

# FIR 数字滤波器幅频响应约束最大加权相位误差最小化设计

王 路<sup>1</sup>, 赖春露<sup>2</sup>

(1. 山东大学(威海)网络与信息管理中心, 山东威海 264209;  
2. 哈尔滨工业大学(威海)信息与电气工程学院, 山东威海 264209)

**摘 要:** 多数信号滤波应用,对滤波器幅频响应的要求高于相频响应. 本文研究了满足幅频响应约束的有限脉冲响应(Infinite Impulse Response, FIR)数字滤波器设计,提出了最大加权相位误差最小化方法. 用凸的椭圆误差约束代替非凸的幅值误差约束,将设计问题转化为凸问题;通过与二分技术结合,提出了给定权函数的幅值误差约束最大加权相位误差最小化设计的求解算法. 以此算法为核心,构建了迭代重加权最大加权相位误差最小化算法,其中的权函数不再固定,而是基于修改的群延迟误差包络线在迭代中不断更新. 权函数收敛后,所得滤波器具有近似等纹波的群延迟误差,最大群延迟误差得到了有效减小. 仿真实验表明,与现有相位误差约束最大幅值误差最小化方法相比,得到的 FIR 滤波器具有更小的最大相位误差和最大群延迟误差.

**关键词:** FIR 滤波器; 幅频响应; 相频响应; 二分法; 椭圆误差约束; 迭代重加权技术

**中图分类号:** TN79      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2018)11-2781-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.11.028

## Design of FIR Digital Filters by a Magnitude-Response Constrained Minimax Weighted Phase Error Method

WANG Lu<sup>1</sup>, LAI Chun-lu<sup>2</sup>

(1. Network and Information Management Center, Shandong University(Weihai), Weihai, Shandong 264209, China;  
2. School of Information and Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology(Weihai), Weihai, Shandong 264209, China)

**Abstract:** In many signal filtering applications, the requirement on the magnitude response of the filter is higher than that on the phase response. The design of magnitude-response constrained finite impulse response (FIR) filters was considered and a minimax weighted phase error design method was proposed. Replacing the nonconvex magnitude error constraint with an elliptic error constraint makes the design problem a convex one. Incorporating with a bisection technique, a design algorithm was firstly obtained for the case with a preset phase-error weight. Using this algorithm as the iteration core, an iterative reweighted minimax phase error design algorithm was constructed, where the phase-error weight is not fixed but updated using a modified envelop of the group-delay error function. After the iterative algorithm converges, the resultant filter has a near equiripple group-delay error and a reduced maximum group-delay error. Experiments demonstrate that the proposed method has obtained smaller passband phase error and group-delay error than the existing phase-error constrained minimax magnitude error method.

**Key words:** FIR filter; magnitude response; phase response; bisection method; elliptic error constraint; iterative reweighting technique

### 1 引言

有限脉冲响应(Finite Impulse Response, FIR)数字

滤波器,由于其内禀稳定且容易实现精确线性相位,在数字通信、图像处理、模式识别等诸多领域得到了广泛应用<sup>[1]</sup>. 但精确线性相位的 FIR 滤波器,群延迟大约是

滤波器长度的一半. 当期望频率响应过渡带较窄时, 需用较长的脉冲响应去逼近, 导致滤波器较大的群延迟, 不能满足某些场合的需求. 人们转而研究任意幅频和相频响应的 FIR 滤波器, 通过逼近具有低群延迟的频率特性, 满足对滤波器低群延迟的要求<sup>[2-17]</sup>. 相应的 FIR 滤波器设计问题, 是复逼近问题, 即在一定准则下, 使滤波器的复值频率响应最优逼近其期望响应.

传统的任意幅频和相频响应 FIR 滤波器的设计方法, 对频率响应误差进行约束或最小化其某个范数<sup>[2-4,8,10-12]</sup>, 其优点是所形成的优化问题是容易求解的凸问题<sup>[2]</sup>. 缺点是不能对幅频响应误差(幅值误差)和相频响应误差(相位误差)进行独立控制, 最大幅值误差与最大相位误差大小相当, 且通常在通带边缘有很大的群延迟误差<sup>[5]</sup>. 另一类方法是在相位误差约束下, 最小化频率响应误差或幅值误差的范数<sup>[5-8,14]</sup>. 该方法可对幅值误差和相位误差独立控制, 并满足对相位误差的硬性要求. 若是对频率响应误差范数最小化, 形成的优化问题是凸的<sup>[5]</sup>; 若是对幅值误差范数最小化, 优化问题则是非凸的<sup>[8]</sup>. 文献[7]用椭圆误差代替频率响应误差, 改进了设计结果. 通过施加合适的相位误差上界函数, 可有效减小最大群延迟误差<sup>[5]</sup>; 或利用群延迟误差对相位误差上界进行自动更新, 使群延迟误差近似等纹波<sup>[6,14]</sup>.

