

# 基于脉冲控制的时延异构多智能体编队控制

贾 泉, 席建祥, 刘光斌, 杜柏阳

(火箭军工程大学 205 教研室, 陕西西安 710025)

**摘 要:** 为提高编队系统鲁棒性,降低系统对通信条件的要求,针对异构多智能体系统的编队控制问题,提出一种基于脉冲控制的编队控制方法.考虑异构多智能体的切换拓扑与变时延情况,根据一致性理论,提出基于领航跟随者模型的脉冲控制协议.利用矩阵分析方法将异构多智能体编队系统的变时延问题转化为时延上界问题,通过构造 Lyapunov 函数并利用 Lyapunov 稳定理论得到系统实现编队控制一致性的充分条件.同时,为比较不同控制协议的优劣性,提出切换拓扑下多智能体编队控制的平均通信代价指标.仿真结果验证了所提脉冲控制方法的有效性和优越性.

**关键词:** 异构多智能体系统; 脉冲控制; 时延; 一致性; 平均通信代价指标

**中图分类号:** TP242      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2018)12-2957-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.12.019

## Formation Control for Heterogeneous Multi-agent Systems with Communication Delays Based on Impulsive Control

JIA Xiao, XI Jian-xiang, LIU Guang-bin, DU Bo-yang

(Teaching and Research Section 205, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025, China)

**Abstract:** In order to improve the robustness of the formation system and reduce the system demands for communication conditions, concerning the formation control problem of multi-agent systems, a control approach is proposed based on impulsive control for the formation control problem of heterogeneous multi-agent systems. Considering problems in multi-agent systems with switching topology and time-varying delays, an impulsive control algorithm is proposed based upon leader-following models by using the consensus theory. In formation control of heterogeneous multi-agent systems, the time-varying delays problem is transformed into the upper bound of time-delays problem by the matrix theory. A Lyapunov function is constructed. By the Lyapunov theory, a sufficient condition for solving the formation control problem of heterogeneous multi-agent systems is obtained. Aiming to compare the control protocol with others, the average communication cost index of multi-agent systems with switching topology is proposed. The simulation results illustrate the validity and the superiority of the proposed impulsive control approach.

**Key words:** heterogeneous multi-agent systems; impulsive control; time-varying delays; consensus; average communication cost index

## 1 引言

近年来,编队控制问题逐渐成为多智能体协同控制领域研究的热点问题<sup>[1,2]</sup>.经过众多学者的不懈努力,编队控制问题的研究在通信信道噪声<sup>[3]</sup>、拓扑切换<sup>[4]</sup>、非线性模型<sup>[5]</sup>以及异步算法<sup>[6]</sup>等方面取得了较大进展,从而极大地促进了协同控制在军事<sup>[7]</sup>等方面的应用.

文献[8]利用图论与矩阵理论证明了编队控制一致性的可实现性,为基于一致性理论的多智能体系统编队控制研究奠定了基础. Saber 等<sup>[9]</sup>首次考虑时延情

形,开展了连续时间多智能体系统编队控制一致性问题的研究.而后, Lin 等<sup>[10]</sup>研究了通信拓扑切换情况下,时延多智能体系统的编队控制一致性问题.

与此同时,由于数字传感器的发展与网络传输宽带的限制,许多控制系统开始利用连续时间系统结合脉冲采样的方式进行建模. Ye 等<sup>[11]</sup>探讨了基于领航跟随者模式的一阶多智能体一致性问题,通过设计合理的脉冲控制协议得到系统实现一致性的充分条件.更进一步, Yang 等<sup>[12]</sup>针对二阶非线性多智能体的一致性问题,提出相应的脉冲控制协议,利用矩阵分析方法与 Lyapunov 稳定理论得到系统实现一致性的充分条件.与

连续控制协议相比,脉冲控制协议更符合实际应用情景,且能够有效提高多智能体编队系统的鲁棒性,降低系统对通信环境的要求.此外,考虑工程实际,由于复杂环境以及智能体自身结构的影响,系统中各智能体在运动过程中,彼此的通信链路会发生故障或者出现通信时延情况,因此有必要同时考虑拓扑切换和通信时延两种情况,开展对异构多智能体系统编队控制一致性的研究.

## 2 问题描述

### 2.1 基础知识

$n$  个智能体的通信拓扑可由有向图  $G(V, E, A)$  表示,其中  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  代表顶点集合,  $E \subseteq V \times V$  代表有向边集合,  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  ( $a_{ij} \geq 0$ ) 代表邻接矩阵. 有向图  $G$  中,节点  $i$  的邻居集合表示为  $N_i = \{j \in V | (j, i) \in E\}$ . 当邻接矩阵的元素  $a_{ji} = a_{ij}$  时,称图  $G$  为无向图,否则称图  $G$  为有向图. 如果有向图中不同节点之间都存在有向路径,则称有向图强连通;如果有向图中存在一个节点,它到其他节点都存在一条有向路径,则称有向图包含有向生成树. 有向图  $G$  的 Laplacian 矩阵定义为

$$L = D - A = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j \\ \text{diag}(\sum_{j \in N_i} a_{ij}), & i = j \end{cases}$$

其中  $D = \text{diag}(\sum_{j=1}^n a_{ij})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 表示度矩阵.

