

# 空域电磁场快速重构的随机分布优化方法

陈方舟, 阚银辉

(南京航空航天大学, 江苏南京 210016)

**摘要:** 针对压缩空间维度算法后空域电磁场重构存在冗余计算导致效率较低, 且缺少合理模型支撑积分运算, 提出一种高斯-双指数混合分布函数拟合频域电磁信号包络的新方法. 通过确定混合分布的关键系数与主要空间变量的映射关系, 快速建立针对特定空间的混合分布函数. 以函数模式代替信号包络, 用随机分布方法指导自适应采样点的排列. 通过与多种积分方法的比较, 从采样点数和不同空间变量等多个维度, 验证了所提方法具有更高的准确性和有效性. 此方法在频域电磁信号积分的运算中都具有运用条件, 对提高3D实时仿真、建立高速反演算法都有应用前景.

**关键词:** 电磁场重构; 快速计算; 高斯-双指数混合分布; 随机分布; 频域积分; 采样算法

**中图分类号:** TP391

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112(2023)09-2313-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20211532

## The Stochastic Optimization for the Prompt Reconstruction of Spatial EM Fields

CHEN Fang-zhou, KAN Yin-hui

(Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China)

**Abstract:** In the reconstruction of spatial electromagnetic (EM) signals based on the spatial-domain compression technique, a novel method using Gauss-Laplace mixture distribution fitting the spectral EM signal envelop is proposed, to alleviate the redundant calculation that causes low system efficiency, and patch up the absence of reliable model which can support the integration process. By determining the mapping correlation between the key coefficients and the distinctive space parameters, the mixture distribution to the specific calculation space is promptly established. Replacing the signal envelop by the distribution pattern, it adaptively rearranges the sampling points through the stochastic process. The peer comparison of various integration techniques with this novel method, from the aspects of the number of sampling and the distinctive space parameters, verifies it more accurate and efficient. The proposed method obtains a wide application condition in the computation of spectral EM signal integration, and the potential of improving 3D real-time simulation and high-speed inversion method.

**Key words:** EM field reconstruction; fast computation; Gauss-Laplace mixture distribution; stochastic distribution; spectral integration; sampling algorithm

### 1 引言

电磁数值计算作为目前运用非常频繁、理论和方  
法都十分成熟的数值算法, 在电子器件设计、地质勘  
探、深空探测等各个领域都有广泛的运用<sup>[1-4]</sup>. 其中有  
限差分法(Finite Difference Method, FDM)凭借其简单、  
直接的数字化方法, 在前沿的科研领域具有非常普及  
的应用. FDM在模型建立中直观的优势, 也暴露了其空  
间离散化的灵活性低的不足. 基于Yee's Lattice的交  
错网格离散法, 要求FDM必须运用结构化网格, 在灵活  
度上与有限元(Finite Element Method, FEM)方法相差  
较大<sup>[5]</sup>. 目前基于FDM的数值计算工具, 包括时域有限

差分法(Finite Difference Time-Domain, FDTD), 依然倾  
向使用降低空间维度的计算方法以提高计算速度, 最  
常用的降低空间场计算复杂度的方法是复频域变  
换<sup>[6,7]</sup>. 基于傅里叶变换的复频域变换法, 将计算的3D  
空间中结构没有变化或者变化极小的空间轴转换为复  
频域轴, 以对复频域轴的积分计算代替空间轴计算  
的高复杂度. 这种方法也被称作为2.5D数值计算方法:  
使用2D计算矩阵, 重构3D空间电磁场的准3D计算模  
型. 2.5D的计算方法在石油勘探、高能粒子仿真、海洋  
可控源电磁等方向都有十分广泛的应用<sup>[8-10]</sup>. 在此基  
础上, 进一步减少逆变换时采样点数的方法, 对提高整体

的计算效率,减少空间矩阵循环求解次数效果显著.