考虑到多数应用对滤波器幅频响应的硬性要求, 本文在幅值误差约束下, 最小化最大加权相位误差. 由于幅值误差约束是非凸的, 本文用椭圆误差约束<sup>[7]</sup>替换幅值误差约束, 将非凸优化问题转化为凸问题. 为了求解椭圆误差约束最大加权相位误差最小化问题, 本文应用二分法将其转化为圆约束和线性约束可行性问题, 通过求解一系列这样的可行性问题, 得到满足幅值误差约束且最大加权相位误差最小的滤波器. 同时, 利用群延迟误差信息自动更新相位误差的权函数, 使群延迟误差也得到有效控制. 设计实例及与现有方法的比较, 表明了本文方法的有效性.

## 2 设计问题描述

考虑长度为  $N$ 、脉冲响应系数为  $\{h_n, n=0, 1, \dots, N-1\}$  的 FIR 滤波器, 其频率响应可表示为:

$$H(e^{j\omega}, \mathbf{h}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j\omega n} = \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{h} = \mathbf{e}_R^T(\omega) \mathbf{h} + j \mathbf{e}_I^T(\omega) \mathbf{h} \quad (1)$$

上式中, 上标 T 表示矩阵或向量的转置运算,  $\omega$  表示数字角频率,  $j$  为虚数单位,  $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T$ ,  $\mathbf{e}(e^{j\omega}) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j(N-1)\omega}]^T$ ,  $\mathbf{e}_R(\omega)$  和  $\mathbf{e}_I(\omega)$  分别是  $\mathbf{e}(\omega)$  的实部和虚部.

设  $D(e^{j\omega})$  是定义在频率集合  $\Omega \subset [0, \pi]$  上的期望

频率响应,  $D_R(\omega)$  和  $D_I(\omega)$  是  $D(e^{j\omega})$  的实部和虚部, 则滤波器的频率响应误差定义为:

$$E_c(e^{j\omega}, \mathbf{h}) \equiv H(e^{j\omega}, \mathbf{h}) - D(e^{j\omega}) = \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{h} - D(e^{j\omega}) \\ = [\mathbf{e}_R^T(\omega) \mathbf{h} - D_R(\omega)] + j[\mathbf{e}_I^T(\omega) \mathbf{h} - D_I(\omega)] \quad (2a)$$

滤波器的幅值误差、相位误差和群延迟误差分别定义为:

$$E_m(\omega, \mathbf{h}) \equiv |H(e^{j\omega}, \mathbf{h})| - |D(e^{j\omega})| \\ = \sqrt{[\mathbf{e}_R^T(\omega) \mathbf{h}]^2 + [\mathbf{e}_I^T(\omega) \mathbf{h}]^2} - |D(e^{j\omega})| \quad (2b)$$

$$E_p(\omega, \mathbf{h}) \equiv \phi(\omega, \mathbf{h}) - \phi_D(\omega) \quad (2c)$$

$$E_g(\omega, \mathbf{h}) \equiv \tau(\omega, \mathbf{h}) - \tau_D(\omega) \quad (2d)$$

其中,  $|H(e^{j\omega}, \mathbf{h})|$ 、 $\phi(\omega, \mathbf{h})$  及  $\tau(\omega, \mathbf{h})$  分别表示滤波器  $\mathbf{h}$  之实际频率响应  $H(e^{j\omega}, \mathbf{h})$  的幅值、相位和群延迟,  $|D(e^{j\omega})|$ 、 $\phi_D(\omega)$  及  $\tau_D(\omega)$  则分别表示期望频率响应  $D(e^{j\omega})$  的幅值、相位和群延迟.

$$|H(e^{j\omega}, \mathbf{h})| = \sqrt{[\mathbf{e}_R^T(\omega) \mathbf{h}]^2 + [\mathbf{e}_I^T(\omega) \mathbf{h}]^2} \quad (3)$$

$$\phi(\omega, \mathbf{h}) = \arctan \left\{ \frac{\mathbf{e}_I^T(\omega) \mathbf{h}}{\mathbf{e}_R^T(\omega) \mathbf{h}} \right\} \quad (4)$$

$$\tau(\omega, \mathbf{h}) = -\frac{d}{d\omega} \phi(\omega, \mathbf{h}) \quad (5)$$