考虑本文的异构多智能体系统模型,  $n$  个跟随者与一个领航者形成的通信拓扑可用有向图  $G$  表达. 定义  $B = \text{diag}(b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 表示各跟随者节点  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 与领航者节点 0 之间的邻接关系,如果节点  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 与节点 0 存在直接通信链路那么  $b_i > 0$  否则  $b_i = 0$ . 如果领航者节点 0 与所有跟随者之间都存在有向路径,称领航者节点 0 全局可达. 为简化分析过程,本文假定<sup>[13]</sup>:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in N_i \\ 0, & j \notin N_i \end{cases}, b_i = \begin{cases} 1, & \text{节点 } 0 \text{ 是 } i \text{ 的邻居} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

### 2.2 异构多智能体系统模型

考虑有向切换拓扑情况,  $n + 1$  个智能体组成的连续时间异构多智能体系统的系统模型可描述如下:

$$\begin{cases} \dot{p}_0(t) = q_0 \\ \dot{p}_i(t) = q_i(t) \\ \dot{q}_i(t) = u_i(t), i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

其中  $p_0(t), q_0(t) \in \mathbf{R}$  为领航者智能体的位移和常速度;  $p_i(t), q_i(t), u_i(t) \in \mathbf{R}$  为跟随者智能体的位移、速度和控制输入.

**定义 1** 对于异构多智能体系统式 (1), 如果系统

中各智能体的位移与速度满足如下要求,那么系统能够实现编队控制和渐近速度一致,完成预期编队任务<sup>[14]</sup>:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |p_i(t) - p_0(t) - r_i| &= 0, i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |q_i(t) - q_0| &= 0, i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

其中  $r_i$  表示跟随者智能体  $i$  与领航者智能体 0 的期望相对距离.

**注 1** 一、二阶异构多智能体系统一般包含多个一阶系统和多个二阶系统,而本文中系统式 (1) 与此略有差异,因此也可称系统式 (1) 为“伪异构系统”,即异构系统的特殊化处理.

系统式 (1) 获得编队控制一致性,实质是设计合理的控制协议  $u_i(t)$ ,使系统中各个跟随者的状态参量与领航者达到一致.

### 2.3 脉冲控制协议

实际情况中,由于复杂外部环境与智能体自身结构的影响,系统中各个智能体进行信息交互时不可避免地会出现通信时延.不失一般性,当编队系统式 (1) 存在通信时延时,用  $\tau_{ij}(t)$  表示智能体  $j$  到  $i$  的通信时延,并假设时延是对称的,即  $\tau_{ij}(t) = \tau_{ji}(t)$ . 针对编队系统式 (1),提出如下脉冲控制协议:

$$\begin{aligned} u_i = - \sum_{k=1}^{+\infty} \delta(t - t_k) & \left( \sum_{j \in N_i} a_{ij} (p_i(t - \tau_{ij}(t)) - p_j(t - \tau_{ij}(t))) \right. \\ & - r_i + r_j + b_i (p_i(t - \tau_{i0}(t)) - p_0(t - \tau_{i0}(t)) - r_i) \\ & \left. + l (q_i(t) - q_0) \right), k \in \mathbf{N}_+, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $l$  表示系统的控制参数;离散时刻  $t_k$  满足  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots$  与  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ ;  $\delta(t)$  表示狄拉克函数,满足  $\delta(t) = 0$  ( $t \neq 0$ ) 与  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ .

为描述系统的切换拓扑情形,定义分段函数  $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \Lambda = \{1, 2, \dots, M\}$ , 其中  $M$  表示系统所有可能的通信拓扑情况. 同时,为描述系统通信拓扑中的时延情形,令  $\tau_r(t) \in \{\tau_{ij}(t) : i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j\}$ , 其中  $r = 1, 2, \dots, m$  ( $m \leq n(n-1)$ ), 并且假设存在常数  $\tau_0$  使  $0 < \tau_r(t) < \tau_0$ . 那么结合  $\sigma$  与  $\tau_r(t)$ , 定义系统通信拓扑  $\bar{G}$  的子图  $\bar{G}_{r,\sigma}$ , 相应的跟随者度矩阵  $D_{r,\sigma}$ , 邻接矩阵  $A_{r,\sigma}$ , Laplacian 矩阵  $L_{r,\sigma}$  和领导者邻接矩阵  $B_{r,\sigma}$ . 由于拓扑图中每个有向边存在一个时延,且  $\bar{G}$  的各个子图不相关,所以有  $A_\sigma = \sum_{r=1}^m A_{r,\sigma}$ ,  $D_\sigma = \sum_{r=1}^m D_{r,\sigma}$ ,  $L_\sigma = \sum_{r=1}^m L_{r,\sigma}$ ,  $B_\sigma = \sum_{r=1}^m B_{r,\sigma}$  和  $H_\sigma = L_\sigma + B_\sigma$ .

