 和 $0^\circ$ 相邻源信号的方位进行准确的估计,并且受到噪声的干扰,其方位谱图中出现了大量的伪峰. SPOQ-SDOA算法不仅具有尺度不变性,精确地描述声源的空域稀疏结构,而且可以调节光滑性,保障运算高效.因此,在图5(e)中,SPOQ-SDOA算法不仅可以解耦 $-3^\circ$ 和 $0^\circ$ 相邻的源信号,并且估计出的声源方位较为准

确,另外方位谱图中除估计的目标源外,不存在伪源的干扰.

对比不同信噪比下不同算法的性能.考虑独立源和相干源两种情况.设置信噪比SNR以2 dB的间隔从 $-10$  dB变化到 $10$  dB,其余设置与上文一致,蒙特卡罗仿真模拟次数 $P=200$ ,得到的结果如图6(a)和(b)所示.图6(a)为独立源信号下不同算法结果的RMSE随不同SNR的变化曲线.观察图6(a),这5种算法结果的RMSE随SNR的增大而减小. CBF算法受到波束宽度的限制无法解耦 $-3^\circ$ 和 $0^\circ$ 的两个相邻源信号, MVDR算法受较强的噪声和较少的快拍数影响也无法解耦相邻的两个源信号,所以这两种算法的估计精度较低.