FIR 滤波器幅值误差约束最大加权相位误差最小化设计, 即在通带和阻带最大幅值误差不超过给定值的前提下, 使滤波器的通带最大加权相位误差最小, 数学上描述为:

$$\min_h \max_{\omega \in \Omega_p} W(\omega) |E_p(\omega, \mathbf{h})| \quad (6a)$$

$$\text{s. t. : } |E_m(\omega, \mathbf{h})| \leq \rho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_p \cup \Omega_s \quad (6b)$$

上式中,  $\Omega_p$  和  $\Omega_s$  代表滤波器的通带和阻带,  $W(\omega) > 0$  为控制通带不同频率上相位误差相对大小的权函数,  $\rho(\omega) > 0$  是幅值误差的上界函数. 相位误差权函数  $W(\omega)$  可事先给定, 也通过迭代更新自动选择. 如果令通带最大加权相位误差为  $\gamma$ , 即:

$$\gamma = \max_{\omega \in \Omega_p} W(\omega) |E_p(\omega, \mathbf{h})| \quad (7)$$

则问题式(6)可重新表述为:

$$\min_{h, \gamma} \gamma \quad (8a)$$

$$\text{s. t. : } |E_p(\omega, \mathbf{h})| \leq \gamma W^{-1}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_p \quad (8b)$$

$$|E_m(\omega, \mathbf{h})| \leq \rho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_p \cup \Omega_s \quad (8c)$$

由于式(8c)中非凸的幅值误差约束, 问题式(8)是一个难以求解的非凸问题. 下一节将对这个非凸约束进行处理, 使之近似为一个凸约束, 然后给出问题式(8)的迭代求解算法.

## 3 设计算法及实例

为了得到问题(8)的最优解, 本文在一个区间  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$  ( $0 < \gamma_{\min} < \gamma_{\max}$ ) 中, 应用二分法迭代搜寻最大

加权相位误差  $\gamma$  的最小值  $\gamma^*$ . 在第  $k$  次迭代, 我们令  $\gamma(k) = (\gamma_{\min} + \gamma_{\max})/2$ , 然后求解以下可行性问题:

$$\text{find } \mathbf{h} \quad (9a)$$

$$\text{such that } |E_p(\omega, \mathbf{h})| \leq \gamma(k) W^{-1}(\omega), \forall \omega \in \Omega_p \quad (9b)$$

$$|E_m(\omega, \mathbf{h})| \leq \rho(\omega), \forall \omega \in \Omega_p \cup \Omega_s \quad (9c)$$

若以上问题可行, 则让  $\gamma_{\max} = \gamma(k)$ , 反之让  $\gamma_{\min} = \gamma(k)$ , 以减小搜索区间, 进行下一次迭代. 如此反复, 直至搜索区间充分小.

需要指出, 在任意通带频率点  $\omega \in \Omega_p$  上, 相位误差约束式(9b)和幅值误差约束式(9c)形成的约束域, 在频率响应复平面上是一个非凸的扇形, 如图 1(a)所示. 从而, 可行性问题式(9)是一个难以直接求解的非凸问题. 本文将通带频率点上非凸的幅值误差约束式(9c)替换为凸的椭圆误差约束<sup>[7]</sup>.

$$|E_\lambda(e^{j\omega}, \mathbf{h})| \leq \rho(\omega), \forall \omega \in \Omega_p \quad (10a)$$

其中

$$E_\lambda(e^{j\omega}, \mathbf{h}) = \text{Re}[e^{-j\varphi_d(\omega)} E_c(e^{j\omega}, \mathbf{h})] + j\text{Im}[e^{-j\varphi_d(\omega)} E_c(e^{j\omega}, \mathbf{h})]/\lambda \quad (10b)$$

对于给定的  $\omega \in \Omega_p$ , 式(10a)的约束域如图 1(b)所示, 是一个以  $D(e^{j\omega})$  为圆心、 $D(e^{j\omega})$  方向为短轴、垂直  $D(e^{j\omega})$  的方向为长轴的一个椭圆, 其中模型参数  $\lambda \geq 1$  就是该椭圆的长短轴之长度比. 参数  $\lambda$  对设计结果有影响, 稍大于 1 的  $\lambda$  对减小幅值误差和相位误差有帮助, 但过大的  $\lambda$  又不利于逼近误差的减小, 比较合适的取值范围是  $1 < \lambda < 10$ . 称式(10b)定义的  $E_\lambda(e^{j\omega}, \mathbf{h})$  为椭圆误差, 称式(10a)定义的约束为椭圆误差约束.