记  $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ ,  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ , 将脉冲控制协议式 (2) 代入系统式 (1) 得

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = q(t) \\ \dot{q}(t) = 0, & (t \neq t_k) \\ \Delta q(t) = - \sum_{r=1}^m (\mathbf{L}_{r,\sigma} + \mathbf{B}_{r,\sigma}) (\mathbf{p}(t - \tau_r(t)) - \mathbf{R}) \\ \quad + \sum_{r=1}^m \mathbf{B}_{r,\sigma} (p_0(t - \tau_r(t)) \otimes \mathbf{1}) \\ \quad - l(\mathbf{q} - q_0 \otimes \mathbf{1}), & (t = t_k) \\ q(t_0^+) = q(t_0), & (t_0 \geq 0) \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\Delta q(t)$  表示  $t_k$  时刻智能体的速度增益,  $q(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0} q(t_k + h)$ ,  $q(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0} q(t_k + h)$ , 不失一般性, 令  $q(t_k^-) = q(t)$ .

**注 2** 本节针对时延条件下的异构多智能体编队系统, 设计合理的脉冲控制协议  $u_i(t)$ , 同时考虑切换有向拓扑, 整理得到脉冲控制条件下的编队系统式(3), 下一步将对系统式(3)获得编队控制一致性的基本条件进行分析和探讨.

### 3 一致性分析

本节主要对编队系统式(3)的一致性问题分析. 首先, 基于脉冲控制协议, 并根据一致性理论, 得到时延编队误差系统, 从而将编队系统的一致性转化为稳定性问题. 然后, 构造 Lyapunov-Razumikhin 函数, 分析得到误差系统 Lyapunov 渐近稳定的充分条件.

**引理 1**<sup>[15]</sup> 有向拓扑图  $\bar{\mathbf{G}}$  中节点 0 全局可达当且仅当矩阵  $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{B}$  正稳定.

**定理 1** 若实数矩阵  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ -\mathbf{F} & (1-l)\mathbf{I}_n + \tau\mathbf{F} \end{bmatrix}$ ,

其中参数  $\tau$  为任意实常数, 参数  $l$  满足  $l \leq 1$ . 此时, 矩阵  $\mathbf{Q}$  正定的充分条件是  $\mathbf{F}$  为正稳定矩阵即  $\mathbf{F}$  的所有特征值都具有正实部.

**证明** 根据线性代数基本知识可得

$$\det(\theta\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} (\theta-1)\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{F} & (\theta+l-1)\mathbf{I}_n - \tau\mathbf{F} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

其中  $\theta$  表示  $\mathbf{Q}$  的特征值. 整理(4) 式得:

$$\det(\theta\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{Q}) = |(\theta-1)((\theta+l-1)\mathbf{I}_n - \tau\mathbf{F})| = 0 \quad (5)$$

根据式(5) 可知, 矩阵  $\mathbf{Q}$  的其中一个特征值  $\theta_1 = 1$ , 继而

$$|(\theta+l-1)\mathbf{I}_n - \tau\mathbf{F}| = 0 \quad (6)$$

当  $\tau = 0$  时, 式(6) 简化为  $|(\theta+l-1)\mathbf{I}_n| = 0$ , 而由已知条件  $l \leq 1$  可知  $\theta > 0$ , 即矩阵  $\mathbf{Q}$  正定; 当  $\tau \neq 0$  时, 整理式(6) 得

$$\left| \tau \left( \frac{(\theta+l-1)}{\tau} \mathbf{I}_n - \mathbf{F} \right) \right| = 0 \quad (7)$$

即

$$\left| \left( \frac{(\theta+l-1)}{\tau} \mathbf{I}_n - \mathbf{F} \right) \right| = 0 \quad (8)$$

此时, 由式(8) 可知  $\frac{\theta+l-1}{\tau}$  即为矩阵  $\mathbf{F}$  的特征值, 由于  $\mathbf{F}$  为正稳定矩阵, 那么

$$\frac{\theta+l-1}{\tau} > 0 \quad (9)$$

整理上式得

$$\theta > 1 - l$$

由于系统参数  $l$  满足  $l \leq 1$ , 则  $\theta > 0$ , 即定理 1 得证.

**定理 2** 对于时延异构多智能体系统式(1), 考虑切换有向拓扑情况, 各系统参数满足如下要求, 则该系统获得编队控制一致性:

(1) 通信拓扑  $\bar{\mathbf{G}}$  的各个子图中节点 0 全局可达;

(2) 时延上界  $\tau_0$  满足  $\tau_0 < \min(t_k - t_{k-1})$ ;

(3)  $\mathbf{P}_\sigma^T \mathbf{P}_\sigma$  的最大特征值  $\lambda_{\max}^\sigma$  满足  $(t_k - t_{k-1}) + \ln(\lambda_{\max}^\sigma \zeta) < 0$ , 其中常数  $\zeta > 1$ , 矩阵  $\mathbf{P}_\sigma$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ -\mathbf{H}_\sigma & (1-l)\mathbf{I}_n + \tau_0 \mathbf{H}_\sigma \end{bmatrix}.$$

**证明** 令  $x_i(t) = p_i(t) - p_0(t) - r_i$ ,  $v_i(t) = q_i(t) - q_0$ , 定义

$$\mathbf{e}_i(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ v_i(t) \end{bmatrix}, i = 1, \dots, n \quad (10)$$

其矩阵形式表达为  $\mathbf{e}(t) = [\mathbf{e}_1^T(t), \dots, \mathbf{e}_n^T(t)]^T$ , 对于式(10), 规定  $\mathbf{e}_i(t_0^+) = \mathbf{e}_i(t_0)$ . 同时, 当  $t \in (t_{k-1}, t_k]$  时, 系统式(3) 的误差系统矩阵形式可表达为  $\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_0 \mathbf{e}(t)$ , 其中  $\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