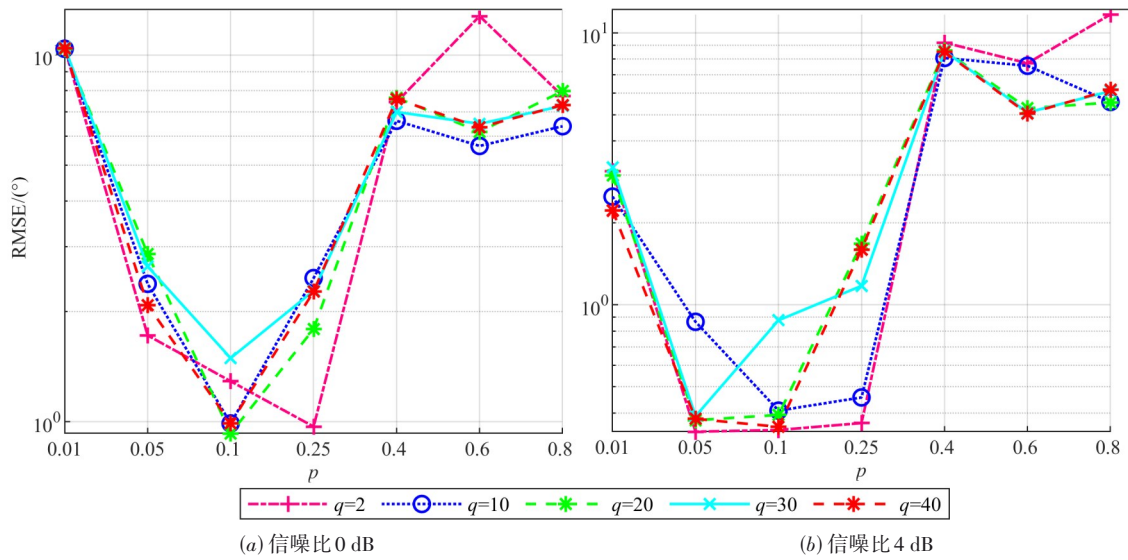


图4 不同信噪比下参数 $p$ 和 $q$ 的选择对SPOQ-SDOA算法结果的RMSE的影响

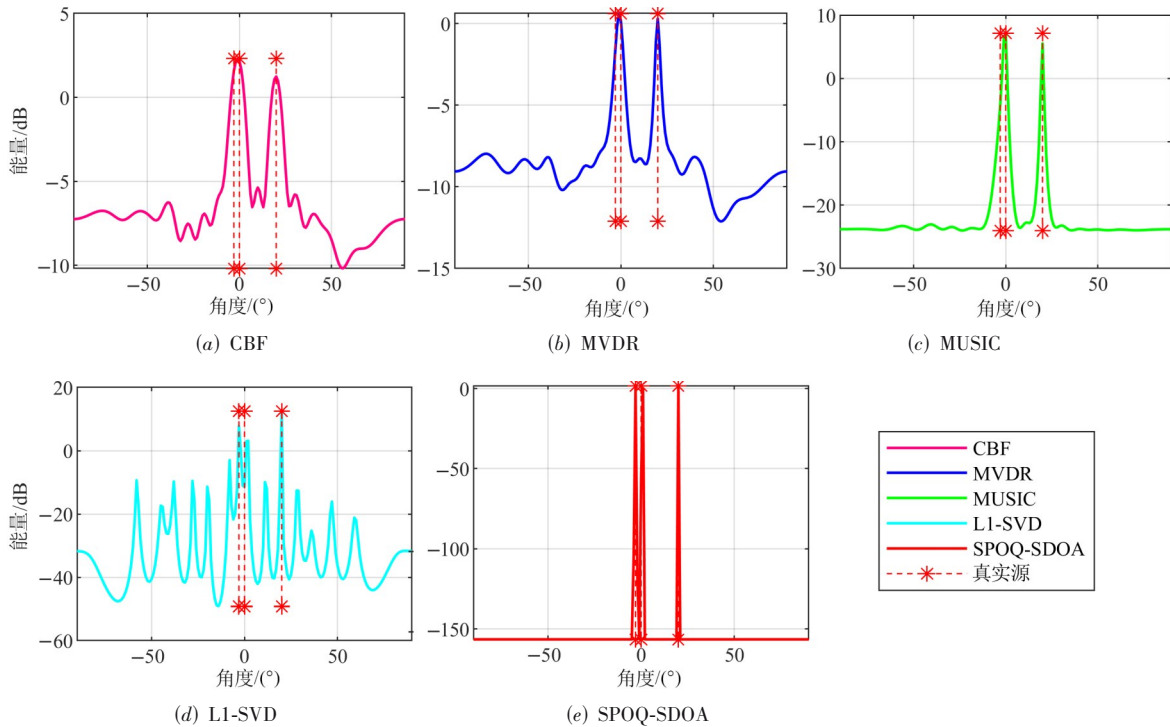


图5 信噪比0 dB下不同算法的方位谱图对比

MUSIC算法在少快拍下易受噪声的影响,因此其结果的RMSE随SNR增大而急剧减小.L1-SVD算法使用 $\ell_1$ 范数作为惩罚函数,无法精确描述声源的空域稀疏结构,导致其无法准确地估计目标源方位.SPOQ-SDOA算法使用光滑可调的尺度不变的SPOQ范数描述声源的空域稀疏结构,其为5种算法中的估计精度最高的算法.图6(b)为相干度为0.6的源信号下不同算法结果的RMSE随不同SNR的变化曲线.虽然相关源信号使算法DOA估计难度增加,不同算法的性能都出现了不同

程度的下降,但是SPOQ-SDOA算法的性能依然优于其他对比算法.

对比不同快拍数下不同算法的性能.阵列观测数据 $\mathbf{y}(t)$ 的信噪比 $\text{SNR}=0\text{ dB}$ ,频域快拍数 $T$ 以10为间隔从20变化到100.图6(c)展现了不同算法结果的RMSE随不同快拍数的变化曲线.因为 $-3^\circ$ 和 $0^\circ$ 的相邻源信号的角度间隔过小,所以CBF算法、MVDR算法和MUSIC算法的估计精度并没有随快拍数的增加而明显下降.L1-SVD算法和SPOQ-SDOA算法都存在随

