

自适应陷波器噪声统计性能与相关性分析

李 明,涂亚庆,沈艳林,沈廷鳌,毛育文

(后勤工程学院后勤信息与军事物流工程系,重庆 401311)

摘 要: 噪声是造成自适应陷波器 (Adaptive Notch Filter, ANF) 频率估计结果有偏的主要原因之一,在低信噪比条件下,噪声将极大的影响 ANF 频率估计方法的性能,特别在进行 ANF 统计性能分析的过程中,ANF 传递函数的线性近似方法不再适用,此时将无法对 ANF 频率估计方法的精度等性能进行准确评估.为此,首先利用相关函数和功率谱分析噪声经不同变换后均值与方差的统计性能;其次,利用噪声分析的统计性能结果计算 ANF 频率估计方法的性能,为提升 ANF 频率估计方法的精度奠定理论分析基础;最后,对 ANF 频率估计方法的性能进行理论值与实际值的比对分析,结果表明噪声分析方法的有效性,并可近似预测 ANF 频率估计方法的稳态性能.

关键词: 正弦信号; 噪声分析; 自适应陷波器; 频率估计

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)09-2108-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.09.010

Noise Analysis of Statistical Performance and Correlation for Adaptive Notch Filter

LI Ming, TU Ya-qing, SHEN Yan-lin, SHEN Ting-ao, MAO Yu-wen

(Department of Information and Military Logistics Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing, China)

Abstract: Noise are one of the main reasons for biased frequency estimation of ANF (Adaptive Notch Filter). Noise will greatly affect the performance of ANF frequency estimation method under low SNR. When analyzing the ANF statistical performance, some linear approximation methods for ANF transfer function will degrade, the performance of ANF frequency estimation method cannot be evaluated precisely. So the noise statistical performances of mean and variance after different transform are analyzed by using correlation function and power spectrum method. Noise statistical performance results are used for performance analysis of ANF frequency estimation method, meanwhile a theoretical analysis foundation is established to improve the accuracy of ANF frequency estimation method. The performances of ANF frequency estimation method are compared by the theoretical values and the actual values, which show the effectiveness of the noise analysis method, and the steady-state performance of frequency estimation can be estimated approximately.

Key words: sinusoidal signal; noise analysis; adaptive notch filter; frequency estimation

1 引言

自适应陷波器 (ANF) 频率估计方法在通信工程、工业控制与测量、生物工程和通信系统有着广泛的应用^[1-4]. 相比传统的基于 FFT 离散频谱校正的频率估计方法^[5,6], ANF 无频谱泄漏问题, 采用时域递推, 计算简单. 但在具体应用过程中, 噪声会使 ANF 频率估计方法的性能下降, 特别是在低信噪比条件下, 所得到的频率估计结果将存在较大的偏差^[7]. 对此, 相关文献从理论上分析了噪声对 ANF 频率估计精度的影响^[8-12], 文献

[8] 利用 Lyapunov 定理和平均方法对 ANF 稳定性进行了分析, 但并没有从理论上分析各参数对于 ANF 的影响. 文献[9] 则对 ANF 的结构形式进行了统一, 并进行了性能分析, 但其分析方法过于繁琐, 不宜于推广. 为此, 文献[10] 则主要针对 FIR 型 ANF, 对此种类型的 ANF 传递函数进行简化分析, 取得了较为满意的结果, 但针对 IIR 型 ANF, 其准确度还有待进一步提高. 文献[11] 则在此基础上针对 IIR 型 ANF, 将信号与噪声分开, 变化后进行处理, 这样虽然一定程度上简化了分析流程, 但有效性值得商榷. 文献[12] 虽然尝试将信号和

噪声统一考虑,分别分析了 FIR 和 IIR 系统,但分析结果的准确性还有待提高,且噪声的理论分析不够具体,有待深入分析。

为此,利用相关函数和功率谱,在分析噪声统计性能的基础上,定量分析噪声通过 ANF 不同变换后的相关性能和统计性能,用于提升 ANF 频率估计方法在稳态条件下算法性能分析的准确性,从而为提升 ANF 频率估计精度提供理论支撑。

2 噪声分析

2.1 自相关分析

设 $v_0(n)$ 为加性高斯白噪声,服从 $WGN(0, \sigma^2)$. 将 $v_0(n)$ 通过某一线性系统 $P(z)$ 后得到的信号设为 $v(n)$,那么 $v(n)$ 在时刻 n_1 和 n_2 的自相关函数为

$$\begin{aligned} r(n_1, n_2) &= E[v^*(n_1)v(n_2)] \\ &= r(n_2 - n_1) = r(m) \end{aligned} \quad (1)$$

其中“*”为复共轭, $m = n_2 - n_1$. 当 $n_1 = n_2 = n$ 时,

$$r(0) = E[v^*(n)v(n)] = E[|v(n)|^2] \quad (2)$$

已知输入加性高斯白噪声 $v_0(n)$ 的功率谱为

$$R_0(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_0(m)e^{-j\omega m} = \sigma^2 \quad (3)$$

其中, $r_0(m)$ 为 $v_0(n)$ 的自相关函数,则输出 $v(n)$ 的功率谱为

$$R(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r(m)e^{-j\omega m} = R_0(e^{j\omega}) |P(e^{j\omega})|^2 \quad (4)$$