由图 1(b)可看出, 对于通带频率点  $\omega \in \Omega_p$ , 由相位误差约束式(9b)和椭圆误差约束式(10a)形成的约束域是凸的, 且当  $\rho(\omega)$  和  $\gamma W^{-1}(\omega)$  均较小时, 该约束域非常接近由相位误差约束式(9b)和幅值误差约束式(9c)形成的扇形区域, 是该扇形区域很好的一个近似. 用椭圆误差约束替换式(9c)中通带频率点的幅值误差约束, 并注意到阻带上  $E_m(\omega, \mathbf{h}) = |E_c(e^{j\omega}, \mathbf{h})|$ , 可行性问题式(9)变成:

$$\text{find } \mathbf{h} \quad (11a)$$

$$\text{such that } |E_p(\omega, \mathbf{h})| \leq \gamma(k) W^{-1}(\omega), \forall \omega \in \Omega_p \quad (11b)$$

$$|\text{Re}[e^{-j\varphi_d(\omega)} E_c(e^{j\omega}, \mathbf{h})] + j\text{Im}[e^{-j\varphi_d(\omega)} E_c(e^{j\omega}, \mathbf{h})]/\lambda| \leq \rho(\omega), \quad (11c)$$

$$\forall \omega \in \Omega_p$$

$$|E_c(e^{j\omega}, \mathbf{h})| \leq \rho(\omega), \forall \omega \in \Omega_s \quad (11d)$$

或者, 将式(2a)、式(2c)及式(4)代入, 并增加任意一个目标函数如正定二次函数  $0.5\mathbf{h}^T\mathbf{h}$ , 将以上可行性问题转化为以下可直接调用文献[5]附录给出的 CPCLS\_GI

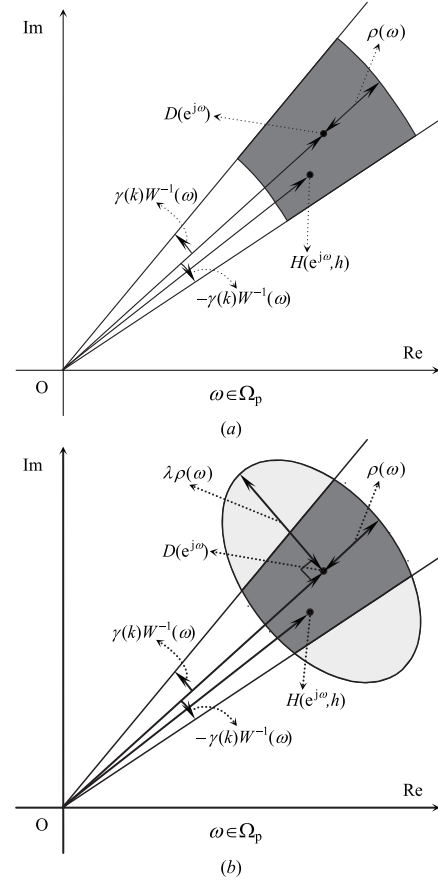


图1 (a) 幅值误差约束及相位误差约束域;  
(b) 椭圆误差约束及相位误差约束域

程序进行求解的线性和圆约束二次规划问题:

$$\min_{\mathbf{h}} 0.5\mathbf{h}^T\mathbf{h} \quad (12a)$$

$$\text{s. t. } |\text{Re}[e^{-j\varphi_d(\omega)} \mathbf{e}^T(e^{j\omega})\mathbf{h}] - |D(e^{j\omega})| + j\lambda^{-1}\text{Im}[e^{-j\varphi_d(\omega)} \mathbf{e}^T(e^{j\omega})\mathbf{h}]| \leq \rho(\omega), \forall \omega \in \Omega_p \quad (12b)$$

$$|\mathbf{e}^T(e^{j\omega})\mathbf{h}| \leq \rho(\omega), \forall \omega \in \Omega_s \quad (12c)$$

$$-\sin[\phi_D(\omega) + \gamma(k)W^{-1}(\omega)]\mathbf{e}_R^T(\omega)\mathbf{h} + \cos[\phi_D(\omega) + \gamma(k)W^{-1}(\omega)]\mathbf{e}_I^T(\omega)\mathbf{h} \leq 0 \quad (12d)$$

$$\sin[\phi_D(\omega) - \gamma(k)W^{-1}(\omega)]\mathbf{e}_R^T(\omega)\mathbf{h} - \cos[\phi_D(\omega) - \gamma(k)W^{-1}(\omega)]\mathbf{e}_I^T(\omega)\mathbf{h} \leq 0 \quad (12e)$$

综合以上讨论, 给定通带  $\Omega_p$  和阻带  $\Omega_s$ 、期望频率响应  $D(e^{j\omega})$ 、幅值误差上界函数  $\rho(\omega)$ 、相位误差权函数  $W(\omega)$  及滤波器长度  $N$ , 本文的幅值误差约束最大加权相位误差最小化设计问题式(6)的求解算法如算法 1.