国内外学者通过对电磁频谱的分析发现:一次场是频谱信号的主导分量<sup>[11,12]</sup>.一次场的能量集中在复频域的零点周围,满足近似正态分布(高斯分布)的模式;在向复频域极点移动过程中,电磁场的能量以指数形式衰减.因此,对均匀介质中一次场的模式进行分析可以获取更有普适性的电磁频谱分布模式,从而有效指导在复杂结构中的空间信号重构.本文将从均匀介质中电磁场的频谱分析出发,以概率统计理论,使用高斯-双指数(Gauss-Laplace, G-L)混合概率分布拟合不同情形下的电磁频谱模式,研究电磁频率、空间电阻率等参数对混合分布的参数的影响,最终获得一种以更少的采样点数来完成空间位置的电磁信号重构的方法.

## 2 数值 2.5D 算法

为了探究高效重构空间维信息的方法,首先需要建立可以运用重构计算的电磁场数值模型.本文所采用降维后的 2.5D 算法模型是从经典 3D 麦克斯韦方程组推导获得,最终差分后的公式表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} J_x(i, j, k_z) &= -j\omega\epsilon E_x(i, j, k_z) + jk_z H_y(i, j, k_z) \\ &\quad + \frac{H_z(i, j, k_z) - H_z(i, j-1, k_z)}{\Delta y(i, j-1)} \\ J_y(i, j, k_z) &= -j\omega\epsilon E_y(i, j, k_z) - jk_z H_x(i, j, k_z) \\ &\quad - \frac{H_z(i, j, k_z) - H_z(i-1, j, k_z)}{\Delta x(i-1, j)} \\ J_z(i, j, k_z) &= -j\omega\epsilon E_z(i, j, k_z) \\ &\quad + \frac{H_y(i, j, k_z) - H_y(i-1, j, k_z)}{\Delta x(i-1, j)} \\ &\quad - \frac{H_z(i, j, k_z) - H_z(i, j-1, k_z)}{\Delta y(i, j-1)} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_x(i, j, k_z) &= -j\omega\mu H_x(i, j, k_z) - jk_z E_y(i, j, k_z) \\ &\quad - \frac{E_z(i, j+1, k_z) - E_z(i, j, k_z)}{\Delta y(i, j)} \\ M_y(i, j, k_z) &= -j\omega\mu H_y(i, j, k_z) + jk_z E_x(i, j, k_z) \\ &\quad + \frac{E_z(i+1, j, k_z) - E_z(i, j, k_z)}{\Delta x(i, j)} \\ M_z(i, j, k_z) &= -j\omega\mu H_z(i, j, k_z) \\ &\quad + \frac{E_x(i, j+1, k_z) - E_x(i, j, k_z)}{\Delta y(i, j)} \\ &\quad - \frac{E_y(i+1, j, k_z) - E_y(i, j, k_z)}{\Delta x(i, j)} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

式(1)和式(2)以有源的法拉第定律和安培定律公式为基础,代入经过傅里叶变换后的电磁场分量.方程中,  $J_{x/y/z}$  和  $M_{x/y/z}$  代表三维方向的电流密度(electric current density)和磁化密度(magnetization density),  $\epsilon$  和  $\mu$  表示传播介质的介电常数和磁导率,  $k_z$  为传播系数向量的  $z$  分量(也称波数  $z$  分量),  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  分别是空间网格化后的单元格的三维尺寸.

方程组中的偏微分计算获得部分简化,把 3D 麦克斯韦方程组降维成 2D 模式,系统矩阵的尺寸和复杂度从  $O(n^3)$  降为  $O(n^2)$ ,极大地降低了系统矩阵的大小、元素数、条件数等,使求逆运算的难度也相应降低,使用迭代法收敛速度加快,最终提高了系统的稳定性<sup>[13]</sup>.在针对一些特定结构,如地层、二维光子晶体等这类复杂介质和结构集中在二维平面中表示的电磁问题,其电磁仿真算法可以更关注于对复杂结构所在二维平面的精确计算,排除非关键的维度对计算效率的影响.

通过以上电磁模型计算出的结果是复合维度的电磁分布,其中包含了  $X$ - $Y$  平面的空间分布,以及  $k_z$  域的复频域信息,所以不是最终的空间电磁分布.因此,需要对复频域场进行傅里叶逆变换来还原出空间域的电磁分布.下章节将通过电磁频域信号的特性分析,针对性地提高傅里叶逆变换在电磁计算中的效率.