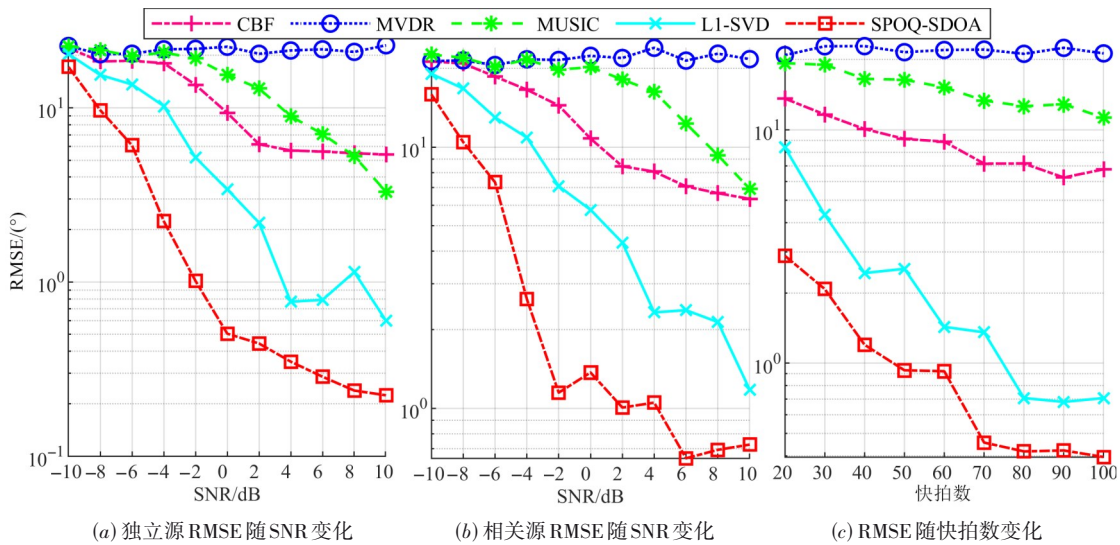


图6 不同算法结果的RMSE随不同SNR和快拍数的变化曲线

快拍数的增多而估计精度提高,并且 SPOQ-SDOA 算法结果的 RMSE 在任何快拍数下都低于其余 4 种算法.

### 5 海洋数据结果

通过真实海洋数据验证所提出算法的实际性能. 实验数据使用 SWellEx-96 海试实验 (<http://swellx96.ucsd.edu>) 中 S5 事件的南北水平线阵的数据<sup>[26]</sup>. 海洋声速为 1 488 m/s. 实验使用全波可部署系统 (AODS) 在海底部署北水平线阵 (HLA North) 和南水平线阵 (HLA South), 其空间分布如图 7 所示, 阵列的稀疏采样 (两个水平线阵存在相邻阵元间距过大的问题) 会导致全阵元水平线阵的输出波束图存在较强的旁瓣干扰, 为此本节只选用北水平线阵的从西到东第 5~14 个阵元, 共 10 个阵元. 同理本节只选用南水平线阵的从西到东第 2~13 个阵元, 共 12 个阵元. 传感器的采样频率为

3 276.8 Hz, FFT 的点数  $J=512$ , 频域快拍数  $T=100$ . 此次实验中, 源船拖曳两个声源, 分别是在 45 m 海深的深声源和在 9 m 海深的浅声源. 声源发射的信号频率为 50~400 Hz. 因为高频信号易在海洋中衰减且过低频信号不能满足半波长布阵要求, 所有只使用 150~350 Hz 的频点信号进行 DOA 估计.

分别利用 CBF 算法、MVDR 算法、MUSIC 算法、L1-SVD 算法和 SPOQ-SDOA 算法对实验数据做时间方位记录. 图 8 为北水平线阵的不同算法的时间方位记录. 图 8(a) 为 CBF 算法的时间方位记录, 由于 CBF 算法空间分辨率低, 所以其结果的主瓣宽度也较宽, 同时因为存在噪声的影响, 导致其结果中背景噪声和伪源的大量出现. 图 8(b) 为 MVDR 算法的时间方位记录, 由于噪声的能量较强, MVDR 算法虽然识别出声源方位, 但是其结果存在较强背景噪声和伪源. 图 8(c) 为 MUSIC 算法的时间方位记录, 较多的快拍数保证