#### 算法 1 幅值误差约束最大加权相位误差最小化算法

- (1) 取充分小的  $\gamma_{\min} > 0$  和充分大的  $\gamma_{\max} > \gamma_{\min}$ , 如  $\gamma_{\min} = 0, \gamma_{\max} = \pi/2$ ; 给定算法终止参数  $\epsilon > 0$  及椭圆误差模型长短轴长度比  $\lambda$ . 取初始迭代次数  $k = 0$ .

- (2) 令  $k=k+1$ ,  $\gamma(k)=[\gamma_{\min}+\gamma_{\max}]/2$ . 用文献[5]的 CPCLS\_GI 程序求解线性和圆约束二次规划问题(12).
- (3) 若问题(12)可行, 记其最优解为  $h(k)$ , 并令  $\gamma_{\max}=\gamma(k)$ ; 否则, 让  $\gamma_{\min}=\gamma(k)$ .
- (4) 若  $(\gamma_{\max}-\gamma_{\min})/\gamma_{\max} > \varepsilon$ , 返回第(2)步.
- (5) 结束程序, 输出最优滤波器  $h^*=h(k)$ .

为了验证算法1的有效性, 用该算法设计一个带通滤波器. 设计时, 所有频带都基于  $[0, \pi]$  上的频率栅格  $\Omega = \{k\pi/(10N) \mid k=0, 1, \dots, 10N\}$  进行离散化, 椭圆模型长短轴比  $\lambda$ 、停止参数  $\varepsilon$  分别取 3 和  $10^{-6}$ . 根据给定的  $\Omega_p$ 、 $\Omega_s$ 、 $D(e^{j\omega})$ 、 $\rho(\omega)$ 、 $W(\omega)$  及  $N$  等要求, 用算法1设计后, 计算所得滤波器  $h^*$  的性能, 包括幅频响应、幅值误差、通带相位误差和通带群延迟误差等响应曲线, 以及最大幅值误差 (MME)、通带最大相位误差 (MPE) 和通带最大群延迟误差 (MGDE) 等逼近误差指标. MME、MPE 及 MGDE 分别定义为:

$$\text{MME} = \max_{\omega \in \Omega_p \cup \Omega_s} ||H(e^{j\omega}, h^*)| - |D(e^{j\omega})|| \quad (13a)$$

$$\text{MPE} = \max_{\omega \in \Omega_p} |\varphi(\omega, h^*) - \varphi_D(\omega)| \quad (13b)$$

$$\text{MGDE} = \max_{\omega \in \Omega_p} |\tau(\omega, h^*) - \tau_D(\omega)| \quad (13c)$$

其中 MME 无量纲, MPE 的量纲为弧度, MGDE 的量纲为采样间隔. 需要指出, 群延迟可能是整数或非整数 (如分数群延迟<sup>[16,17]</sup>), MGDE 一般都不是整数, 而是分数或小数.

**例 1** 设计一个长度  $N$  为 61 的带通滤波器, 通带  $\Omega_p = [0.3\pi, 0.5\pi]$ , 阻带  $\Omega_s = [0, 0.2\pi] \cup [0.6\pi, \pi]$ , 期望通带群延迟为 20 个采样间隔, 幅值误差小于  $4.5 \times 10^{-3}$  (即  $\rho(\omega) = 4.5 \times 10^{-3}$ ), 相位误差权函数  $W(\omega) = 1$ .

算法1设计所得滤波器的最大幅值误差 MME 为  $4.5 \times 10^{-3}$ , 严格满足设计要求; 最大相位误差 MPE 和最大群延迟误差 MGDE 分别为  $1.83 \times 10^{-4}$  弧度和 0.65 个采样间隔. 该滤波器的幅频响应、幅值误差、通带相位误差及通带群延迟误差如图2所示. 由图可见, 得到的滤波器, 其幅频响应和相频响应都是等纹波的.

