

基于二次有理分式拟合多能投影曲线的 X射线能谱估计方法

罗 婷^{1,2}, 李孟飞³, 赵云松^{1,2}

(1. 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048; 2. 检测成像北京高校工程研究中心, 北京 100048;
3. 广东工业大学机电工程学院, 广东广州 510006)

摘 要: 在 X 射线计算机断层(CT)成像领域, 多种应用需要准确的 X 射线能谱信息, 包括能谱 CT 图像重建、CT 图像硬化校正、CT 图像的定量分析等. 然而, 由于 CT 系统中 X 光机发出的射线流强很大, X 射线能谱一般难以直接测量, 更为常用的方法是利用不同厚度模体的投影数据, 间接估计能谱. 该类方法将能谱估计问题转化为一组病态线性方程组的求解问题. 为了获得较为准确的 X 射线能谱, 通常需要测量多组投影数据, 工作量大. 针对该问题, 本文提出一种新的 X 射线能谱估计方法. 该方法利用二次有理分式拟合多能投影曲线, 然后利用多能投影曲线上的采样点间接估计 X 射线能谱. 由于二次有理分式参数少, 因此该方法仅需少量的测量点即可拟合出高精度的多能投影曲线. 实验表明: 本文方法仅需要 3 个测量点就可以达到传统方法使用十几个测量点估计的 X 射线能谱的精度, 显著减少了采样数量, 进而减少能谱估计的工作量. 仿真和实采数据都验证了方法的有效性.

关键词: X 射线能谱估计; 投影数据; 多能投影曲线; 二次有理分式

中图分类号: TP391.4; R811.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)11-2580-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.11.003

X-Ray Spectrum Estimation Method Based on Polychromatic Projection Curve Fitting with Quadratic Rational Fraction

LUO Ting^{1,2}, LI Meng-fei³, ZHAO Yun-song^{1,2}

(1. School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048, China;

2. Detecting and Imaging Engineering Research Center of Beijing Higher Institutions, Beijing 100048, China;

3. School of Electromechanical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510006, China)

Abstract: Knowledge of X-ray spectrum is essential in many applications of X-ray computed tomography (CT), such as spectral CT imaging, beam hardening correction, quantitative analysis of CT images, etc. But the spectrum of an X-ray source is hard to measure with X-ray spectrometer directly due to strong X-ray flux emitted. Other kind of attractive methods are indirect, which estimate the x-ray spectrum from a set of projection data of phantoms with different thicknesses. In indirect methods, the spectrum estimation problem is boiled down to a set of ill conditioned linear equations. To acquire accurate spectrum, a large number of measurements are required, which needs heavy workload. To overcome the abovementioned obstacle, we propose a novel X-ray spectrum estimation method that first fits the polychromatic projection curve with quadratic rational fraction, and then estimate the X-ray spectrum from the sampling points of the fitted curve. As a quadratic rational fraction includes only three parameters, only a few measurements are needed to get an accurate fitting. Numerical experiments show that the accuracy of the X-ray spectrum estimated through the proposed method with three measurements is commensurate to that estimated with tradition method from over a dozen of measurements. Therefore, the proposed method lessens the workloads effectively.

Key words: X-ray spectrum estimation; projection data; polychromatic projection curve; quadratic rational fraction

1 引言

X 射线计算机断层(computed tomography, 简称 CT)成像技术能够无损地再现被检测物体的内部结构信息,已广泛应用于医学诊断、工业无损检测、逆向工程、安全检查等领域. CT 成像的准确性依赖于对 X 射线与物质相互作用建模的准确性,其中 X 射线能谱是一个重要因素,尤其在能谱 CT 成像^[1-3]、CT 图像硬化校正^[4-6]、CT 图像的定量分析^[7]等应用中扮演着重要角色. 因此,如何获取 X 射线能谱信息一直是 X 射线 CT 成像中的一个重要研究课题.

已有的 X 射线能谱获取方法可大致分为两类:直接方法和间接方法. 直接方法即使用 X 射线光谱仪等设备直接测量 X 射线能谱;间接方法是利用 X 射线穿过不同厚度已知材料模体的测量数据与 X 射线能谱、模体厚度、模体衰减系数间的定量关系,建立关于 X 射线能谱的方程组,通过求解该方程组,获得 X 射线能谱信息. 对于 X 射线 CT 系统,由于 X 光机产生的射线流强很大,X 射线能谱难以利用光谱仪等设备直接测量. 更为常用的方法是间接方法.