## 3 电磁频域分析

在复合维度中,电磁场的分布特性与介质特性和电磁频率关系紧密.介质的电阻率与电磁波的空间损耗呈正相关性,电磁波的工作频率也同样影响在有耗介质中电磁波的传播距离.从介质的电阻率和电磁波频率两个方向分析有耗媒质中的复频域积分特性.

在均匀介质环境中求解有限距离的电磁传播,一般通过对波动方程的通解形式分析便能确定电磁场的幅值和相位变化.本文的计算模型运用维度转换的方法降低空间维从 3D 到 2D,求解场中引入一个复频域维度.在复合维度中,相关电磁分布与普通的 3D 空间域电磁不完全相同:空间电磁场信息通过傅里叶变换转换到复频谱上,电磁分布将基于波数分量的取值来分布.在这种空间信息和频域信息复合的情况下,三维自由空间电磁分布被压缩成如同二维波导横截面的电磁分布的线性叠加.用离散傅里叶变换公式可表示为(以电场为例):

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(x, y; k_z) e^{jk_z z} \cdot \Delta k_z \quad (3)$$

式(3)可以看出空间域的  $x$  和  $y$  分量将保持不变,  $z$  分量的空间维重构就是通过离散傅里叶积分完成.当

计算空间的介质为简单介质(非完全各向异性介质),对所求的空间场进行分离变量,电磁场的  $x$  和  $y$  分量可以分离出来,最后剩下重构分量  $k_z$  的积分部分:

$$\mathbf{E}(x,y)\mathbf{E}(z) = \frac{\mathbf{E}(x,y)}{2\pi} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(k_z) e^{jk_z z} \Delta k_z \quad (4)$$

式(4)中,  $\mathbf{E}(x,y)$  表示包含  $x$  和  $y$  变量的空间信息表达式,  $\tilde{\mathbf{E}}(k_z)$  表示包含  $k_z$  变量的频域信息表达式. 通过以上的分离变量,逆积分中的不相关电磁分量被完全剔除.

对积分  $k_z$  频谱进行分析,指数部分  $e^{jk_z z}$  可知此时的实数  $z$  会引入常态的正弦波动,波动周期为  $T=2\pi/z$ . 基于奈奎斯特最低采样频率要求,最大的采样点间距应当为  $\Delta T=\pi/z$ . 如此便确定下了重构空间信号的最大采样区间. 通过傅里叶变换获得的频域电磁分布函数  $\tilde{\mathbf{E}}(k_z)$ ,本身也带有一定的指数分布特性. 对  $\tilde{\mathbf{E}}(k_z)$  进行分析,然后拟合近似的概率分布函数将是本文讨论的中心问题.

因为空间中参考点与波源的距离对积分频谱的影响十分可观,在分析频谱前,以固定的空间距离来完成所有的仿真工作是保证分析有效性的条件. 下文中的所有仿真都会标明空间距离的坐标差.

这里讨论的介质空间是各向同性的有耗媒质,因此其波数  $k_c$  就同时包含了实部和虚部. 对有耗媒质中的波数可以写成  $k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma = k^2 - j\omega \mu \sigma$ , 归一化后获得  $\hat{k}_c = k_c / |k_c|$ . 经过归一化的波数分量可以表示为  $\hat{k}_z = k_z / |k_c|$ ,  $\hat{k}_\tau = k_\tau / |k_c|$ . 同时  $k_\tau$  是 3D 复合域中保持不变的 2D 平面内的总波数,波数的三维坐标分量的关系可以表示为:

$$k_\tau^2 = (k^2 - k_z^2) - j\omega \mu \sigma$$

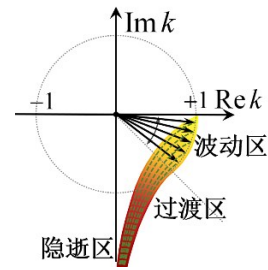
$$\Rightarrow k_\tau = \sqrt{(k^2 - k_z^2) - j\omega \mu \sigma} = |k_c| \sqrt{\hat{k}_c^2 - \hat{k}_z^2} \quad (5)$$