由式(2), (3)和(4)可推出

$$\begin{aligned} r(0) &= E[|v(n)|^2] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(e^{j\omega}) d\omega = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 互相关分析

为了给出噪声通过不同线性系统后的互相关性,令 $\tau_1(n)$ 和 $\tau_2(n)$ 为 $v_0(n)$ 分别通过线性系统 $P_1(z)$ 和 $P_2(z)$ 后的信号,则 $\tau_1(n)$ 和 $\tau_2(n)$ 的互相关函数 $r_{12}(m)$ 为:

$$r_{12}(m) = E[\tau_1(n)\tau_2(n+m)] \quad (6)$$

令 $p_1(n)$ 和 $p_2(n)$ 为 $P_1(z)$ 和 $P_2(z)$ 的抽样响应,则式(6)可进一步展开为

$$\begin{aligned} r_{12}(m) &= E[\tau_1(n)\tau_2(n+m)] \\ &= E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_1(k)v_0(n-k) \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_2(i)v_0(n+m-i)\right] \\ &= \sum_k p_1(k) \sum_i p_2(i) E[v_0(n-k)v_0(n+m-i)] \\ &= \sum_k p_1(k) \sum_i p_2(i) r_0(m+k-i) \\ &= \sum_k p_1(k) r_{p_2}(m+k) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $r_{p_2}(m+k) = p_2(m+k) * r_0(m+k)$, 符号 * 为卷积运算符。

令 $m+k=l$, 则

$$\begin{aligned} r_{12}(m) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_1(k) r_{p_2}(m+k) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{p_2}(l) p_1(l-m) = r_{p_2}(m) * p_1(-m) \end{aligned} \quad (8)$$

所以,

$$r_{12}(m) = r_0(m) * p_2(m) * p_1(-m) \quad (9)$$

则信号 $\tau_1(n)$ 和 $\tau_2(n)$ 的互功率谱为

$$\begin{aligned} R_{12}(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{12}(m) e^{-j\omega m} \\ &= R_0(e^{j\omega}) P_2(e^{j\omega}) P_1(e^{-j\omega}) \end{aligned} \quad (10)$$

当 $m=0$ 时,得到信号 $\tau_1(n)$ 和 $\tau_2(n)$ 之间的相关性分析,即

$$\begin{aligned} r_{12}(0) &= E[\tau_1(n)\tau_2(n)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_{12}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_2(e^{j\omega}) P_1(e^{-j\omega}) d\omega \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C P_2(z) P_1(z^{-1}) z^{-1} dz \end{aligned} \quad (11)$$

3 ANF 噪声性能分析

ANF 传递函数如式所示^[7]:

$$\begin{aligned} H(z) &= N(z) \frac{1}{D(z)} \\ &= (1 + az^{-1} + z^{-2}) \frac{1}{1 + \rho az^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $N(z) = 1 + az^{-1} + z^{-2}$, $\rho \in (0, 1)$ 为极半径,控制 ANF 陷波宽度, a 为 ANF 参数,且 $a = -2\cos\omega$, ω 是 ANF 的陷波频率. 在频率估计迭代过程中, ω 将趋近于式(13)定义的正弦输入信号频率 ω_0 , 此时 $a \rightarrow a_0 = -2\cos\omega_0$,

$$\begin{cases} X(n) = x(n) + v_0(n) = A\cos(\omega_0 n + \theta) + v_0(n) \\ \omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s} \end{cases} \quad (13)$$

其中, A 为信号幅值, θ 为信号相位; f_0 为信号实际频率, f_s 为采样频率; $v_0(n)$ 服从 $WGN(0, \sigma^2)$.

信号 $X(n)$ 分别通过 $N(z)$ 和 $H(z)$ 后分别为

$$e_1(n) = X(n) + aX(n-1) + X(n-2) \quad (14)$$

$$e_2(n) = e_1(n) - \rho a e_2(n-1) - \rho^2 e_2(n-2)$$

在对参数 a 进行自适应估计的过程中^[10], 需要分别得到信号 $e_1(n)$ 和 $e_2(n)$ 的梯度值 $g_1(n)$ 和 $g_2(n)$, 即

$$g_1(n) = \frac{\partial e_1(n)}{\partial a} = X(n-1) \quad (15)$$

$$g_2(n) = \frac{\partial e_2(n)}{\partial a} \approx X(n-1) - \rho e_2(n-1)$$

则 $g_1(n)$ 和 $g_2(n)$ 可等同于信号 $X(n)$ 通过式 (16) 所示的传递函数所得,

$$\begin{aligned} G_1(z) &= z^{-1} \\ G_2(z) &\approx z^{-1}[1 - \rho H(z)] \end{aligned} \quad (16)$$