间接方法,也称为能谱估计,根据对 X 射线能谱描述方式的不同,又可以分为两类:一类是根据物理事实,建立含有未知参数的解析式来刻画 X 射线能谱^[8-13]. 如文献[11]中,用多项式、Delta 函数和指数函数的组合来表示 X 射线能谱. 另一类是估计离散的 X 射线能谱,即将 X 射线的能量范围分段,估计出每一小段内 X 射线光子占全部光子的比例^[4,6,14-18]. 第一类方法的未知参数少,求解相对容易;但是该方法的准确性严重依赖于解析式对 X 射线能谱表示的准确性,不准确的解析式可能会导致 X 射线能谱的系统性偏差. 第二类方法将能谱估计问题归结为一线性方程组的求解问题,形式简单. 但是,通常该方程组严重病态,直接求解可能会导致不准确的能谱. 为克服上述困难,一方面,人们提出了更为稳定的求解方法,如 EM 方法^[15]等;另一方面,通过增多测量数据量,增加方程个数来提高问题的适定性. 在工程应用中,针对一种扫描条件(固定的电压、电流、滤波片等),通常需要测量十几至几十个不同厚度模体的测量数据^[4,14,19],工作繁复,所需时间长.

间接方法测量获得的是模体厚度与投影数据之间的关系,确切地说是非线性多能投影曲线. 该曲线具有很好的光滑性和渐近特性. 文献[20]指出,多能投影曲线适合用二次有理分式来逼近. 二次有理分式的参数个数少,仅需少量已知点即可确定其参数值. 基于此,本文提出一种 X 射线能谱间接估计的新方法. 该方法首先使用二次有理分式近似多能投影曲线;然后对该曲线采样,并由此构造估计 X 射线能谱的线性方程组;最

后求解该方程组,估计出 X 射线能谱. 由于二次有理分式参数少,该方法仅需少量的测量点即可拟合出高精度的多能投影曲线;又因为获得了多能投影曲线的解析表达,我们可以对其密集采样,尽可能地增加能谱估计方程组的适定性,提高求解精度. 仿真和实采数据实验验证了方法的有效性. 实验结果表明:本文方法仅需要 3 个测量数据就可以达到传统方法使用十几个测量数据的估计精度,显著减少了对测量数据个数的需求,降低了能谱估计的工作量.

2 方法

2.1 能谱估计模型

在忽略散射的情况下,多能 X 射线沿路径 L 穿过物体获得投影数据的过程可由下式表示^[19,22]:

$$p(L) = -\ln \int S(E) e^{-\int \mu(x,E) dl} dE \quad (1)$$

其中 $\mu(x,E)$ 是被测物体在点 x 处关于能量为 E 的光子的线性衰减系数; $S(E)$ 是归一化的等效能谱,满足 $\int S(E) dE = 1$. 该能谱与 X 光机的发射谱、探测器的闪烁体以及所用滤波片的材质和厚度有关. 当被测物体为均匀单材质物质时,式(1)可简化为:

$$p = P(H) = -\ln \int S(E) e^{-\mu(E)H} dE \quad (2)$$

其中 H 为射线穿过该物体的长度. 可以看到,投影数据是物质厚度 H 的函数,我们称之为多能投影曲线.

考虑式(2)的离散形式. 将 X 射线能量范围等间隔划分为 N 个小区间,小区间宽度为 ΔE ,相应的能谱 $S(E)$ 离散化为 (S_1, S_2, \dots, S_N) ,被测物体的线性衰减系数 $\mu(E)$ 可以离散化为 $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$. 则多能投影的离散形式表示如下:

$$p = -\ln \sum_{i=1}^N S_i e^{-\mu_i H} \Delta E \quad (3.1)$$

或

$$e^{-p} = \sum_{i=1}^N S_i e^{-\mu_i H} \Delta E \quad (3.2)$$

为简单起见,引入记号:

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T = (S_1, \dots, S_N)^T \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = (a_{j,i}), a_{j,i} = e^{-\mu_i H_j} \Delta E, j=1, \dots, M, i=1, \dots, N \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = (e^{-p_1}, \dots, e^{-p_M})^T \quad (6)$$

其中 $(\cdot)^T$ 表示向量或矩阵的转置,则能谱估计问题就是:已知 M 个测量数据(也称测量点) $(H_j, p_j), j=1, 2, \dots, M$,求解如下方程组:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad (7)$$

考虑到能谱的非负性,通常会对 \mathbf{X} 添加非负约束. 对于能谱估计问题,方程组(7)严重病态,有很多文献研究该问题的稳定求解算法,如 EM^[15]、截断奇异值分

解(TSVD)^[16,17]、先验截断奇异值分解(PTSVD)^[18]等。

对医学和工业 CT, X 射线能谱的能量范围一般在 80–450keV 间. 如果取 $\Delta E = 1\text{keV}$, 对应离散的 X 射线能谱向量维度, 也就是问题(7)的未知量个数 N 将达到上百个, 甚至几百个. 因此, 在进行能谱估计时, 为提高方程组(7)的适定性, 需要对多组不同厚度的模型进行实验, 测量投影数据.