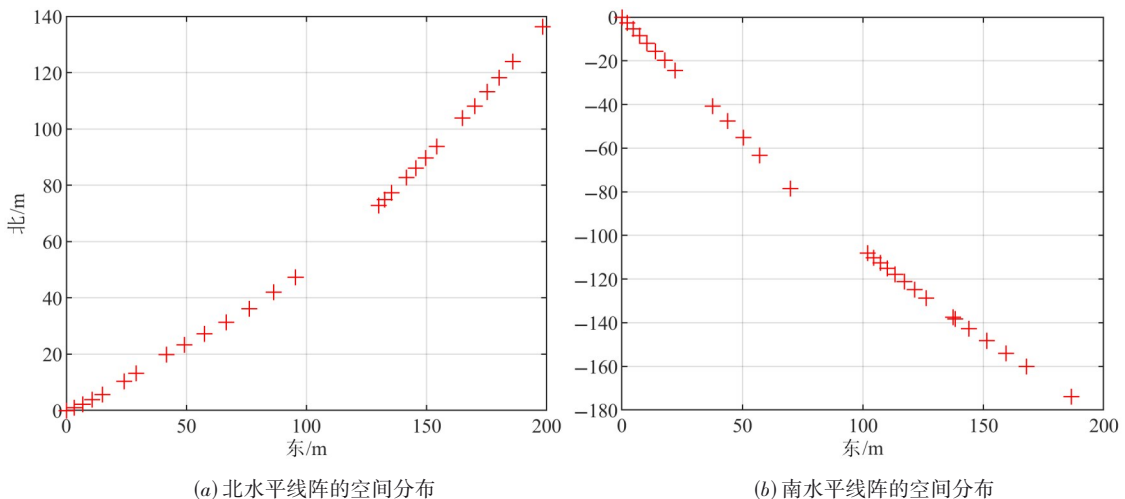


图7 南北水平线阵的空间分布

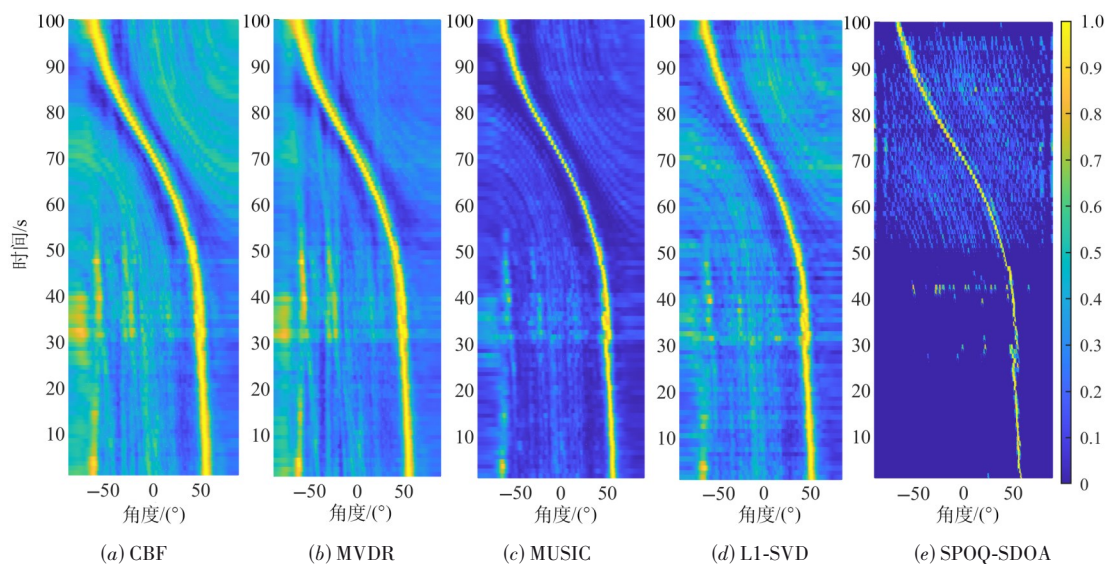


图8 北水平线阵的时间方位记录

MUSIC算法的性能,因此MUSIC算法的结果主瓣较窄,并且其对噪声有较好的抑制能力,所以目标声源比较明显.但是,MUSIC算法对背景噪声的抑制能力还是不足.图8(d)为L1-SVD算法的时间方位记录,L1-SVD算法识别单个声源时,只能使用经SVD处理后的接收信号矩阵的第一列,进而无法联系不同解的稀疏性,所以其性能存在明显下降,同时L1-SVD使用的 $\ell_1$ 范数不具备尺度不变性,其无法精确描述声源的空域稀疏结构,导致L1-SVD的结果中伪源和背景噪声的存在.