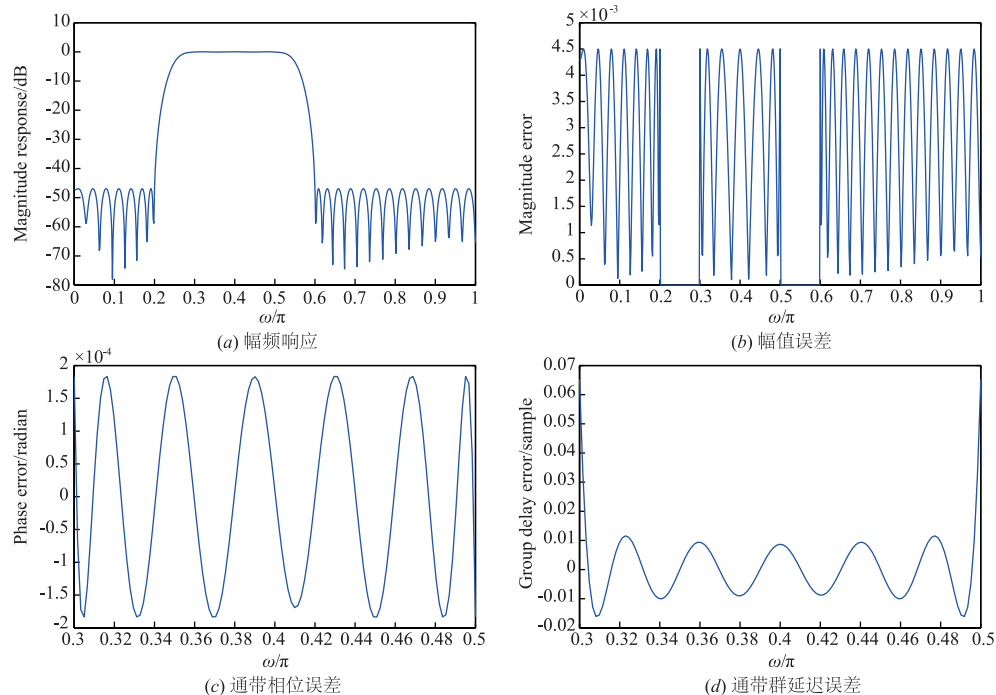


图2 算法1设计的带通滤波器之幅频响应、幅值误差、相位误差和群延迟误差

#### 4 近似等纹波群延迟误差设计

上一节的设计, 能够在保证幅值误差不超过给定值的前提下, 使相位误差最大值最小, 得到的幅值误差和相位误差都具有等纹波特性的. 但从图2(d)可看到, 滤波器的群延迟误差没有这个特性. 文献[5]采用 S 型相位误差上界函数对相位误差进行约束, 能有效减小通带最大群延迟误差. 文献[6]利用群延迟误差信息, 对相位误差上界函数进行更新, 经过多次迭代, 得到了近

似等纹波的群延迟误差. 由于文献[5]及文献[6]都是对相位误差施加显式的上界函数约束, 而本文则是对相位误差进行最小化, 因此文献[5]及文献[6]的方法不能直接用于本文的滤波器设计.

由问题(6)到问题(8)的转化可知, 问题(6)对最大加权相位误差最小化, 等价于对相位误差施加一个可调上界函数  $\gamma W^{-1}(\omega)$  的约束, 其中  $\gamma$  是待优化变量,  $W(\omega)$  是相位误差权函数. 基于此, 本文将[6]中的相位误差上界函数更新方法进行修改, 用于对相位误差权

函数  $W(\omega)$  进行更新. 即用修改的群延迟误差绝对值包络线, 来迭代更新相位误差权函数  $W(\omega)$ , 以逐渐减小最大群延迟误差, 使通带上的群延迟误差达到近似等纹波. 对单通带 FIR 滤波器设计, 给定  $\Omega_p, \Omega_s, D(e^{j\omega}), \rho(\omega), W(\omega)$  及  $N$  后, 具体算法如算法 2.

**算法 2 幅值误差约束迭代重加权最大相位误差最小化算法**

- (1) 取初始相位误差权函数  $W(\omega)=1$ , 最大群延迟误差初值  $\tau_{\max}^0 = \infty$ , 迭代终止参数  $\eta > 0$ . 取初始迭代次数  $n=0$ .
- (2) 令  $n=n+1$ , 用算法 1 求解问题(8), 得到给定权函数  $W(\omega)$  下的幅值误差约束最大加权相位误差最小化滤波器, 记为  $\mathbf{h}_W(n)$ .
- (3) 计算滤波器  $\mathbf{h}_W(n)$  的群延迟误差绝对值函数  $|\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))|$  及通带最大群延迟误差
 
$$\tau_{\max} = \max_{\omega \in \Omega_p} |\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))|.$$
- (4) 如果  $|1 - \tau_{\max} / \tau_{\max}^0| \leq \eta$ , 则终止程序; 否则, 令  $\tau_{\max}^0 = \tau_{\max}$ .
- (5) 计算群延迟误差绝对值函数  $|\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))|$  的包络线, 记作  $E_\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))$ .
- (6) 如果  $E_\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))$  除带边可能存在的极大值点外还有其它极大值点, 且其它极大值大于带边极大值, 则令  $|\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))| = E_\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))$ , 返回第 5 步.
- (7) 如果  $E_\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))$  除带边外无其它极大值点, 则令  $M$  等于  $|\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))|$  除带边极大值外的最大极大值; 否则, 令  $M$  等于  $E_\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))$  除带边极大值外的最大极大值.
- (8) 计算修改的群延迟误差绝对值包络线
 
$$\hat{E}_\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n)) = \max\{M, E_\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n))\}.$$
- (9) 更新相位误差权函数:
 
$$W(\omega) = W(\omega) |\hat{E}_\tau(\omega, \mathbf{h}_W(n)) / M|^\alpha$$
 (其中:  $\alpha > 0$  为算法参数), (14) 并返回第 2 步.