2.2 X 射线能谱估计方法

能谱估计的核心是建立方程组(7)中的对应关系, 传统方法是一个测量点获得一个等式, 为了保证方程组的适定性, 需要测量多组数据, 导致应用中工作量大. 注意到, 方程组(7)中的一个等式对应多能投影曲线(即式(2))上的一个采样点. 因此本文考虑, 先通过测量数据恢复多能投影曲线; 然后, 对该曲线采样构造方程组(7)来估计能谱. 多能投影曲线通常是光滑的, 且具有渐近特性, 可用二次有理分式进行拟合^[20]. 二次有理分式参数个数少, 因此仅需少量已知数据即可准确拟合多能投影曲线, 进而估计能谱, 从而减小能谱估计的工作量. 本节首先介绍基于二次有理分式的多能投影曲线拟合方法, 然后给出能谱估计方法.

2.2.1 二次有理分式拟合多能投影曲线

拟合多能投影曲线的二次有理分式表达式如下:

$$\frac{\alpha_1 H + \alpha_2 H^2}{1 + \alpha_3 H} \approx P(H) \quad (8)$$

其中 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为待定系数. 假设有测量值 (H_j, p_j) , $j = 1, 2, \dots, M$, 确定系数 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 即求解如下问题:

$$(H_j \quad H_j^2 \quad -p_j H) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = p_j, \text{ and } \alpha_r > 0, \quad (9)$$

$$r = 1, \dots, 3, j = 1, 2, \dots, M$$

此处利用了多能投影曲线(2)的性质: ①连续, ②严格递增, ③凹性^[21]. 利用这些性质可导出二次有理分式系数为正, 即 $\alpha_r > 0, r = 1, \dots, 3$. 由于二次有理分式只含有 3 个未知参数 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 因此仅需少量测量数据 (H_k, p_k) 即可准确估计参数值.

2.2.2 基于二次有理分式拟合多能投影曲线的 X 射线能谱估计方法

拟合出多能投影曲线 $P(H)$ 后, 可在该曲线上密集采样得到 (H_k, p_k) , $k = 1, 2, \dots, M^*$, $M^* \geq N$, 由此可进一步获得能谱估计的线性方程组(7). 求解该方程组即可估计出 X 射线能谱向量 (S_1, \dots, S_N) . 本方法通过增加采样点个数来增加方程个数, 以提高方程组的适定性, 进而提高能谱估计的准确性.

综上, 本文基于二次有理分式拟合多能投影曲线的 X 射线能谱估计方法步骤如下:

(1) 设置 X 光机电压 N kV, 扫描 M 组不同厚度的模体, 得到测量点 (H_j, p_j) , $j = 1, 2, \dots, M$;

(2) 测量点代入问题(9), 拟合多能投影曲线 $P(H)$;

(3) 对多能投影曲线采样, 得到 (H_k, p_k) , $k = 1, 2, \dots, M^*$, $M^* \geq N$;

(4) 采样点代入问题(7), 并求解得到能谱向量 (S_1, \dots, S_N) .

3 实验

本节分别通过仿真实验和实采数据实验验证本文方法的有效性, 并与只利用测量点构造方程组(7)的传统方法进行比较. 由于 EM 算法具有很好的稳定性, 而且获得的解自然地满足非负约束, 本文在求解式(7)时, 均采用了 EM 算法.

3.1 仿真实验

仿真实验分为以下两组: 一是利用二次有理分式拟合多能投影曲线实验, 测试测量点个数对二次有理分式拟合多能投影曲线精度的影响; 二是根据多能投影曲线采样点估计能谱实验, 测试多能投影曲线上采样点对能谱估计精度的影响. 我们对不同电压下的多个能谱进行了实验, 均取得了较好的能谱估计效果. 但篇幅所限, 本节仅给出一组实验结果.

仿真实验使用开源软件 Spectrum GUI 生成 X 射线能谱. 实验中仿真了 Oxford Series6000 球管在 140kV 下穿过 0mm 和 1mm Cu 滤波片的能谱, 并对能谱做了归一化处理; 其中添加 1mm 滤波片的能谱为待估计能谱, 无滤波片的能谱作为 EM 算法的初始值. 模体的线性衰减系数从美国国家标准技术研究院(NIST)网站获得^[23], 并根据能谱的离散取值对其做了相应的插值. 不同厚度模体对应的投影数据根据式(3.1)计算得到. 实验对无噪声数据和带噪声数据都进行了测试, 其中噪声数据是 400 次添加光子个数为 10^6 的泊松噪声数据的均值.