由式 (12) 和 (16) 可得, 在 ANF 频率估计过程中, 噪声需要分别通过 $N(z)$, $H(z)$, $G_1(z)$ 和 $G_2(z)$, 产生的信号分别为 $v_1(n)$, $v_2(n)$, $v_3(n)$ 和 $v_4(n)$, 则 $v_1(n)$, $v_2(n)$, $v_3(n)$ 和 $v_4(n)$ 各自的均值 $E[v_1(n)]$, $E[v_2(n)]$, $E[v_3(n)]$ 和 $E[v_4(n)]$ 都为 0. 由于均值为 0, 则其方差分别为 $E[|v_1(n)|^2]$, $E[|v_2(n)|^2]$, $E[|v_3(n)|^2]$ 和 $E[|v_4(n)|^2]$, 于是

$$\begin{aligned} E[|v_1(n)|^2] &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |N(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a + 2\cos\omega)^2 d\omega = \sigma^2(a^2 + 2) \end{aligned} \quad (17)$$

$$E[|v_2(n)|^2] = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (18)$$

如果按照式 (18) 直接进行计算, 较为困难, 可令 $z = e^{j\omega}$, 则可变为式 (19)

$$\begin{aligned} E[|v_2(n)|^2] &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) d\omega \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz \end{aligned} \quad (19)$$

其中 C 为 z 域的单位圆, 于是

$$\begin{aligned} E[|v_2(n)|^2] &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C \frac{1 + az^{-1} + z^{-2}}{1 + \rho az^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \frac{1 + az + z^2}{1 + \rho az + \rho^2 z^2} \frac{1}{z} dz \quad (20) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_C \frac{z^2 + az + 1}{z^2 + \rho az + \rho^2} \frac{1 + az + z^2}{1 + \rho az + \rho^2 z^2} \frac{1}{z} dz \end{aligned}$$

令 $z^2 + \rho az + \rho^2 = 0$ 的根为 z_1 和 z_2 , 则 $z_1 + z_2 = -\rho a$, $z_1 z_2 = \rho^2$

$$\begin{aligned} \text{Res}(0) &= \frac{1}{\rho^2} \\ \text{Res}(z_1) &= \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \frac{(az_1 + 1 + \rho)^2}{z_1(z_1 - z_2)(1 - z_1^2)} \quad (21) \\ \text{Res}(z_2) &= \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \frac{(az_2 + 1 + \rho)^2}{z_2(z_2 - z_1)(1 - z_2^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[|v_2(n)|^2] &= \text{Res}(0) + \text{Res}(z_1) + \text{Res}(z_2) \quad (22) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \frac{(1 + \rho^2)(1 + \rho)^2 - 2\rho^2 a^2}{\rho^2(\rho^4 - \rho^2 a^2 + 2\rho^2 + 1)} \right) \end{aligned}$$

$E[|v_3(n)|^2]$ 和 $E[|v_4(n)|^2]$ 同 $E[|v_1(n)|^2]$ 和 $E[|v_2(n)|^2]$ 计算类似, 此处不再赘述, 其结果为式 (23)

$$E[|v_3(n)|^2] = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} E[|v_4(n)|^2] &= \sigma^2 \left(\frac{2\rho(1 - \rho)}{1 + \rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \rho)^3}{1 + \rho} \frac{1 + \rho^2}{\rho^4 - \rho^2 a^2 + 2\rho^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

设 $C_{i,j} = E[v_i(n)v_j(n)] = C_{j,i}$, 表示噪声通过不同传递函数后所得信号之间的相关性, 其中 $i, j \in 0, 1, 2, 3, 4$. 由此可得 $E[|v_i(n)|^2] = C_{i,i}$, 同时参考式 (11) 可计算得

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= E[|v_1(n)|^2] = \sigma^2(a^2 + 2) \\ C_{2,2} &= E[|v_2(n)|^2] \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \frac{(1 + \rho^2)(1 + \rho)^2 - 2\rho^2 a^2}{\rho^2(\rho^4 - \rho^2 a^2 + 2\rho^2 + 1)} \right) \\ C_{3,3} &= E[|v_3(n)|^2] = \sigma^2 \\ C_{4,4} &= E[|v_4(n)|^2] \\ &= \sigma^2 \left(\frac{2\rho(1 - \rho)}{1 + \rho} + \frac{(1 - \rho)^3}{1 + \rho} \frac{1 + \rho^2}{\rho^4 - \rho^2 a^2 + 2\rho^2 + 1} \right) \quad (24) \\ C_{0,1} &= E[v_0(n)v_1(n)] = \sigma^2 \\ C_{0,2} &= E[v_0(n)v_2(n)] = \sigma^2 \quad (25) \\ C_{0,3} &= E[v_0(n)v_3(n)] = 0 \\ C_{0,4} &= E[v_0(n)v_4(n)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= E[v_1(n)v_2(n)] = \sigma^2(a^2(1 - \rho)^2 + 2 - \rho^2) \\ C_{1,3} &= E[v_1(n)v_3(n)] = \sigma^2 a \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,4} &= E[v_1(n)v_4(n)] = \sigma^2(1 - \rho)^2 a \\ C_{2,3} &= E[v_2(n)v_3(n)] = \sigma^2(1 - \rho) a \\ C_{2,4} &= E[v_2(n)v_4(n)] \quad (27) \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{\rho(1 - \rho)a}{1 + \rho} + \frac{1}{1 + \rho} \frac{(1 - \rho)^3 a}{\rho^4 - \rho^2 a^2 + 2\rho^2 + 1} \right)$$