以上算法 2 所求解的数学问题也是式(6)或式

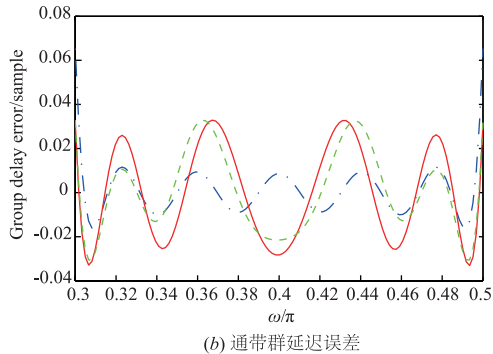
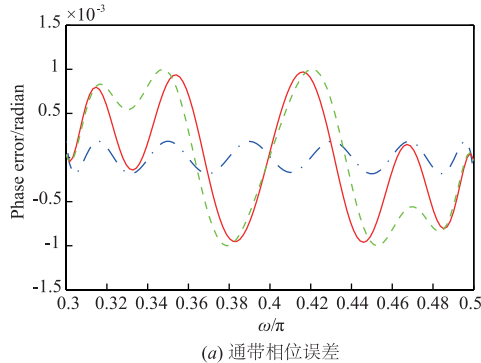


图3 不同算法设计的带通滤波器之通带相位误差及通带群延迟误差: 点划线、实线和虚线分别是算法1、算法2及IPCMM算法<sup>[6]</sup>的结果

**表 1 不同算法设计的带通滤波器之性能对比**

算法	MME	MPE	MGDE
本文算法 1	$4.5 \times 10^{-3}$	$0.183 \times 10^{-3}$	$6.54 \times 10^{-2}$
本文算法 2	$4.5 \times 10^{-3}$	$0.94 \times 10^{-3}$	$3.26 \times 10^{-2}$
IPCMM <sup>[6]</sup>	$4.504 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$3.29 \times 10^{-2}$

由图 3 和表 1 可以看到, 与算法 1 相比, 算法 2 设

(8), 但其中的相位误差权函数并不是取事先给定的固定函数, 而是在迭代过程中用式(14)不断更新. 当参数  $\alpha$  取合适值时, 更新权函数下得到的滤波器, 其通带最大群延迟误差会比更新前权函数下的结果有所减小. 权函数将收敛后, 所得滤波器的通带群延迟误差具有近似等纹波特性的. 参数  $\alpha > 0$  可用以控制通带最大群延迟误差减小的速度, 参数值越大, 减小的速度越快, 反之则越慢, 但过大的  $\alpha$  会使算法发散. 通常  $\alpha$  取  $(0, 1.5]$  时可以保证算法的收敛, 本文取  $\alpha=1$ .  $\eta > 0$  是算法的终止参数, 也有对最大相位误差和最大群延迟误差进行折衷的作用, 增大  $\eta$  值可能使最大群延迟误差变大、最大相位误差变小, 反之可能使最大群延迟误差变小、最大相位误差变大; 比较合适的取值范围是  $10^{-4} \leq \eta \leq 10^{-2}$ , 本文取  $\eta=10^{-3}$ .

**例 2** 设计一个带通滤波器, 使之满足上节例子 1 中除相位误差权函数之外的其它所有性能要求.

我们用算法 2 进行设计, 计算所得滤波器的性能, 然后与算法 1 及文献[6] IPCMM 算法的设计结果进行比较. 算法 2 及 IPCMM 算法得到的滤波器, 其幅频响应及幅值误差与算法 1 得到的几乎完全一样, 这里不再示出. 算法 2 设计的滤波器, 其通带相位误差及通带群延迟误差示于图 3, MME、MPE 及 MGDE 列于表 1. 为便于比较, 算法 1 及 IPCMM 算法得到的滤波器, 其通带相位误差和通带群延迟误差, 以及 MME、MPE 及 MGDE 等也分别示于图 3 和表 1.