当  $t = t_k^+$  时

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(t_k^+) &= \begin{bmatrix} x_i(t_k^+) \\ v_i(t_k^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i(t_k^+) - p_0(t_k^+) - r_i \\ \Delta q_i(t_k) + q_i(t_k^-) - q_0(t_k^+) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_i(t_k^+) - p_0(t_k^+) - r_i \\ - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} Y - b_i \Delta_1 + \Xi \end{bmatrix} \\ & i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$\begin{aligned} Y &= p_i(t_k - \tau_{ij}(t_k)) - p_j(t_k - \tau_{ij}(t_k)) - r_i + r_j, \\ \Delta_1 &= p_i(t_k - \tau_{i0}(t_k)) - p_0(t_k - \tau_{i0}(t_k)) - r_i, \\ \Xi &= -l(q_i(t_k) - q_0) + p_i(t_k^-) - p_0(t_k^+). \end{aligned}$$

基于文献[16], 不失一般性, 将异构多智能体编队控制的变时延问题转化为时延上界的求解问题. 由于时延上界  $\tau_0$  满足  $\tau_0 < \min(t_k - t_{k-1})$ , 根据格朗日中值

定理得:

$$\begin{aligned} & p_i(t_k^- - \tau_0) - p_0(t_k^- - \tau_0) \\ &= p_i(t_k^-) - p_0(t_k^-) - \tau_0[p_i(t) - p_0(t)] \\ & \quad , t \in (t_k - \tau_0, t_k] \end{aligned} \quad (12)$$

结合式(12),同时考虑时延上界  $\tau_0$ ,整理式(11)得

$$\mathbf{e}_i(t_k^+) = \begin{bmatrix} p_i(t_k^+) - p_0(t_k^+) - r_i \\ - \sum_{j \in N_i} a_{ij} Y - b_i \Delta_2 + \Xi \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots$$

其中,

$$\begin{aligned} Y &= p_i(t_k - \tau_{ij}(t_k)) - p_j(t_k - \tau_{ij}(t_k)) - r_i + r_j, \\ \Delta_2 &= p_i(t_k^-) - p_0(t_k^-) - \tau_0[p_i(t) - p_0(t)] - r_{ii}, \\ \Xi &= -l(q_i(t_k) - q_0) + p_i(t_k^-) - p_0(t_k^+). \end{aligned}$$

将上式化简,并整理为矩阵形式

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t_k^+) &\approx \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t_k^-) - p_0(t_k^-) \otimes \mathbf{1} - \mathbf{R} \\ - \sum_{r=1}^m (\mathbf{L}_{r,\sigma} + \mathbf{B}_{r,\sigma}) \cdot \boldsymbol{\Omega} + (1-l)\boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{M}_\sigma \mathbf{e}(t_k^-) \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\sigma &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ -\mathbf{H}_\sigma & (1-l)\mathbf{I}_n + \tau_0 \mathbf{H}_\sigma \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{p}(t_k^- - \tau_0) - p_0(t_k^- - \tau_0) \otimes \mathbf{1} - \mathbf{R}, \\ \boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{q}(t_k^-) - q_0 \otimes \mathbf{1}. \end{aligned}$$

为证明系统式(1)对应误差系统的稳定性,构造如下 Lyapunov-Razumikhin 函数

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \quad (4)$$

当  $t \in (t_{k-1}, t_k]$  时,  $\mathbf{V}(\mathbf{e}(t))$  的右上狄尼导数为

$$\begin{aligned} D^+ \mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) &= \dot{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^T(t) \dot{\mathbf{e}}(t) \\ &= \mathbf{e}^T(t) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_0)^T + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{E}_0)) \mathbf{e}(t) \\ &\leq \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

解微分方程不等式(15)可得

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) \leq \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_{k-1}^+)) \exp(t - t_{k-1}), t \in (t_{k-1}, t_k] \quad (16)$$

另外,由(13)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_k^+)) &= \mathbf{e}^T(t_k^+) \mathbf{e}(t_k^+) \\ &= \mathbf{e}^T(t_k^-) \mathbf{M}_\sigma^T \mathbf{M}_\sigma \mathbf{e}(t_k^-) \end{aligned} \quad (17)$$

此时,由于通信拓扑  $\bar{\mathbf{G}}$  的各个子图中节点 0 全局可达,根据引理 1 可知  $\mathbf{H}_\sigma$  正稳定.由定理 1 得

$$\begin{aligned} 0 < \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_k^+)) &\leq \lambda_{\max}^\sigma \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_k^-)) \\ &= \lambda_{\max}^\sigma \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_k)), k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

当  $k=1$  时,由式(16)可得

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) \leq \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t - t_0), t \in (t_0, t_1]$$

那么

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}(t_1)) \leq \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t_1 - t_0)$$

同时,由式(18)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_1^+)) &< \lambda_{\max}^1 \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_1^-)) = \lambda_{\max}^1 \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_1)) \\ &\leq \lambda_{\max}^1 \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t_1 - t_0) \end{aligned}$$