由上式可以得到结论:  $k_z$  取值越大,在 2D 空间内的波数实部正数趋近于 0,虚部负数趋近于  $-\infty$ ,导致电磁场的幅值呈指数型衰减. 伴随  $k_z$  取值的增大,2D 平面的波数  $k_\tau$  逼近于一个固定函数. 波数  $k_\tau$  的表达式以及实部和虚部的逼近形式分别为:

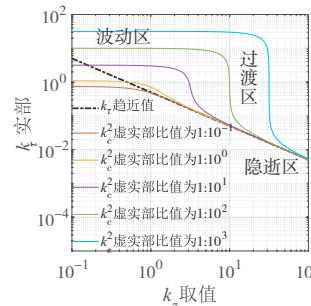
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Exact: } k_\tau = \sqrt{(k^2 - k_z^2)^2 + (\omega \mu \sigma)^2} \cdot e^{-j\frac{\phi}{2}}, \\ \phi = \tan^{-1} \frac{\omega \mu \sigma}{k^2 - k_z^2} \\ \text{Approx: } k_\tau = k'_\tau - jk''_\tau, \\ \forall k_z \gg |k_c|, \left\{ \begin{array}{l} k'_\tau \rightarrow -\omega \mu \sigma / 2k_z \\ k''_\tau \rightarrow k_z \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6)$$

将式(6)中波数  $k_\tau$  的精确表达式的实部和虚部做关于变量  $k_z$  的曲线,可以得到图 1(b)、(c). 从图 1(b)、

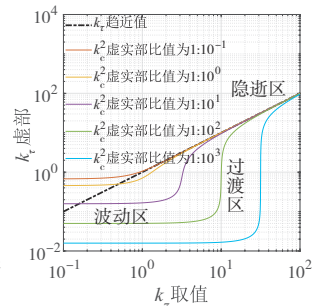
(c) 可以推断出,当  $|k_z|$  取值较小在  $(0, 10^{-1}]$  区间时,  $k_\tau$  的实部和虚部数值与  $k_z$  的相关性较弱,意味着空间介质参数为主导的  $k_c$  才是主要的影响因素;当  $|k_z|$  取值较大接近  $10^2$  时,  $k_\tau$  的实部数值  $k'_\tau$  一阶倒数型缩小,虚部数值  $k''_\tau$  一阶线性增大. 参考对于电磁传输特性的分类,可以定义:在  $k_\tau$  没有变化的平缓区间为波动区(propagating region),电磁波的波动性为传播的主导模式,有耗媒质的电导特性造成包络缓慢衰减;在  $k_\tau$  变化靠近逼近函数的区间为隐逝区(evanescent region),电磁波的衰减特性为主导模式,波动性基本消失:  $k'_\tau \xrightarrow{k_z \nearrow} 0$ .



(a) 复频域图



(b)  $k_\tau$  实部图



(c)  $k_\tau$  虚部图

图 1 在复频域、 $k_\tau$  实部图、 $k_\tau$  虚部图上划分波动区、过渡区和隐逝区,以及不同  $k_c^2$  取值对三个区域的影响

如图 1(a) 所示,在灰色虚线以上的区域属于波动区;逼近虚数轴的区域属于隐逝区;中间为过渡区域(asymptotic region),属于两种传播模式共同作用的区间. 对于不同的初始  $\hat{k}_c$  值,波动区的范围也会随之变化:空间介质的电导率越高,代表  $\hat{k}_c$  的箭头会顺时针旋转,靠近灰色虚线,致使波动区间减小;空间中的电磁场频率越低,  $\hat{k}_c$  的箭头会逆时针旋转,靠近实数轴,使波动区间变大. 图中隐逝区间呈现收敛趋势,因此与初始值  $\hat{k}_c$  的关联较小,间接佐证了隐逝区的电磁衰减特性与空间介质参数和电磁场频率弱相关. 图 1(b)、图 1(c) 中显示了对于不同波数  $k_c$  的选取会影响三个区域的大小和区间位置. 对于电导率较大的介质( $k_c$  的虚部较小),波动区间存在较小,过渡区域延伸较

短,进入隐逝区的 $k_z$ 取值也较小(内部的橙色实线);而介质的电阻率较大时( $k_c$ 的虚部较大),波动区间较宽,过渡区间的延伸叫广,进入隐逝区的 $k_z$ 取值较大(外围的蓝色实线).此现象也符合在弱导体中,波动性依然呈主导态势的现象;在金属介质中,电磁场的衰减为传播的主要模式.