计的滤波器, 其群延迟误差明显变得均匀(近似等纹波), 通带最大群延迟误差明显减小, 但同时通带最大相位误差有所增大. 与 IPCMM 算法的结果相比, 在最大幅值误差相同或略小的情况下, 算法 2 设计的滤波器, 其最大通带相位误差及最大通带群延迟误差均比 IPCMM 算法的结果有所减小, 表明本文算法的结果要好于 IPCMM 算法的结果.

## 5 结束语

本文提出的 FIR 滤波器幅值误差约束最大加权相位误差最小化设计算法,能在保证所设计 FIR 滤波器幅值误差不超过给定上界的同时,使最大相位误差尽可能小,适合用于对幅值误差有强制要求的滤波器设计。以此算法为核心,并利用所得滤波器的群延迟误差对相位误差加权函数进行迭代更新,得到的幅值误差约束迭代重加权最大相位误差最小化设计算法,能使滤波器的群延迟误差近似等纹波,得到的设计结果比现有 IPCMM 算法好。

所提设计方法中,幅值误差最大值是根据应用要求给定的,而最大相位误差及最大群延迟误差是优化的结果,若结果不能满足应用要求,可增大滤波器长度,直至满足应用要求。

### 参考文献

- [1] Antoniou A. Digital Signal Processing: Signals, Systems and Filters[M]. New York, USA: McGraw-Hill, 2005.
- [2] Davidson T N. Enriching the art of FIR filter design via convex optimization[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(3): 89–101.
- [3] Dedeoglu M, Alp Y K, Arikan O. FIR filter design by convex optimization using directed iterative rank refinement algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(9): 2209–2219.
- [4] Karam L J, McClellan J H. Chebyshev digital FIR filter design[J]. Signal Processing, 1999, 76(1): 17–36.
- [5] Lai X P. Optimal design of nonlinear-phase FIR filters with prescribed phase error[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9): 3399–3410.
- [6] Lai X P, Lai C L, Zhao R J. An iterative approach to near-uniform group-delay error design of FIR filters[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(2): 107–110.
- [7] Lai X P, Wang J Z, Xu Z. A new minimax design of two-dimensional FIR filters with reduced group delay[A]. Proceedings of the Seventh Asian Control Conference[C]. IEEE, 2009. 610–614.
- [8] Lang M C. Algorithms for constrained design of digital filters with arbitrary magnitude and phase responses[D]. Vienna, Austria: Vienna University of Technology, 1999.
- [9] Liu Y Z, Lin Z P. Optimal design of frequency-response masking filters with reduced group delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2008, 55(6): 1560–1570.
- [10] Lu W S. Design of nonlinear-phase FIR digital filters: A semidefinite programming approach[A]. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems[C]. IEEE, 1999. 263–266.
- [11] Lu W S. Minimax design of FIR filters with low group delay using enhanced sequential quadratic programming[A]. Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Circuits and Systems[C]. IEEE, 2004. 117–120.
- [12] Okuda M, Yoshida M, Kiyose K, et al. Complex approximation of FIR digital filters by updating desired responses[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 2948–2953.
- [13] Vuerinckx R. Design of high-order Chebyshev FIR filters in the complex domain under magnitude constraints[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(6): 1676–1681.
- [14] 赖春露, 刘璐, 赖晓平. 多通带低群延迟误差 FIR 滤波器设计的迭代算法[J]. 信号处理, 2011, 27(11): 1646–1650.  
Lai C L, Liu J, Lai X P. An iterative algorithm for the design of multi-band FIR filters with reduced group-delay error[J]. Chinese Journal of Signal Processing, 2011, 27(11): 1646–1650. (in Chinese)
- [15] Wen J G, Hui J Y, Li S N, Zhou K, Wang D M. Interference-driven designs of nonlinear phase FIR filter with application in FBMC system[J]. China Communications, 2016, 13(12): 15–24.
- [16] Huang X, Zhang B, Qin H, An W. Closed-form design of variable fractional-delay FIR filters with low or middle cutoff frequencies[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2018, 65(2): 628–637.
- [17] Bensouici T, Charef A, Assadl, I. A new approach for the design of fractional delay by an FIR filter[J]. ISA transactions, 2018, Available online.

### 作者简介



王 路 男, 1988 年 9 月生于山东德州, 现为山东大学(威海)网络与信息管理中心工程师。主要研究方向为信号处理、滤波器设计、数字图像处理。  
E-mail: wanglu@sdu.edu.cn



赖春露(通信作者) 女, 1989 年 4 月生于山东威海, 现为哈尔滨工业大学(威海)信息与电气工程学院工程师。主要研究方向为信号处理、滤波器设计、数字图像处理。  
E-mail: laicl\_ruby@hitwh.edu.cn