图8(e)为SPOQ-SDOA算法的时间方位记录,由于SPOQ-SDOA算法使用的SPOQ范数具有尺度不变性和光滑可调性,在保证运算效率的同时,精确描述声源的空域稀疏结构,因此其结果中目标明显,噪点较少,与其他4种算法相比,SPOQ-SDOA算法的目标声源更加清晰,对背景噪声的抑制能力也更强大.图9为南水平线阵的不同算法的时间方位记录,其结果与北水平线阵的结果大概一致,并且SPOQ-SDOA算法的时间方位记录消除了 $0^\circ$ 附近一条较为明显的在干扰声源轨迹.

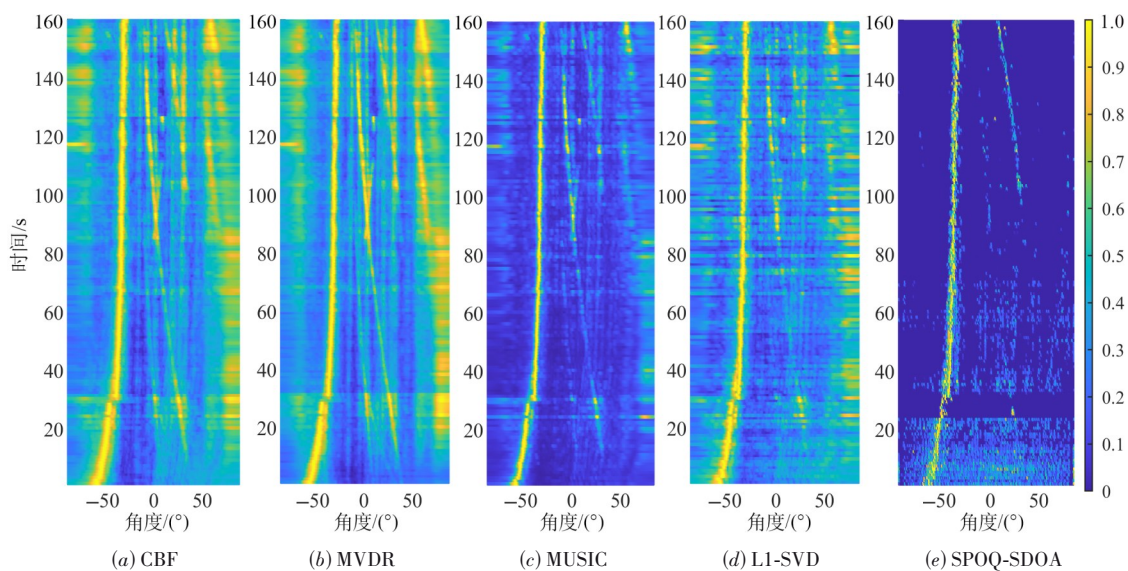


图9 南水平线阵的时间方位记录

## 6 结论

本文提出了尺度不变范数比正则的稀疏DOA估计方法.本方法通过使用具有尺度不变性的SPOQ范数

来逼近理想的 $\ell_0$ 范数,根据其光滑可调的特性,在保障运算效率的同时,精确地描述了声源在空间分布的稀疏模式.仿真分析证明了:(1)SPOQ范数的参数 $p$ 和 $q$