$$C_{3,4} = E[v_3(n)v_4(n)] = \sigma^2(1 - \rho) \quad (28)$$

4 ANF 稳态性能分析

稳态条件下, 参数估计值 $a = -2\cos\omega$ 将会趋近于包含信号真实频率值的参数 $a_0 = -2\cos\omega_0$, 此时, 计算 $N(z)$ 在输入信号频率 ω_0 处的频率响应, 可得

$$\begin{aligned} N(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0}} &= 1 + az^{-1} + z^{-2} \Big|_{z=e^{j\omega_0}} \\ &= 1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\omega_0} + e^{-j2\omega_0} \\ &= (a + 2\cos\omega_0) e^{-j\omega_0} \\ &= \delta e^{-j\omega_0} \\ &\Rightarrow N(z) = \delta z^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $\delta = a + 2\cos\omega_0 = a - a_0$, 表示 ANF 频率估计值 a 同输入信号频率真实值 a_0 的偏差.

将式 (29) 代入式 (12) 可得,

$$H(z) = \frac{\delta}{z + \rho a + \rho^2 z^{-1}} \quad (30)$$

当 ANF 到达稳态时, 此时 $a \rightarrow a_0$, 可在 a_0 的邻域内将 $H(z)$ 利用泰勒级数展开, 得

$$H(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta}{z + \rho a + \rho^2 z^{-1}} \\
&\approx \frac{\delta}{z + \rho a_0 + \rho^2 z^{-1}} + \delta \frac{d(z + \rho a + \rho^2 z^{-1})^{-1}}{da} \Big|_{a=a_0} (a - a_0) \\
&= \frac{\delta}{z + \rho a_0 + \rho^2 z^{-1}} - \frac{\rho \delta^2}{(z + \rho a_0 + \rho^2 z^{-1})^2} \quad (31)
\end{aligned}$$

式(31)中的分母 $z + \rho a_0 + \rho^2 z^{-1}$ 在信号频率 ω_0 处的频率响应为

$$\begin{aligned}
z + \rho a_0 + \rho^2 z^{-1} \Big|_{z=e^{j\omega_0}} &= e^{j\omega_0} + \rho a_0 + \rho^2 e^{-j\omega_0} \\
&= a(\rho - 1) + (\rho^2 - 1)e^{-j\omega_0} \quad (32)
\end{aligned}$$

由此可得 $N(z)$ 和 $H(z)$ 在 a_0 的邻域内的展开式为

$$\begin{cases} N(z) = \delta e^{-j\varphi_1} \\ H(z) = B\delta e^{-j\varphi_2} - \rho B^2 \delta^2 e^{-j2\varphi_2} \end{cases} \quad (33)$$

$$B = \frac{1}{(1 - \rho) \sqrt{(1 + \rho)^2 - \rho a_0^2}} \quad (34)$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} \omega_0, & \omega_0 \leq \pi/2 \\ \pi + \omega_0, & \omega_0 > \pi/2 \end{cases} \quad (35)$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{(1 + \rho) \sin \omega_0}{(1 - \rho) \cos \omega_0}, & \omega_0 \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi + \tan^{-1} \frac{(1 + \rho) \sin \omega_0}{(1 - \rho) \cos \omega_0}, & \omega_0 > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (36)$$

于是, ANF 进行频率估计的过程中, 在时刻 n , 信号 $e_1(n)$, $e_2(n)$, $g_1(n)$ 和 $g_2(n)$ 的表达式为:

$$\begin{cases} e_1(n) = \delta(n)q_1(n) + v_1(n) \\ e_2(n) = \delta(n)q_2(n) - \rho\delta^2(n)q_3(n) + v_2(n) \\ g_1(n) = x(n-1) + v_3(n) \\ g_2(n) = \rho^2\delta^2(n)q_3(n-1) - \rho\delta(n)q_2(n-1) \\ \quad + x(n-1) + v_4(n) \end{cases} \quad (37)$$

其中,

$$\begin{cases} q_1(n) = A \cos(\omega_0 n + \theta - \varphi_1) \\ q_2(n) = AB \cos(\omega_0 n + \theta - \varphi_2) \\ q_3(n) = AB^2 \cos(\omega_0 n + \theta - 2\varphi_2) \end{cases} \quad (38)$$

为充分分析 ANF 频率估计方法的统计性能, 特选择的 ANF 频率估计方法如式(39)所示, 该方法综合了文献[13-15]的方法, 具备一定的复杂性, 故用来进行稳态性能分析的计算对比验证.

$$\begin{cases} a(n+1) = a(n) - \mu G(n) \\ G(n) = [e_1(n) + e_2(n)][g_1(n) + g_2(n)] \end{cases} \quad (39)$$

其中, μ 为 ANF 自适应算法步长.