同样地,当  $t \in (t_1, t_2]$  时

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) &\leq \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_1^+)) \exp(t - t_1) \\ &\leq \lambda_{\max}^1 \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t - t_0) \\ \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_2)) &\leq \lambda_{\max}^1 \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t_2 - t_0) \\ \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_2^+)) &\leq \lambda_{\max}^2 \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_2)) \\ &\leq \lambda_{\max}^1 \lambda_{\max}^2 \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t_2 - t_0) \end{aligned}$$

那么,当  $t \in (t_{k-1}, t_k]$  时递推可得

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) \leq \lambda_{\max}^1 \lambda_{\max}^2 \cdots \lambda_{\max}^{k-1} \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t - t_0) \quad (19)$$

由  $(t_k - t_{k-1}) + \ln(\lambda_{\max}^k \zeta) < 0$  可知

$$\lambda_{\max}^k \exp(t_k - t_{k-1}) < \frac{1}{\zeta} \quad (20)$$

于是整理式(19)式并结合式(20)得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) &\leq \lambda_{\max}^1 \lambda_{\max}^2 \cdots \lambda_{\max}^{k-1} \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t - t_0) \\ &= \lambda_{\max}^1 \lambda_{\max}^2 \cdots \lambda_{\max}^{k-1} \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t - t_{k-1}) \\ &\quad \exp(t_{k-1} - t_{k-2}) \cdots \exp(t_1 - t_0) \\ &\leq \frac{1}{\zeta^{k-1}} \mathbf{V}(\mathbf{e}(t_0)) \exp(t - t_k) \end{aligned} \quad (21)$$

在式(21)中,  $t - t_{k-1}$  为有限值,且当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{\zeta^{k-1}} \rightarrow 0$ ,

$\mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) \rightarrow 0$  即误差系统获得渐近稳定,那么系统式(1)获得编队控制一致性,定理 2 得证.

**注 3** 文献[10]定义了通信拓扑  $\mathbf{G}(V, E, \mathbf{A})$  的通信代价指标,用以描述编队系统在相应通信拓扑下的通信代价.同样地,本文亦提出切换拓扑  $\bar{\mathbf{G}}_\sigma$  下异构编队系统的平均通信代价指标,其定义为:

给定时间下系统获得编队控制一致性时有

$$T = \min \frac{1}{M} \sum_{\sigma=1}^M \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\sigma \quad (22)$$

其中  $a_{ij}^\sigma$  表示通信拓扑子图  $\bar{\mathbf{G}}_\sigma$  的邻接矩阵  $\mathbf{A}_\sigma$  的元素;  $M$  表示系统所有可能的通信拓扑情况.通过构造代价指标  $T$ ,可展开对编队系统模型优劣性的分析,从而证明本文所提脉冲控制方法在节约时间和能量方面的优越性.

## 4 仿真算例

本节首先确定多智能体系统的初始参数,然后利用 Matlab 对以下三种情况下的系统编队进行仿真,从而验证本文所提控制协议的有效性和优越性.

(1) 本文异构多智能体系统满足定理 2 时的编队控制情况;

(2) 本文异构多智能体系统不满足定理 2 时的编队控制情况;

(3) 文献[17]所提脉冲控制协议下多智能体系统的编队控制情况.

4.1 参数初始化

为简化仿真过程,考虑二维平面运动方式,基于领航跟随者模型,设置一个由 5 个跟随者  $a_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  和一个领航者  $a_0$  组成的异构多智能体编队系统. 为描述各个智能体的状态变化,用  $p_i = [p_{ix}, p_{iy}]^T$  表示智能体  $a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$  的位置信息,用  $q_i = [q_{ix}, q_{iy}]^T$  表示智能体  $a_i$  的速度信息,其中  $p_{ix}, p_{iy}$  分别表示  $a_i$  在全局坐标系下  $x$  方向和  $y$  方向的位移; $q_{ix}, q_{iy}$  分别表示  $a_i$  在全局坐标系下  $x$  方向和  $y$  方向的速度. 不失一般性,本文将各个智能体运动视作质点运动,并对转动角度和转动角速度不予考虑. 设置正五边形为期望队形,期望相对位置、初始位置与速度见表 1. 假设异构多智能体编队系统的通信拓扑在图 1 的  $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  与  $\bar{G}_3$  之间切换. 同时,为与文献[17]所提控制算法的优劣性进行对比,假设编队系统中的领航者智能体  $a_0$  不存在时,其余 5 个智能体  $a_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  的通信拓扑在图 1 的  $\bar{G}_4, \bar{G}_5$  与  $\bar{G}_6$  之间切换. 根据定理 2 中的条件 3,可令编队系统的采样周期  $t_k - t_{k-1} = 0.085s$ .

表 1 参数设置

编号 $i$	期望相对位置 $p_{is}$	初始位置 $p_{i0}$	初始速度 $q_{i0}$
0	$[0, 0, 0]^T$	$[-2, 0, 0]^T$	$[0.1, 0.1, 0]^T$
1	$[0, 1, 0]^T$	$[-0.2, 0.6, 0]^T$	$[-0.1, 0, 0]^T$
2	$[-\sin(\frac{2}{5}\pi), \cos(\frac{2}{5}\pi), 0]^T$	$[-3, 1, 0]^T$	$[0.1, 0, 0]^T$
3	$[-\sin(\frac{\pi}{5}), -\cos(\frac{\pi}{5}), 0]^T$	$[-2, 0.5, 0]^T$	$[0, 0.5, 0]^T$
4	$[\sin(\frac{\pi}{5}), -\cos(\frac{\pi}{5}), 0]^T$	$[-3, 0, 0]^T$	$[0, -0.4, 0]^T$
5	$[\sin(\frac{2}{5}\pi), \cos(\frac{2}{5}\pi), 0]^T$	$[0, -2, 0]^T$	$[0.3, -0.4, 0]^T$