此时,将波数 $k_z$ 的逼近函数代入3D空间场重构表达式,可得到在隐逝区完全拟合的复频域“远场”的近似表达式:

$$E(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_0 e^{-jk_z \tau} e^{jk_z z} \Delta k_z$$

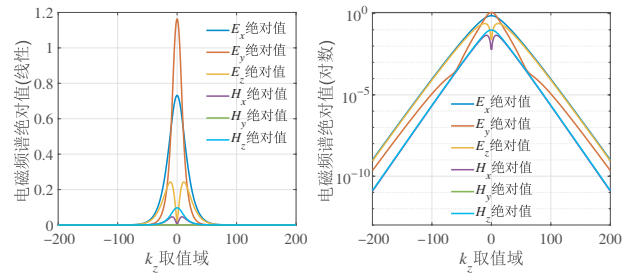
$$\approx \frac{\tilde{E}_0}{2\pi} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} e^{-k_z \tau} e^{j(k_z z + \frac{\omega \mu \sigma}{2k_z} \tau)} \Delta k_z, \quad k_z \gg |k_c| \quad (7)$$

式(7)中, $\tilde{E}_0$ 表示不包含变量 $k_z$ 的频域函数 $\tilde{E}(k_z)$ 的初值, $\tau$ 表示投影到2D平面上的电磁场传播距离.基于相对简单的“远场”表达式,此处明确指出了主要的衰减函数为 $e^{-k_z \tau}$ ,在其中电磁场传播距离的投影 $\tau$ 直接影响衰减的幅度;波动函数包含两个部分:以2D平面上投影传播距离 $\tau$ 为主要变量的波动部分;以纵深方向的投影传播距离 $z$ 为变量的波动部分.其中,以法向 $z$ 为变量的波动呈现主要影响.因为上述函数特性,当需要拟合复频域积分的部分模式,会以衰减函数为主要的考虑部分,所选择的拟合函数需要以指数衰减为主要的特征.

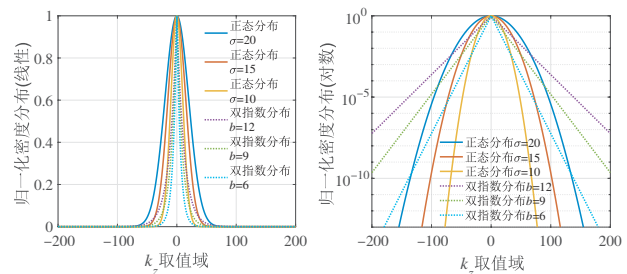
图2(a)上图展示了在复频域 $k_z$ 上各个电磁分量绝对值的模式,在选定了频率和介质阻值条件下复频域上的模式呈现两种情况:在取绝对值后,多数电磁分量是类正态分布的形式,并且高阶连续的;但是 $E_z$ 和 $H_x$ 由于在 $k_z=0$ 的位置过零点,呈现出非连续性.此外,所有分量从图2(a)下图中可以看出是呈现指数型衰减,因此幅值的衰减是极快的,周边区域( $|k_z| \geq 120$ )的积分是冗余的.已知傅里叶逆变换的复频域积分是不定积分形式,选取的分布函数在实际数值计算中,将决定最优化的采样分布(sampling)以及截止区域(truncation).最优化的采样点分布要求拟合函数能够最大程度的逼近原积分函数;选取有限采样区间则需要拟合函数和原积分函数在 $|k_z| \gg |k_c|$ 处有相同的收敛特性.因此,通过几种常见函数的比较,相关性较高的正态分布(Normal distribution, 又称高斯分布)以及双指数分布(Laplace distribution, 又称拉普拉斯分布)是合理的选择.