的组合对 SPOQ-SDOA 算法的方位谱图的影响显著, 需要根据实际情况来选择, 推荐选择  $p=0.25$  和  $q=2$ ; (2) 与 CBF 算法、MVDR 算法、MUSIC 算法和 L1-SVD 算法相比, 本文提出的 SPOQ-SDOA 算法的方位谱图中真实源方位清晰, 不存在伪源干扰, 并且本文提出的算法在不同 SNR 和快拍数下有更好的 DOA 估计精度和更好的表现性能. 同时, SWellEx-96 海试实验中的 S5 事件分析结果证明了, 与前面 4 种算法相比, 本文提出的 SPOQ-SDOA 算法的时间方位记录有目标清晰连续集中, 噪声影响小的优点. 通过仿真分析和海试实验验证, 稀疏 DOA 估计中的稀疏惩罚函数在保证可以精确求解的条件下, 更加有效地逼近  $\ell_0$  范数, 其 DOA 估计的结果也就更加准确. 而如何选择更加逼近  $\ell_0$  范数的稀疏惩罚函数是未来研究工作的重点. 但是, 稀疏重构算法对声源的空间分辨能力受制于两个主要因素: 第一个主要因素是声源的空域稀疏结构是否存在, 如果不存在, 稀疏重构算法就无法进行高精度的 DOA 估计; 第二个主要因素是声源相邻的角度间隔, 声源相邻角度间隔过小, 无法满足有限等距性质, 稀疏重构算法也无法进行高精度的 DOA 估计.

#### 参考文献

- [1] LIU Y L, CHU Z G, YANG Y. Iterative Vandermonde decomposition and shrinkage-thresholding based two-dimensional grid-free compressive beamforming[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2020, 148(3): EL301-EL306.
- [2] TRABATTONI A, BARRUOL G, DREO R, et al. Orienting and locating ocean-bottom seismometers from ship noise analysis[J]. Geophysical Journal International, 2020, 220(3): 1774-1790.
- [3] 陈显舟, 杨旭, 方海, 等. 基于阵列流型盲辨识的 MIMO 雷达二维 DOD 和二维 DOA 联合估计[J]. 电子学报, 2018, 46(9): 2270-2275.  
CHEN X Z, YANG X, FANG H, et al. 2-D DOD and 2-D DOA estimation in bistatic MIMO radar based on blind identification of array manifold[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(9): 2270-2275. (in Chinese)
- [4] BIANCO M J, GANNOT S, FERNANDEZ-GRANDE E, et al. Semi-supervised source localization in reverberant environments with deep generative modeling[J]. IEEE Access, 2021, 9: 84956-84970.
- [5] 金勇, 刘先省, 黄建国, 等. MIMO 声纳方位估计子空间拟合快速算法[J]. 电子学报, 2013, 41(10): 1964-1968.  
JIN Y, LIU X X, HUANG J G, et al. Subspace fitting DOA estimator fast algorithm by MIMO sonar[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10): 1964-1968. (in Chinese)
- [6] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing research: The parametric approach[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94.
- [7] 季浩然, 马晓川, 张舒皓, 等. 功率受限的常规波束形成后处理拟合方法[J]. 声学学报, 2020, 45(1): 1-14.  
JI H R, MA X C, ZHANG S H, et al. Power constraint conventional beamforming post-processing fitting method[J]. Acta Acustica, 2020, 45(1): 1-14. (in Chinese)
- [8] 王超, 笕良龙, 韩梅, 等. 单矢量水听器稀疏近似最小方差方位估计算法[J]. 声学学报, 2021, 46(6): 1050-1058.  
WANG C, DA L L, HAN M, et al. Single vector hydrophone sparse asymptotic minimum variance bearing estimation algorithm[J]. Acta Acustica, 2021, 46(6): 1050-1058. (in Chinese)
- [9] 陈志菲, 孙进才, 侯宏. 宽带 DOA 估计的类 MUSIC 波束形成算法[J]. 电子学报, 2011, 39(6): 1257-1260.  
CHEN Z F, SUN J C, HOU H. MUSIC-like beamforming method for wideband DOA estimation[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(6): 1257-1260. (in Chinese)
- [10] 冯西安, 寇思玮, 谭伟杰, 等. 水声信号处理中的稀疏表示理论及应用[J]. 电子学报, 2021, 49(9): 1840-1851.  
FENG X, KOU S W, TAN W J, et al. Sparse representation theory and application in underwater acoustic signal processing[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(9): 1840-1851. (in Chinese)
- [11] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [12] GERSTOFT P, MECKLENBRÄUKER C F, SEONG W, et al. Introduction to compressive sensing in acoustics[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2018, 143(6): 3731-3736.
- [13] GORODNITSKY I F, RAO B D. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: A re-weighted minimum norm algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(3): 600-616.
- [14] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLISKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3010-3022.
- [15] 王洪雁, 于若男. 基于稀疏和低秩恢复的稳健 DOA 估计方法[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(3): 589-596.  
WANG H Y, YU R N. Sparse and low rank recovery based robust DOA estimation method [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2020, 42(3): 589-596.
- [16] LIU L T, RAO Z J. An adaptive lp norm minimization al-