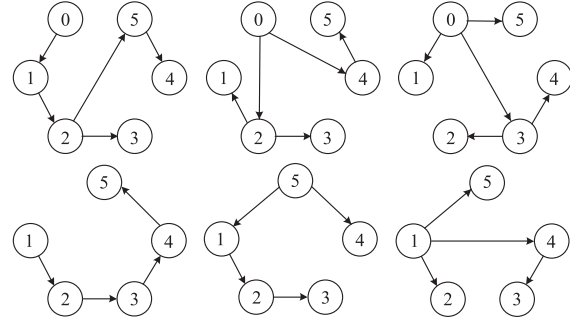


图1 通信拓扑:  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4, \bar{G}_5$  与  $\bar{G}_6$

4.2 算例分析

结合 4.1 小节的参数设置以及通信拓扑,分别进行 3 个算例仿真实验.

**算例 1** 对于本文的异构多智能体系统,通信拓扑在图 1 的  $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  与  $\bar{G}_3$  之间切换. 取通信时延上界  $\tau_0 = 0.08 (\tau_0 < \min(t_k - t_{k-1}))$ ,即可令  $\tau_{10}^1 = \tau_{32}^1 = 0.05 \text{cost}$ ,  $\tau_{21}^1 = \tau_{52}^1 = 0.05 \text{sint}$ ,  $\tau_{45}^1 = 0.03 \text{sint} + 0.01$ ;  $\tau_{20}^2 = \tau_{12}^2 = 0.06 \text{sint}$ ,  $\tau_{32}^2 = \tau_{40}^2 = 0.05 \text{cost}$ ,  $\tau_{54}^2 = 0.04 \text{sint}$ ;  $\tau_{10}^3 = \tau_{23}^3 = 0.03 \text{cost}$ ,  $\tau_{30}^3 = \tau_{43}^3 = 0.04 \text{cost}$ ,  $\tau_{50}^3 = 0.03 \text{sint} - 0.01$ . 根据定理 2 可知异构多智能体系统能够获得编队控制一致性. 图 2 表示系统中各个智能体的运动轨迹,初始位置和速度随机设置,随着时间的推移,正五边形编队队形逐渐形成并始终保持. 图 3 表示智能体  $x$  方向与  $y$  方向的位置变化,前期位置杂乱,而后逐渐趋于一致. 图 4 表示智能体  $x$  方向与  $y$  方向的速度变化,变化剧烈,在脉冲控制协议作用下,随后各个跟随者智能体的速度都趋于  $0.1\text{m/s}$ ,即与领航者智能体速度趋于一致且保持稳定状态.

**算例 2** 对于本文的异构多智能体系统,通信拓扑在图 1 的  $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  与  $\bar{G}_3$  之间切换. 取通信时延上界  $\tau_0 = 0.08 (\tau_0 < \min(t_k - t_{k-1}))$ ,令  $\tau_{10}^1 = \tau_{32}^1 = 0.085 \text{sint}$ ,  $\tau_{21}^1 = \tau_{52}^1 = 0.08 \text{cost}$ ,  $\tau_{45}^1 = 0.08 \text{sint} + 0.01$ ;  $\tau_{20}^2 = \tau_{12}^2 = 0.08 \text{sint}$ ,