为了对方法精度进行定量分析, 本文计算了平均绝对误差(MAD)、标准均方根误差(NRMSE)和平均能量差(MED)^[24]三种度量, 公式分别如下:

$$\text{MAD} = \sum_{q=1}^Q \frac{|Y_q - Y_q^*|}{Q} \quad (10)$$

$$\text{NRMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^Q (Y_q - Y_q^*)^2}{\sum_{q=1}^Q (Y_q)^2}} \quad (11)$$

$$\text{MED} = \text{abs} \left(\sum_{q=1}^Q E_q (Y_q - Y_q^*) \right) \quad (12)$$

其中 $Y_q, q = 1, \dots, Q$ 为估计值和 $Y_q^*, q = 1, \dots, Q$ 为真实

值. 式(12)仅用于衡量能谱估计精度, 符号 E_q 表示第 q 个能段上光子的能量.

3.1.1 利用二次有理分式拟合多能投影曲线实验

本小节实验测试测量点个数对二次有理分式拟合多能投影曲线精度的影响. 2005年Sidky等在文献[15]指出, 测量点的个数对能谱估计的影响较大, 而最大厚度对能谱估计的影响不大, 并给出了最大厚度选取的经验公式(单位 cm):

$$H_{\max} = \frac{\ln 10000}{\mu(E_{\max}/2)} \quad (13)$$

其中, E_{\max} 为 X 射线光子的最大能量, $\mu(E_{\max}/2)$ 为物质在 $E_{\max}/2$ 处的线性衰减系数.

实验中, 在 $(0, H_{\max}]$ cm 内等间隔选取了 M 个厚度计算测量点 (H_j, p_j) , $j=1, \dots, M$. 注意到 $(0, 0)$ 一定在多能投影曲线上, 所以, 我们是用了 $M+1$ 个已知点拟合

多能投影曲线. 为了考察二次有理分式拟合多能投影曲线的通用性, 我们对能谱估计中常用的三种材质: Al (原子序数 $Z=13$)、Fe($Z=26$)、Cu($Z=29$)分别进行了实验. 根据式(13), 要估计 140kV 的 X 射线能谱, 需要的被测模体 Al、Fe、Cu 的最大厚度分别为 14.8、1.48、0.89cm.

图 1 给出了不同测量点个数 M 对二次有理分式拟合三种不同材质的多能投影曲线精度的影响, 其中图 1(a)和图 1(b)分别展示了在无噪声情况下, 多能投影曲线的 NRMSE 和 MAD 随测量点个数 M 变化的曲线, 图 1(c)和图 1(d)分别展示了在噪声情况下, 多能投影曲线的 NRMSE 和 MAD 随测量点个数 M 变化的曲线. 由图中可以观察到: 对不同材料, 使用 3 个测量点即可较好地拟合多能投影曲线.