图2(b)中选取三条不同标准差 $\sigma$ 的正态分布曲线(虚线)和三条不同尺度参数 $b$ 的双指数分布曲线(实线)进行对图2(a)中的电磁场积分函数进行拟合.从频域的“近场”角度看,在 $k_z=0$ 处较为平缓的正态分布曲

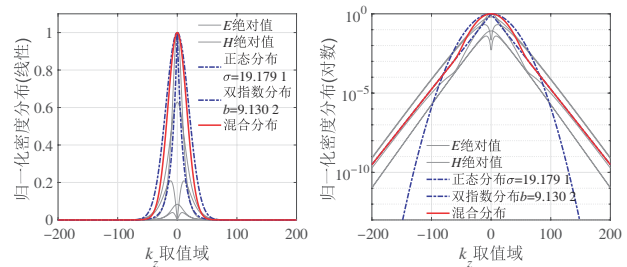
线对近场的拟合程度较好.但是因为正态分布包含二阶指数函数,从对数作图中能发现,正态分布的曲线呈开口向下的二阶函数形式.对数作图中与电磁场积分函数拟合最好的是双指数函数.双指数函数在对数图中表现的稳定一阶函数特性与积分曲线的远场模式相同.为了兼顾在近场和远场都拟合电磁场积分函数,提出一种混合概率分布方法:G-L混合分布.



(a) 1.1  $\Omega \cdot m$  介质中 10 MHz 电磁场的频谱图像



(b) 不同 $\sigma$ 的正态分布以及不同 $b$ 的双指数分布



(c) 匹配复频域谱的高斯-双指数混合分布图

图2 根据电磁场频谱分布构建高斯-双指数混合分布

$$\begin{cases} f(k_z)|_{\text{near}} \sim N(k_z|0, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{k_z^2}{2\sigma^2}} \\ f(k_z)|_{\text{far}} \sim L(k_z|0, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|k_z|}{b}} \end{cases} \quad (8)$$

$$\Rightarrow f(k_z) = G-L(k_z|0, \sigma, b, w_1, w_2)$$

$$\propto w_1(k_z)N(k_z|0, \sigma) + w_2(k_z)L(k_z|0, b)$$

其中, $N$ 和 $L$ 分别表示正态分布和双指数分布, $\sigma$ 表示正态分布的标准差, $b$ 为尺度参数代表陡峭程度, $w_1$ 和 $w_2$ 是互补的权重函数.

现在更多的研究发现,G-L混合分布在日常生活中比简单正态分布更加常见,在碰撞风险评估、建筑

物压力分析、道路拥堵评价等方面都有学者运用 G-L 混合分布作为分析模型<sup>[14-16]</sup>. 不同的应用方向对混合分布的融合程度 (mixture)、倾向性 (biasing) 和加权系数 (weight) 都有不同的取值. 本文使用在电磁场积分函数的拟合方向上, 需要运用不同的加权系数在不同的复频域区间上, 即设计关于频域变量  $k_z$  的权重函数  $w_1(k_z)$  和  $w_2(k_z)$ . 在权衡了多种函数叠加的方式, 这里最终选用的权重函数  $w_1(k_z)$  是归一化的正态分布函数,  $w_2(k_z)$  则是  $w_1(k_z)$  的补数. 将权函数和两个分布函数相乘, 再进行双变量的取模运算, 得到的就是本文针对电磁频谱特性设计的 G-L 混合分布函数:

$$f(k_z) = \sqrt{|w_1(k_z)N|_{k_z, 0, \sigma}|^2 + |w_2(k_z)L|_{k_z, 0, b}|^2},$$

$$\forall k_z \in \mathbf{R}; w_1(k_z) \propto N(k_z|0, \sigma_0); w_2(k_z) = 1 - w_1(k_z)$$

(9)

图 2(c) 展示了选定了最优化的变量后, 正态分布函数 (蓝虚线)、双指数函数 (蓝虚线) 和混合分布函数 (红实线) 的示意图. 对于频率为 10 MHz 和电阻值为  $1.1 \Omega \cdot m$  的条件下, 可见红实线在线性图和对数图都有更优秀的拟合程度, 实现的积分计算精度也更高. 通过建立 G-L 混合分布函数, 在对复频域积分操作时能更加高效. 对任何情况下的电磁频谱积分, 这里都能给出指导性的积分分布模型, 只需要选定合适的分布函数变量 ( $\sigma$  和  $b$ ), 就能运用随机分布的方法, 将有限个数的采样点合理分布在无限积分区间中.