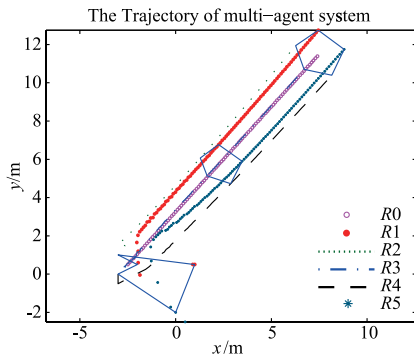


图2 异构多智能体系统运动轨迹

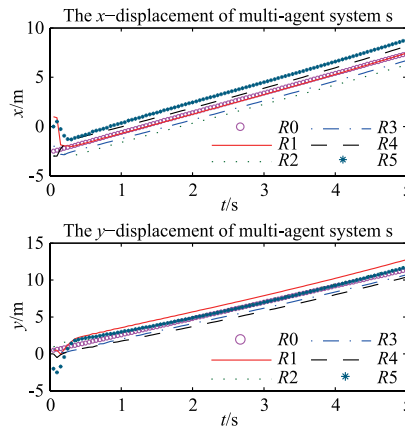


图3 x与y方向智能体位置变化曲线

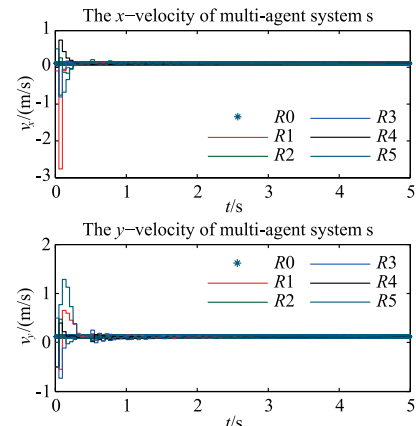


图4 x与y方向智能体速度变化曲线

$\tau_{32}^2 = \tau_{40}^2 = 0.09\cos t - 0.01$ ,  $\tau_{54}^2 = 0.01\sin t$ ;  $\tau_{10}^3 = \tau_{23}^3 = 0.03\cos t + 0.01$ ,  $\tau_{30}^3 = \tau_{43}^3 = 0.09\cos t$ ,  $\tau_{50}^3 = 0.1\sin t$ . 由于异构多智能体系统通信拓扑中有些有向边的时延超出时延上界, 根据定理 2, 虽然节点 0 全局可达且采样时间间隔满足要求, 但异构多智能体系统无法实现编队控制. 图 5 表示系统中各个智能体的运动轨迹, 可知系统的编队队形不能形成. 图 6 表示智能体  $x$  方向与  $y$  方向的位置变化, 各个智能体位置杂乱, 且相对距离持续增加. 图 7 表示智能体  $x$  方向与  $y$  方向的速度变化, 可知各个跟随者智能体速度难以与领航者取得一致, 始终处于发散状态.

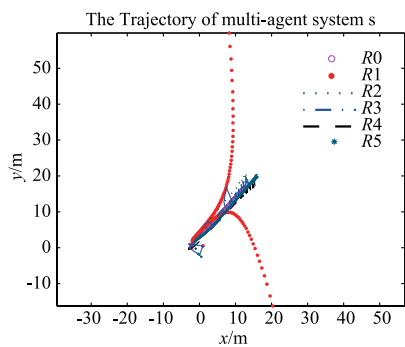


图5 异构多智能体系统运动轨迹

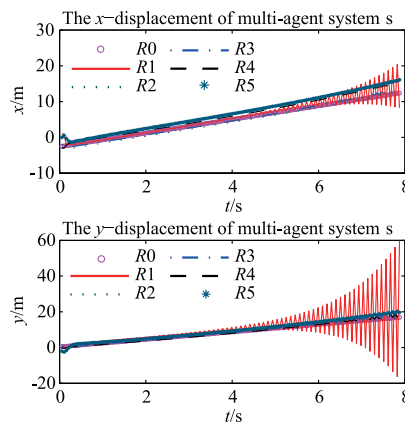


图6 x与y方向智能体位置变化曲线

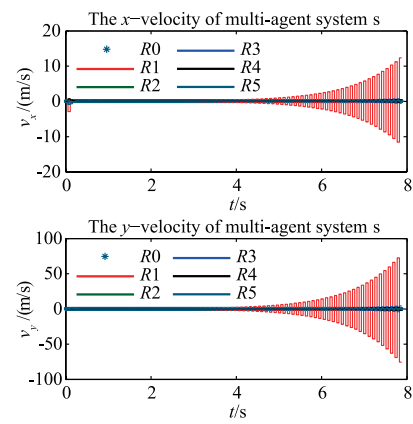


图7 x与y方向智能体速度变化曲线

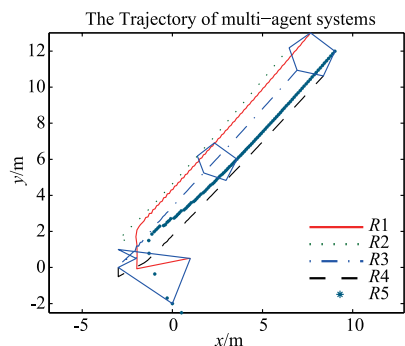


图8 多智能体系统运动轨迹

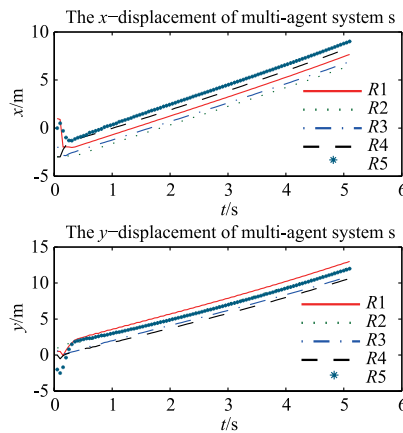


图9 x与y方向智能体位置变化曲线

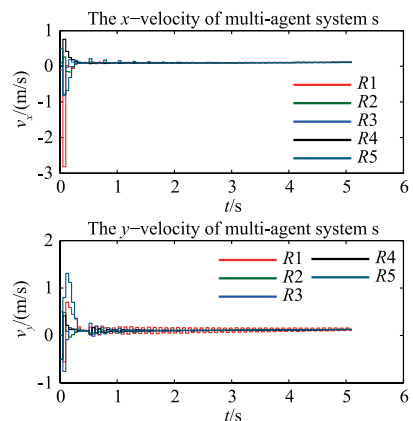


图10 x与y方向智能体速度变化曲线

**算例 3** 对于文献[17]的多智能体系统, 通信拓扑在图 1 的  $\mathcal{G}_4$ 、 $\mathcal{G}_5$  与  $\mathcal{G}_6$  之间切换. 同样地, 取通信时延上界  $\tau_0 = 0.08$ . 图 8 ~ 9 分别表示多智能体的运动轨迹、位置变化与速度变化曲线. 由图可知, 利用文献[17]提出的脉冲控制协议亦可实现多智能体系统的编队控制. 然而, 根据式 (22), 将系统的编队控制一致性所用时间限定为 5s, 本文的通信代价指标  $T = 4.9$ , 而文献[17]通信代价指标  $T = 5.2$ . 于是, 相较于文献[17], 本文提出的脉冲控制协议在实现系统编队控制的同时, 更能够节约系统能量与通信代价.