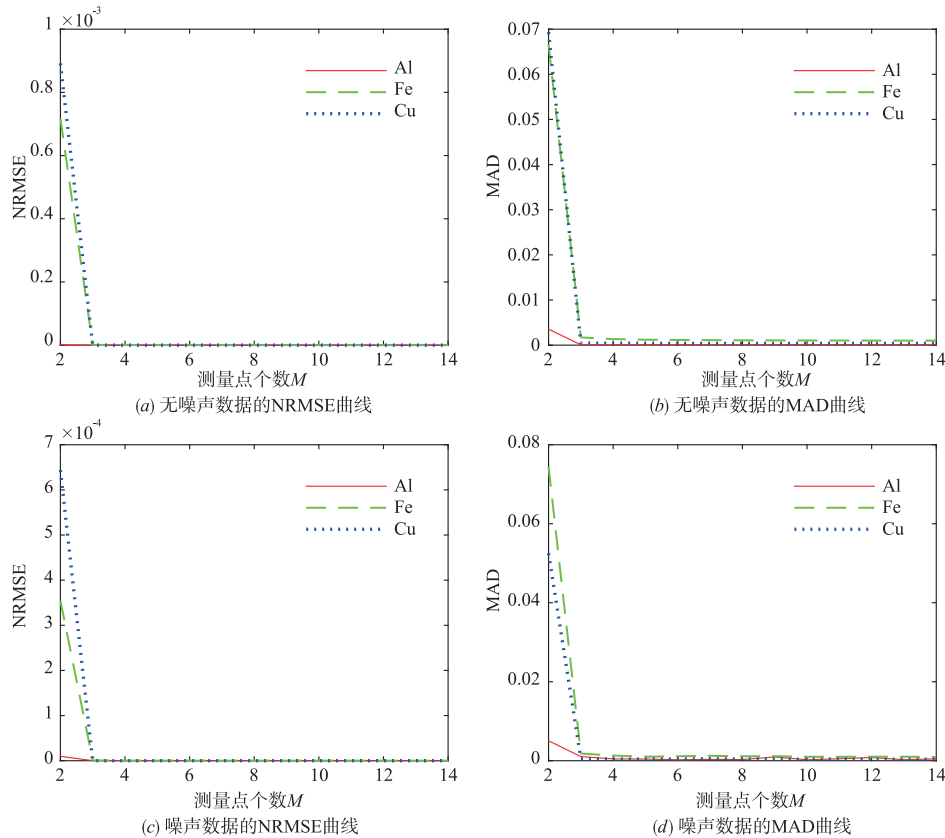


图 1 多能投影曲线的 NRMSE 和 MAD 随测量点个数的变化曲线

图 2 展示了三种材质的多能投影曲线以及使用 3 个测量点拟合的二次有理分式结果, 两条曲线基本上重合. 为了更明显地展示拟合误差, 图 3 给出了图 2 中二次有理分式拟合多能投影曲线的相对误差. 可以观察到: Al、Cu 材质的投影数据的相对误差在 3% 以内, 而 Fe 材质的误差相对较大, 因此实际实验中, 我们推荐使用 Al、Cu 材质. 由上述结果可以得出: 使用 3 个测量点拟合二次有理分式用来逼近多能投影曲线是可行的, 可以进一步使用

多能投影曲线上的采样点来估计能谱.

3.1.2 根据多能投影曲线采样点估计能谱实验

本小节以 Al 材质为例, 测试多能投影曲线上采样点个数对能谱估计精度的影响. 多能投影曲线由 3 个测量点拟合得到. 在多能投影曲线上, 按厚度在 $[0, 14.8]$ cm 内等间隔取 M^* 个采样点 (H_k, p_k) , $k=1, 2, \dots, M^*$ 来估计能谱. 值得注意的是: 此处的采样点个数即