令 $\delta(n) = a(n) - a_0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 表示 ANF 频率估计进入稳态, 即保证 ANF 频率估计方法收敛, 则此时 ANF 频率估计的统计性能 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 的联立方程组为

$$\begin{cases} M_1 E[\delta(\infty)] + M_2 E[\delta^2(\infty)] = C_1 \\ M_3 E[\delta(\infty)] + M_4 E[\delta^2(\infty)] = C_2 \end{cases} \quad (40)$$

其中,

$$M_1 = A^2 \cos(\varphi_1 - \omega_0) + A^2 B \cos(\varphi_2 - \omega_0) \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= -\rho A^2 B^2 \cos(2\varphi_2 - \omega_0) - \frac{1}{2} \rho A^2 B \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \omega_0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \rho A^2 B^2 \cos \omega_0 \quad (42)
\end{aligned}$$

$$C_1 = -(C_{1,3} + C_{2,4} + C_{1,4} + C_{2,3}) \quad (43)$$

$$M_3 = -2C_1 - \mu \psi_2 \quad (44)$$

$$M_4 = 2M_1 - \mu \psi_1 \quad (45)$$

$$C_2 = \mu \psi_3 \quad (46)$$

$$\psi_1 = -4M_1 C_1 + 2\rho A^2 B \cos \varphi_2 (C_{1,1} + 2C_{1,2} + C_{2,2}) \quad (47)$$

$$\psi_2 = I_1 + I_2 + I_3 \quad (48)$$

$$I_1 = \rho^2 A^2 B^2 \left(\frac{1}{2} + 2\cos(2\varphi_2) \right) (C_{1,1} + C_{2,2} + 2C_{1,2}) \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{B^2}{2} + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) (C_{3,3} + C_{4,4} + 2C_{3,4}) \right) \\
&\quad + A^4 \left(1 + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 - 2\varphi_1) \right) \\
&\quad + A^4 B^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 - 2\varphi_2) \right) \\
&\quad + A^4 B (\cos(2\omega_0 - \varphi_1 - \varphi_2) + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2\rho A^2 B (2B \cos(\omega_0 - 2\varphi_2) \\
&\quad + \cos(\omega_0 + \varphi_2 - \varphi_1) + B \cos \omega_0) C_1 \quad (51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 &= (C_{1,1} + 2C_{1,2} + C_{2,2}) (2A^2 + C_{3,3} + 2C_{3,4} + C_{4,4}) \\
&\quad - 2C_1 \quad (52)
\end{aligned}$$

求解式(40)所示方程组, 即可获得 ANF 频率估计方法的统计性能 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 的理论值. 但针对式(40), 只有当 $M_1 M_4 - M_2 M_3 \neq 0$ 时, 式(40)所示方程组有解. 若利用式(41)~(52)直接分析 $M_1 M_4 - M_2 M_3$ 则过于复杂. 为简化分析, 可令输入信号不含噪声, 且令 $0 < \omega_0 \leq \pi/2$, 则 $\omega_0 = \varphi_1$, 且 $\varphi_2 \geq \omega_0 > 0$, 由此可得

$$M_1 = A^2 + A^2 B \cos(\varphi_2 - \omega_0) \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= -\rho A^2 B^2 \cos(2\varphi_2 - \omega_0) - \frac{1}{2} \rho A^2 B \cos \varphi_2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \rho A^2 B^2 \cos \omega_0 \quad (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_3 &= \mu A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{B^2}{2} + \frac{3A^2}{2} + A^2 B^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 - 2\varphi_2) \right) \right. \\
&\quad \left. + 3A^2 B \cos(\omega_0 - \varphi_2) \right) \quad (55)
\end{aligned}$$

$$M_4 = 2M_1 \quad (56)$$

将式(53)~(56)代入式(40), 可知 $M_1 M_4 - M_2 M_3 \neq 0$, 显示式(40)所示方程组有解. 但当噪声加入后, 特别当信噪比较低时, 有可能导致式(40)所示方程组无解, 即 ANF 频率估计方法出现不稳定, 此时通过设置较小的 μ 值, 可以提升 ANF 的稳定性, 保证式(40)所示方

程组有解.

5 计算验证

5.1 ANF 噪声性能分析

为了验证式(24)~(28)理论分析结果的正确性,给出不同噪声的自相关性与互相关性,在 matlab R2015b 环境下,选择参数 $\sigma^2=1, \rho=0.8$, 计算不同 a 值下的噪声相关性,如图 1 所示;参数 $\sigma^2=1, a=-1$, 不同 ρ 值下的噪声相关性,如图 2 所示,其中理论值按式(24)~(28)所示进行计算,计算值为噪声通过变换后求取其方差所得. 由图 1 和图 2 可知,计算结果同理论分析结果完全吻合,不同的 a 值和 ρ 值将导致噪声的性能发生改变,其自相关和互相关性会发生较大的改变,此时对于 ANF 频率估计方法的性能分析会产生一定的影响.