gorithm for direction of arrival estimation[J]. Remote Sensing, 2022, 14(3): 766.

- [17] LIU Q, SO H C, GU Y T. Off-grid DOA estimation with nonconvex regularization via joint sparse representation [J]. Signal Processing, 2017, 140: 171-176.
- [18] YANG Y X, DU Z H, WANG Y, et al. Convex compressive beamforming with nonconvex sparse regularization [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2021, 149(2): 1125-1137.
- [19] 丁飞龙, 迟骋, 李宇, 等. 非凸稀疏约束的多快拍压缩波束形成[J]. 电子与信息学报, 2022, 44(6): 2071-2079.  
DING F L, CHI C, LI Y, et al. Multiple-snapshot compressive beamforming with non-convex sparse constraints [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2022, 44(6): 2071-2079. (in Chinese)
- [20] DONG Y Y, DONG C X, LIU W, et al. Generalized  $\ell_2$ - $\ell_p$  minimization based DOA estimation for sources with known waveforms in impulsive noise[J]. Signal Processing, 2022, 190: 108313.
- [21] CHERNI A, CHOUZENOUX E, DUVAL L, et al. SPOQ  $\ell_p$ -over- $\ell_q$  regularization for sparse signal recovery applied to mass spectrometry[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 6070-6084.
- [22] YANG Y X, ZHANG Y H, YANG L. Wideband sparse spatial spectrum estimation using matrix filter with nulling in a strong interference environment[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2018, 143(6): 3891-3898.
- [23] REPETTI A, PHAM M Q, DUVAL L, et al. Euclid in a taxicab: Sparse blind deconvolution with smoothed  $\ell_1/\ell_2$  regularization[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(5): 539-543.
- [24] GOLUB G H, VAN LOAN C F. Matrix Computations [M]. 4th ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013.
- [25] 王娟, 王彤, 吴建新. 一种适用于小样本的迭代多重信号分类算法[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(2): 445-451.  
WANG J, WANG T, WU J X. Iterative multiple signal classification algorithm with small sample size[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2020, 42(2): 445-451. (in Chinese)
- [26] SHEN Y N, PAN X A, ZHENG Z, et al. Matched-field geoacoustic inversion based on radial basis function neural network[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2020, 148(5): 3279-3290.

## 作者简介



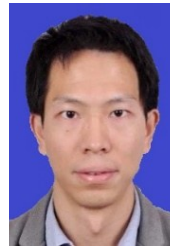
王圣杰 男, 1997年9月出生于江苏省南通市. 2020年毕业于江苏科技大学机械设计制造及其自动化系. 主要研究方向为阵列信号处理方面研究工作.

E-mail: 18862639622@163.com



张晗 女, 1988年12月出生于河南省南阳市. 2017年获西安交通大学机械工程学科博士学位. 现为长安大学工程机械学院副教授. 主要研究方向为稀疏信号处理与优化、深度学习、机械健康监测与故障诊断.

E-mail: zhanghan@chd.edu.cn



杜朝辉 男, 1985年9月出生于四川省达州市. 2017年获西安交通大学机械工程学科博士学位. 现为西北工业大学航海学院副教授. 主要研究方向为机器学习、稀疏优化理论以及针对关键机械系统和海洋信号的阵列信号处理.

E-mail: duzh@nwpu.edu.cn