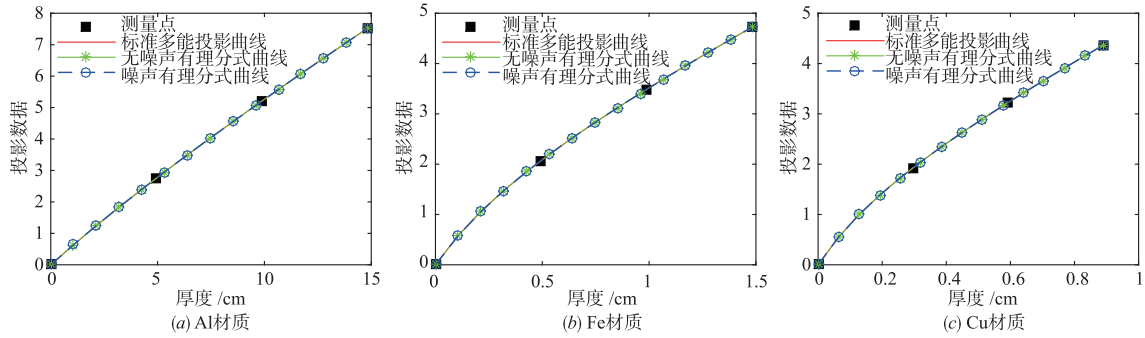


图2 对不同材质,使用3个测量点拟合的多能投影曲线

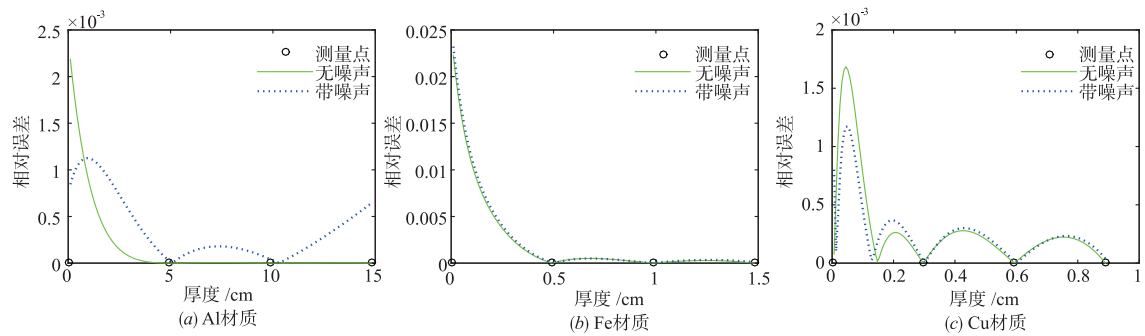


图3 图2拟合多能投影曲线的相对误差

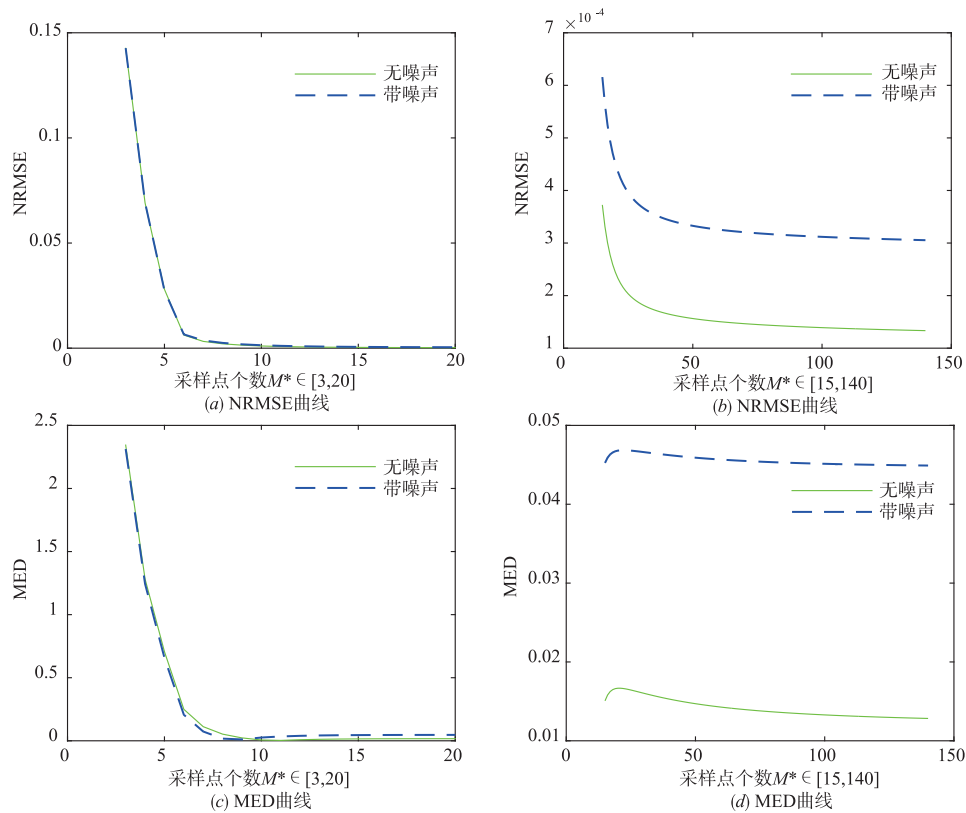


图4 估计能谱的NRMSE和MED随采样点个数 M^* 变化的曲线

对应于传统方法中的测量点个数.

估计能谱的 NRMSE 和 MED, 随采样点个数 M^* 变

化的曲线如图 4 所示, 其中无噪声数据结果用绿色直线表示, 噪声数据结果用蓝色短划

4(b) 是在采样点个数为 [3, 20] 和 [15, 140] 内的 NRMSE 曲线,图 4(c) 和 4(d) 是在采样点个数为 [3, 20] 和 [15, 140] 内的 MED 曲线. 从图中可以看出,随采样点个数增加,能谱估计的精度越来越高;采样点个数超过 12 时,估计能谱的 NRMSE 误差小于 0.001. 图 5 给出了使用 140 个采样点估计的能谱,估计谱与真实谱基本上重合.

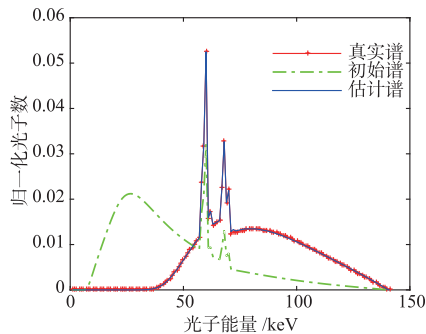


图5 使用140个采样点估计能谱的结果

由以上观察可得:本文方法仅需要 3 个测量点就可以达到传统方法使用十几个测量点的能谱估计的精度,显著减少了测量点个数需求,降低了能谱估计的工作量.

3.2 实采数据实验

本小节进行实采数据实验. 实验在作者所在实验室的 CT 系统上进行,该 CT 系统的 X 光机型号为 YX-LON. TU 450 - D05,探测器为 PerkinElmer XRD 1622. 实验时,添加了 1mm 厚的铝质滤片. 为了减小散射光子对测量数据的影响,实验对 X 射线进行了准直.

实验管电压为 140kV,扫描模体为不同厚度的铝板. 虽然文献[15]对估计 140kV X 射线能谱,推荐铝材质的最大厚度为 14.8cm,但我们发现对 6cm 厚度铝板,穿透率已不足 2%. 透射光子数较少,会导致数据噪声较大,测量值不准确,进而影响估计谱的准确性. 因此,我们实验中测试的最大厚度为 6cm. 表 1 列出了 11 组测量数据. 实验选取 (2, 4, 6) cm 厚度对应的测量点用于能谱估计,其余测量点用于验证估计谱的准确性.