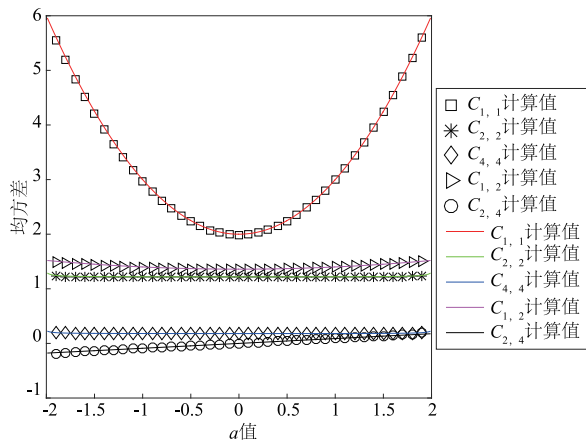


图1 $\sigma^2=1, \rho=0.8$ 时, 不同 a 值下的噪声相关性分析

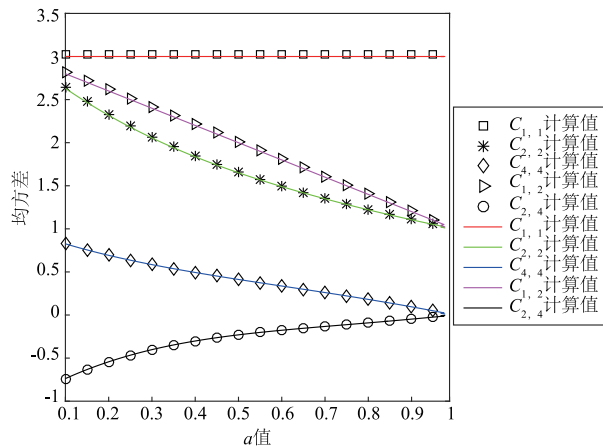


图2 $\sigma^2=1, a=-1$ 时, 不同 ρ 值下的噪声相关性分析

5.2 ANF 频率估计结果的统计性能分析

为了分析噪声对于 ANF 频率估计精度的影响,参数设置同文献[7]保持一致,即信号幅值 $A=\sqrt{2}$, 信号频率 $\omega_0=0.2\pi$, 相位 $\theta=0$, 信噪比 $\text{SNR}=5\text{dB}$, ANF 参数 $\rho=0.95$, 步长 $\mu=10^{-4}$, $a(0)=0$, 表示参数 a 在初始时

刻 0 的值为 0. 独立运行次数 10^5 次, 以保证获得曲线的平滑性. 单次运行时间长度的选择, 应保证式(39)所示的 ANF 频率估计方法可以完全充分的收敛, 以此来计算 ANF 在不同的 ω_0, ρ, μ 和 SNR 条件下的频率估计结果的稳态统计性能, 即式(40)方程组的解——偏差 $E[\delta(\infty)]$ 和均方差值 $E[\delta^2(\infty)]$, 同文献[7]理论值比较的计算结果如图 3~6 所示, 理论值的计算按式(40)进行计算, 实际值为频率估计值同频率真值的偏差和均方差值, 由此, 据图可知:

(1) 在整个频率范围内, ANF 频率估计的 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 值如图 3 所示. 由于 $(0.5\pi, \pi]$ 属于负频率范围, 同时也是频率 $(0, 0.5\pi]$ 的镜像, 故主要分析在 $(0, 0.5\pi]$ 范围内 ANF 频率估计的 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$.

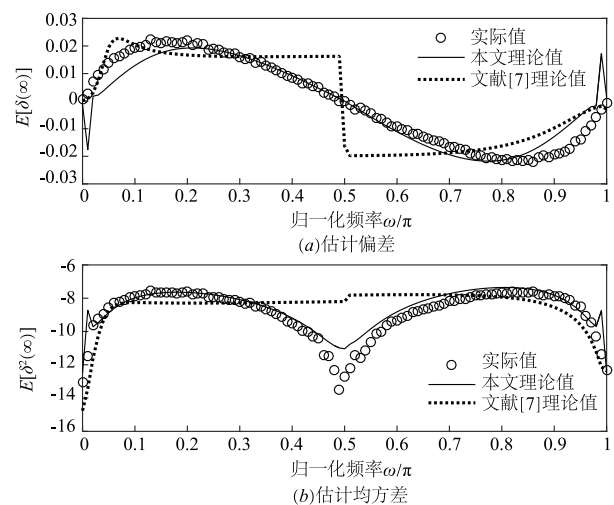


图3 $A=\sqrt{2}, \theta=0, \text{SNR}=5\text{dB}, \rho=0.95, \mu=10^{-4}, a(0)=0$, 独立运行 10^5 次, 不同频率值下的估计偏差和均方差值

由图 3 可知, 当 $x(n)$ 中频率 ω_0 靠近 0 时, ANF 频率估计的 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 均较小, 但理论值和实际值均有一定的偏差, 主要原因是此时的频率处于极端频率位置^[16], 这种条件下的 ANF 会出现不稳定的状态, 其频率估计值会出现较大的偏差, 且所需的收敛时间明显变长, 导致理论值与实际值出现偏差. 当频率靠近 0.5π 时, 此时的 ANF 估计精度较高, 但文献[7]给出的理论值无法准确预测实际值, 有一定的偏差, 而本文理论值可以较好的对实际值进行预测. 当频率 ω_0 处于 0.2π 附近时, 此时本文和文献[7]给出的理论值同实际值吻合度较高, 主要原因是信号频率处于中间段, ANF 的较为稳定, 此时进行理论分析时, 可以准确预测实际值. 因此在实际应用时, 应当选择合适的采样频率 f_s , 使 ω_0 处在 0.2π 的附近, 保证理论计算值的与实际计算值的高度一致性.

(2) 参数设置同上, 保持不变, 则不同 ρ 值下 ANF

频率估计的 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 如图 4 所示. 由图 4 可知, 在 ρ 值较小的条件下, 文献[7]方法相对于本文方法, 其给出的理论值 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 同实际值有一定的偏差. 分析其原因, 主要是文献[7]为了简化分析, 假设 ρ 值接近于 1, 从而导致当 ρ 值较小时, 其理论值不能准确预测实际值的趋势. 此外, 在 ρ 值较大的情况下, 特别是当接近 1 的时候, 此时 ANF 对噪声的抑制作用较强, 噪声影响小, 所以其频率估计性能的 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 值均较小, ANF 频率估计的精度较高.