## 5 结论

本文考虑切换有向拓扑情况, 针对领航跟随者模式下, 时延异构多智能体系统的编队控制问题, 提出基于一致性理论的脉冲控制协议. 构造 Lyapunov 函数, 利用图论与 Lyapunov 稳定理论, 得到异构多智能体系统实现编队控制的拓扑条件、时延上界以及采样时间间隔. 最后, 分别通过三个仿真算例, 验证所提控制方法的有效性和优越性.

## 参考文献

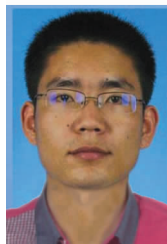
- [1] Wang X K, Li X, Zheng Z Q. Survey of developments on multi agent formation control related problems[J]. Control and Decision, 2013, 28(11): 1601 - 1613.
- [2] 王保防, 张瑞雷, 郭健, 等. 纵向打滑状态下的轮式移动机器人编队控制[J]. 电子学报, 2017, 45(1): 206 - 212. Wang Bao-fang, Zhang Rui-lei, Guo Jian, et al. Formation control for car-like mobile robots under slip conditions[J]. Acta Electronica Sinica, 2017, 45(1): 206 - 212. (in Chinese)

- [3] Lei M, Zhou S, Zhang Y, et al. Consensus based non-close formation control of multi-agent with communication noises [J]. *Journal of Information & Computational Science*, 2012, 9(18): 5595 – 5602.
- [4] Dong X, Sun C, Hu G. Time-varying output formation control for linear multi-agent systems with switching topologies [J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2016, 26(16): 3558 – 3579.
- [5] Li S, Zhang J, Li X, et al. Formation control of heterogeneous discrete-time nonlinear multi-agent systems with uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(6): 4730 – 4740.
- [6] Peng L, Guan F, Perneel L, et al. Decentralized multi-robot formation control with communication delay and asynchronous clock [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2018, 89(3): 465 – 484.
- [7] 段晓稳, 高晓光, 李波. 综合作战区同构舰载预警机巡逻策略分段滚动规划方法研究 [J]. *电子学报*, 2017, 45(6): 1301 – 1310.  
Duan Xiao-wen, Gao Xiao-guang, Li Bo. Research on patrol strategy subsection rolling planning of isomorphic EWAs within synthesis combat area [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2017, 45(6): 1301 – 1310. (in Chinese)
- [8] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [9] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [10] Lin P, Jia Y. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies [J]. *Automatica*, 2009, 45(9): 2154 – 2158.
- [11] Ye Z, Chen Y, Zhang H. Leader-following consensus of multiagent systems with time-varying delays via impulsive control [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014(3): 1 – 10.
- [12] Yang S, Liao X, Liu Y. Second-order consensus in directed networks of identical nonlinear dynamics via impulsive control [J]. *Neurocomputing*, 2016, 179(2): 290 – 297.
- [13] Zhang Q, Chen S, Yu C. Impulsive consensus problem of second-order multi-agent systems with switching topologies [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(1): 9 – 16.
- [14] 孙一杰, 张国良, 张胜修, 等. 一类异构多智能体系统一致性协议的收敛性分析 [J]. *控制理论与应用*, 2014 31(11): 1524 – 1529.  
Sun Yi-jie, Zhang Guo-liang, Zhang Sheng-xiu, et al. Convergence analysis for consensus protocol of heterogeneous multi-agent systems [J]. *Control and Decision*, 2014, 31(11): 1524 – 1529. (in Chinese)
- [15] Xie T, Liao X, Li H. Leader-following consensus in second-order multi-agent systems with input time delay: an event-triggered sampling approach [J]. *Neurocomputing*, 2016, 177(5): 130 – 135.
- [16] Liu J, Guo L, Hu M, et al. Leader-following consensus of multi-agent systems with delayed impulsive control [J]. *Ima Journal of Mathematical Control & Information*, 2016, 33(1): 1 – 10.
- [17] Wu Y, Feng G. Consensus analysis based on impulsive systems in multi-agent networks [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2012, 59(1): 170 – 178.

## 作者简介



**贾 泉** 男, 1993 年出生, 陕西渭南人, 火箭军工程大学在读博士生, 主要研究方向为多机器人编队控制。  
E-mail: 15091281454@163.com



**席建祥** 男, 1982 年出生, 甘肃白银人, 火箭军工程大学副教授, 博导, 主要研究方向为复杂系统控制、切换系统和群系统。  
E-mail: xijx07@mail.tsinghua.edu.cn



**刘光斌** 男, 1982 年出生, 四川射洪人, 火箭军工程大学教授, 博导, 主要研究方向为 GNSS 导航、复杂系统控制和多智能体系统。  
E-mail: lgb303@162.com



**杜柏阳** 男, 1990 年出生, 山东滨州人, 火箭军工程大学在读博士生, 主要研究方向为多智能体系统。  
E-mail: 13468619594@163.com