图 6 为实验结果. 图 6(a) 给出了利用二次有理分式拟合的多能投影曲线,其中红色圆点是测量点,绿色

圆圈点是拟合多能投影曲线用的测量点;图 6(b) 给出了估计的 X 射线能谱,其中红色点线是 EM 方法的初始谱,绿色直线是使用传统方法估计的谱,蓝色点划线是使用本文方法估计的谱;为了考察估计谱的准确性,图 6(c) 给出了根据图 6(b) 中的估计谱重新计算的多能投影曲线,图 6(d) 为对应的相对误差,其中绿色直线表示根据传统方法估计谱的结果,蓝色点线表示根据本文方法估计谱的结果. 从图 6(b) 所展示的能谱形状上来说,本文方法估计的能谱结果更符合实际;图 6(c) 和图 6(d) 中,传统方法估计的能谱在计算小厚度材料 (0 - 1cm) 的投影值时出现了较大误差,这是因为传统方法用于构造问题(7)的测量点,不包括该小厚度内的测量点. 而本文方法使用了拟合多能投影曲线上不同厚度的采样点构造问题(7),因此获得了更高的精度.

4 总结

本文提出了一种 X 射线能谱估计方法. 该方法首先利用二次有理分式由测量点数据拟合多能投影曲线,然后利用多能投影曲线上的密集采样点估计 X 射线能谱. 二次有理分式具有良好的渐近特性,与多能投影曲线的性质相符,因此能较好地拟合多能投影曲线^[20]. 而在获得高精度拟合曲线后,对该曲线进行密集采样就相当于获得了多组测量数据. 本文方法的第二步就相当于通过多组测量数据估计 X 射线能谱^[15,18]. 仿真和实采数据验证了方法的有效性. 实验表明,本文方法仅需要 3 个测量点,就可以达到传统方法使用十几个测量点估计能谱的精度,显著减少了测量点个数需求,降低了能谱估计的工作量.

本文实验中能谱估计的测量点是等间隔选取的. 考虑到多能投影曲线的曲率是随厚度变化的,因此测量点位置的选择可能会对能谱估计的精度产生影响,值得进一步研究.

致谢

本研究获北京数学与信息交叉科学协同创新中心资助. 作者感谢首都师范大学检测成像工程中心张朋教授和赵星教授在实验设计和论文写作方面的有益讨论,感谢匿名审稿专家和编辑对论文提出的宝贵意见和建议.

表 1 实际采集的 11 组测量数据

试验编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
厚度/cm	0.3	0.5	1	2	2.5	3	4	4.5	4.8	5	6
投影数据	0.2770	0.4509	0.8421	1.5347	1.8570	2.1814	2.7735	3.0737	3.2429	3.3616	3.9264

参考文献

[1] Zhao Y, Zhao X, Zhang P. An extended algebraic recon-

struction technique (E-ART) for dual spectral CT [J]. IEEE T Med Imaging, 2015, 34(3): 761 - 768.

[2] Zhao X, Hu J, Zhao Y, et al. A novel iterative reconstruc-



图6 使用厚度为(2,4,6) cm的测量点的实验结果

tion method for dual-energy computed tomography based on polychromatic forward-projection calibration [J]. *Insight*, 2014, 56(10): 541–548.

- [3] 赵云松, 张慧滔, 赵星, 张朋. 双能谱 CT 的迭代重建模型及重建方法[J]. *电子学报*, 2014, 42(4): 666–671.
Zhao Y, Zhang H, Zhao X, Zhang P. Iterative reconstruction model and reconstruction method for dual energy computed tomography [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2014, 42(4): 666–671. (in Chinese)
- [4] 张慧滔, 张朋. 基于计算层析成像扫描数据的 X 射线能谱估计方法[J]. *光学学报*, 2013, 33(11): 1134001.
Zhang H, Zhang P. X-ray spectrum estimation method from scanning data of computed tomography phantoms [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(11): 1134001. (in Chinese)
- [5] Idris A Elbakri, Jeffrey A Fessler. Statistical image reconstruction for polyenergetic x-ray computed tomography [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2002, 21(2): 89–99.
- [6] 叶侠娟, 张朋. CT 系统的能谱估计及射束硬化校正算法 [J]. *CT 理论与应用研究*, 2003, 12(2): 10–15.
Ye X, Zhang P. Estimation of energy spectra of CT system and beam-hardening correction algorithm [J]. *CT Theory and Applications*, 2003, 12(2): 10–15. (in Chinese)
- [7] Zhang L, Zhang G, Chen Z, et al. X-ray spectrum estimation from transmission measurements using the expectation

maximization method [A]. *Proceedings of Nuclear Science Symposium Conference Record [C]*. Honolulu, HI, USA: IEEE NSS, 2007, 4: 3089–3093.