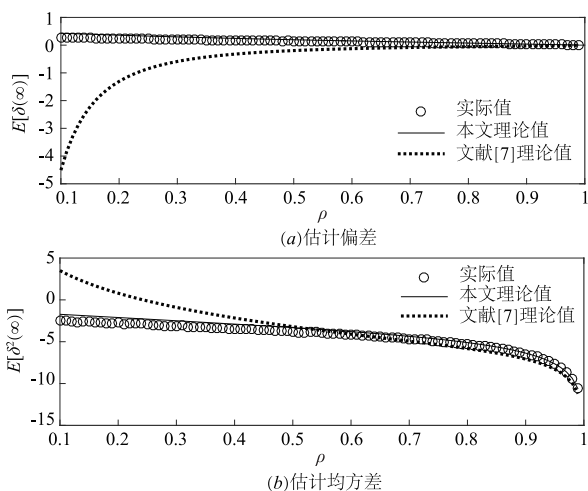


图4 $A=\sqrt{2}$, $\theta=0$, $\text{SNR}=5\text{dB}$, $\omega_0=0.2\pi$, $\mu=10^{-4}$, $a(0)=0$, 独立运行 10^5 次, 不同 ρ 值下的估计偏差和均方差值

(3) 参数设置同上, 保持不变, 则不同 μ 值下 ANF 频率估计的 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 如图 5 所示. 由图 5 可知, 较大的 μ 值会导致频率估计结果产生较大的振荡, 此时 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 均较大. 同时, 文献[7]给出的理论值同实际值始终有一定的偏差, 说明文献[7]方法对于 μ 值的分析适用性不强, 需格外处理. 值得注意的是, 较小的 μ 值虽然可以降低 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$, 但收敛的时间过长. 在 $\mu \in [10^{-4.5}, 10^{-3}]$ 时, 此时对于 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 的影响基本一致, 在保证精度的同时, 选择较大的 μ 值, 可以保证 ANF 的收敛速度.

(4) 参数设置同上, 保持不变, 则不同 SNR 条件下 ANF 频率估计的 $E[\delta(\infty)]$ 和 $E[\delta^2(\infty)]$ 如图 6 所示. 由图 6 可知, 低信噪比条件下, 本文方法给出的理论值可以较好的预测 ANF 频率估计性能的实际值, 而文献[7]给出的理论值在低信噪比条件下会同实际值产生一定的偏差, 说明其近似计算方法受噪声影响较大, 存在偏差.

6 结论

噪声作为造成 ANF 频率估计结果有偏的主要原

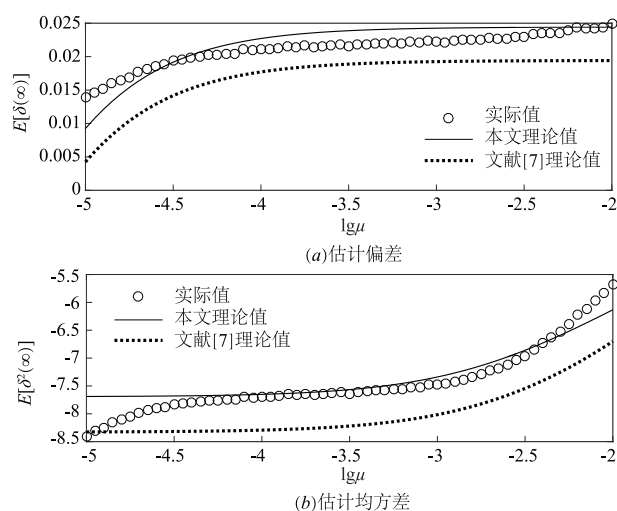


图5 $A=\sqrt{2}$, $\theta=0$, $\text{SNR}=5\text{dB}$, $\omega_0=0.2\pi$, $\rho=0.95$, $a(0)=0$, 独立运行 10^5 次, 不同 μ 值下的估计偏差和均方差值

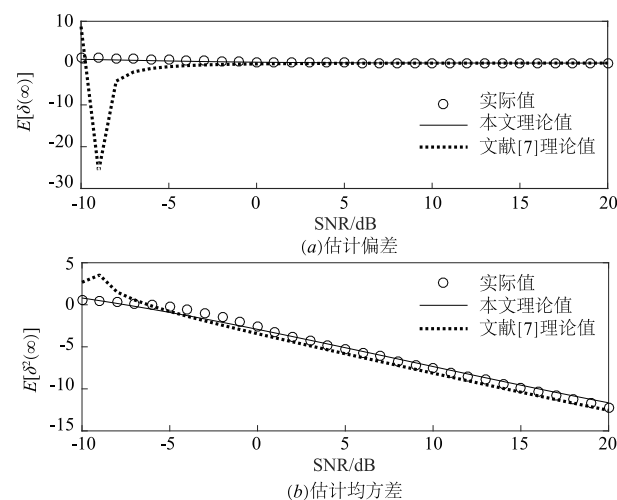


图6 $A=\sqrt{2}$, $\theta=0$, $\mu=10^{-4}$, $\omega_0=0.2\pi$, $\rho=0.95$, $a(0)=0$, 独立运行 10^5 次, 不同 SNR 值下的估计偏差和均方差值

因, 其变换后不同信号的自相关性和互相关性的分析显得尤为重要. 为此, 利用相关函数和功率谱分析噪声经不同变换后的统计性能, 从而可以在噪声条件下, 提升 ANF 频率估计性能分析的有效性, 较为准确的评估 ANF 频率估计方法的性能, 明确各参数对 ANF 频率估计精度影响的机理, 为 ANF 频率估计方法的设计与稳态性能分析提供理论方法, 从而为进一步提升 ANF 频率估计精度奠定基础.

参考文献

- [1] ZHENG SQ, FENG R. Feedforward compensation control of rotor imbalance for high-speed magnetically suspended centrifugal compressors using a novel adaptive notch filter [J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 366 (3): 1-14.

- [2] ZHU R, YANG F, YANG J. An RLS-Based lattice-form complex adaptive notch filter[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(2): 217 – 221.
- [3] GUANX, HU DH, ZHONG LH, et al. Strong echo cancellation based on adaptive block notch filter in passive radar [J]. IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters, 2015, 12(2): 339 – 343.
- [4] DANIELE B. Loop analysis of adaptive notch filters [J]. IET Signal Processing, 2016, 10(6): 659 – 669.
- [5] 丁康, 谢明, 杨志坚. 离散频谱分析校正理论与技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2008. 58 – 65.
DING K, XIE M, YANG ZJ. The Theory and Technology of Discrete Spectrum Correction [M]. Beijing: Science Press, 2008. 58 – 65. (in Chinese)
- [6] 毛育文, 涂亚庆, 张海涛, 等. 计及负频率的极高频信号离散频谱校正新方法[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32(3): 477 – 482.
MAO YW, TU YQ, ZHANG HT, et al. New discrete spectrum correction method with negative frequency contribution for ultra high frequency signals [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(3): 477 – 482. (in Chinese)
- [7] 李明, 涂亚庆, 沈廷鳌, 等. 自适应陷波滤波器频率估计新方法及其性能分析[J]. 电子学报, 2014, 42(1): 49 – 57.
LI M, TU YQ, SHEN TA, et al. A new frequency estimation method based on adaptive notch filter and its performance analysis [J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(1): 49 – 57. (in Chinese)
- [8] 储昭碧, 张崇巍, 冯小英. 基于自适应陷波滤波器的频率和幅值估计[J]. 自动化学报, 2010, 36(1): 60 – 66.
CHU ZB, ZHANG CW, FENG XY. Adaptive notch filter-based frequency and amplitude estimation [J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(1): 60 – 66. (in Chinese)
- [9] NIEDŹWIECKI M, KACZMAREK P. Self-optimizing generalized adaptive notch filters-comparison of three optimization strategies [J]. Automatica, 2009, 45(1): 68 – 77.
- [10] PUNCHALARD R, LORSAWATSIRI A, LOETWASSANA W, et al. Direct frequency estimation based adaptive algorithm for a second-order adaptive FIR notch filter [J]. Signal Processing, 2008, 88(2): 315 – 325.
- [11] PUNCHALARD R. Mean square error analysis of unbiased modified plain gradient algorithm for second-order adaptive IIR notch filter [J]. Signal Processing, 2012, 92(11): 2815 – 2820.
- [12] 李明, 涂亚庆, 沈廷鳌, 等. 二阶自适应陷波器频率估计方法统计性能分析 [J]. 信号处理, 2013, 29(6): 734 – 742.
LI M, TU YQ, SHEN TA, et al. Statistical performance analysis of frequency estimation method with second order adaptive notch filter [J]. Signal Processing, 2013, 29(6): 734 – 742. (in Chinese)
- [13] XIAO Y, TAKESHITA Y, SHIDA K. Steady-state analysis of a plain gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 2001, 48(7): 733 – 740.
- [14] PUNCHALARD R, LORSAWATSIRI A, KOSEEYAPORN J, et al. Adaptive IIR notch filters based on new error criteria [J]. Signal Processing, 2008, 88(3): 685 – 703.
- [15] LOETWASSANA W, PUNCHALARD R, KOSEEYAPORN J, et al. Unbiased plain gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros [J]. Signal Processing, 2012, 90(8): 2513 – 2520.
- [16] 李明, 涂亚庆, 沈廷鳌, 等. 极端频率直接估计的新自适应陷波器方法 [J]. 振动工程学报, 2014(5): 785 – 793.
LI M, TU YQ, SHEN TA, et al. Extremely frequency direct estimation algorithm based on new adaptive notch filter (ANF) and its performance analysis [J]. Journal of Vibration Engineering, 2014(5): 785 – 793. (in Chinese)

作者简介



李明 男, 1985 年 1 月出生于山西太原, 现为后勤工程学院讲师, 主要研究方向为信号处理, 智能检测与仪表。
E-mail: limitonly@126.com



涂亚庆 男, 1963 年 6 月出生于重庆市, 现为后勤工程学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能检测与仪表、智能自动化系统。
E-mail: yqtqc@sina.com