- [8] Archer B R, Wagner L K. A laplace transform pair model for spectral reconstruction [J]. *Medical Physics*, 1982, 9(6): 844–847.
- [9] Archer B R, Wagner L K. A modified x-ray spectra reconstruction technique [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 1988, 33(12): 1399–1406.
- [10] Archer B R, Wagner L K. Determination of diagnostic x-ray spectra with characteristic radiation using attenuation analysis [J]. *Medical Physics*, 1988, 15(4): 637–641.
- [11] 杨莹, 牟轩沁, 余厚军, 等. 基于模型的钨靶 X 射线球管光谱重建 [J]. *电子学报*, 2010, 38(10): 2285–2291.
Yang Y, Mou X, Yu H, et al. Model-based tungsten anode x-ray tube spectra reconstruction method [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2010, 38(10): 2285–2291. (in Chinese)
- [12] Yang Ying, Mou Xuanqin, Chen Xi. A robust X-ray tube spectra measuring method by attenuation data [A]. *Proceedings of Medical Imaging [C]*. San Diego, USA: SPIE, 2006. 61423K1–61423K12.
- [13] 陈希, 牟轩沁, 杨莹. 一种从衰减数据重建 X 射线球管光谱的方法 [J]. *西安交通大学学报*, 2006, 10(10): 1056–1059.
Chen X, Mou X, Yang Y. Reconstruction of X-ray tube

- spectra from attenuation data [J]. Journal of Xi'an Jiao-Tong University, 2006, 10(10): 1056 - 1059. (in Chinese)
- [14] Duan X, Wang J, Yu L, et al. CT scanner x-ray spectrum estimation from transmission measurements [J]. Medical Physics, 2011, 38(2): 993 - 997.
- [15] Sidky E Y, Yu L, Pan X, et al. A robust method of x-ray source spectrum estimation from transmission measurements; Demonstrated on computer simulated, scatter-free transmission data [J]. Journal of Applied Physics, 2005, 97(12): 124701.
- [16] Tominaga S. A singular-value decomposition approach to X-ray spectral estimation from attenuation data [J]. Nuclear Instruments & Methods in Physics Research, 1986, 243(2): 530 - 538.
- [17] Armbruster B, Hamilton R J, Kuehl A K. Spectrum reconstruction from dose measurements as a linear inverse problem [J]. Physics in Medicine and Biology, 2004, 49(22): 5087.
- [18] Leinweber C, Maier J, Kachelrieß M. X-ray spectrum estimation for accurate attenuation simulation [J]. Medical Physics, 2017, 44(12): 6183 - 6194.
- [19] Zhang G, Cheng J, Zhang L, et al. A practical reconstruction method for dual energy computed tomography [J]. Journal of X-ray Science and Technology, 2008, 16(2): 67 - 88.
- [20] Cardinal H N, Fenster A. An accurate method for direct dual-energy calibration and decomposition [J]. Medical physics, 1990, 17(3): 327 - 341.
- [21] 于平. CT 图像的伪影校正方法研究 [D]. 北京: 首都师范大学, 2015.
Yu P. Research on artifact correction in CT images [D]. Beijing: Capital Normal University, 2015. (in Chinese)
- [22] Yan C H, Whalen R T, Beaupre G S, et al. Reconstruction algorithm for polychromatic CT imaging: application to beam hardening correction [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2000, 19(1): 1 - 11.
- [23] J H Hubbell, S M Seltzer. Tables of X-ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients 1 keV to 20 MeV for Elements $Z = 1$ to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest [R]. United States: National Inst. of Standards and Technology-PL, Gaithersburg, MD, 1995.
- [24] Zhao W, Xing L, Zhang Q, et al. Segmentation-free x-ray energy spectrum estimation for computed tomography using dual-energy material decomposition [J]. J Med Imaging, 2017, 4(2): 023506.

作者简介



罗 婷 女, 1989 年生于山东聊城. 首都师范大学数学科学学院博士研究生, 检测成像北京高校工程研究中心成员. 主要研究方向为 CT 理论与应用、图像处理、计算机图形学.
E-mail: luoting19891026@126.com



李孟飞 男, 1987 年生于河南禹州. 广东工业大学机电工程学院博士后. 研究方向为 CT 重建算法与图像处理.
E-mail: limengfei8778033@126.com



赵云松 (通信作者) 男, 1981 年生于河北唐山. 首都师范大学数学科学学院副教授, 检测成像北京高校工程研究中心成员. 主要研究方向为 CT 理论与应用、图像处理、应用数学.
E-mail: zhao_yunsong@cnu.edu.cn