### 4 仿真精度分析

G-L 混合分布函数在对复频域积分进行指导时, 还需要确定下对不同电磁频率和空间电阻值的最优函数变量的选取. 因为选取最优变量的目的是更高效地拟合电磁场频域模式, 这里选用了余弦算法作为相似度的判定依据<sup>[17,18]</sup>:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{ref}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}_{ref}\|}$$

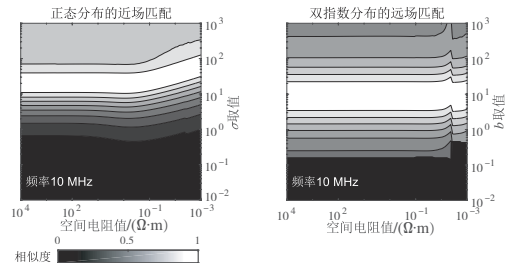
$$= \frac{\sum_{i=1}^n A_i \times A_{ref,i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_{ref,i})^2}}$$

(10)

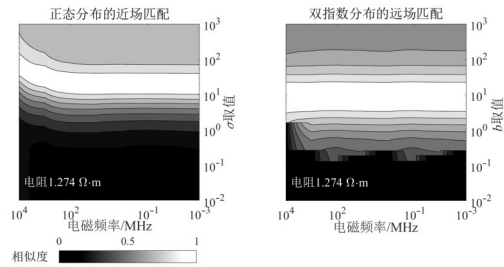
余弦算法可以实现对多维向量的相似度判定, 1 代表完全相似, 0 代表完全正交. 根据电磁频谱分布的特点, 把  $k_z = 0$  周边的“近场”区域选作为正态分布的匹配区间; 把截止频率周边的“远场”区域作为双指数分布的匹配区间. 考虑到积分频谱的数值跨度极大 ( $10^0 \sim 10^{-10}$ ), 单纯的数值误差比较很难照顾到“远场”

的小数值部分. 运用余弦算法, 从函数的变化趋势作为判断依据, 具有更好的合理性.

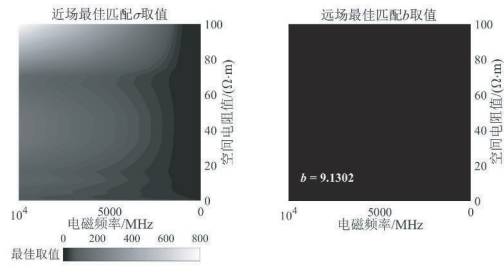
余弦算法计算出拟合曲线与分布曲线在所选区域的相似度, 形成如图 3 所示的二维图像. 上下两张图像分别展示了近场拟合以及远场拟合, 分别形成以介质电阻率为变量的匹配图 3(a), 以电磁场频率为变量的图 3(b), 以传播距离的投影为变量的图 3(d), 和拟合参数  $\sigma$  和  $b$  的最佳取值关于频率和电阻的变化图 3(c). 图



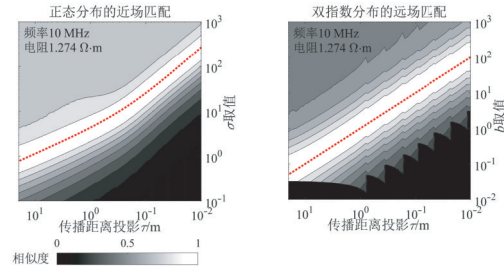
(a) 不同电阻率下参数  $\sigma$  以及  $b$  的拟合



(b) 不同频率下参数  $\sigma$  以及  $b$  的拟合



(c) 拟合参数  $\sigma$  和  $b$  的最佳取值关于频率和电阻的变化图



(d) 传播距离  $\tau$  对参数  $\sigma$  以及  $b$  的影响

图 3 通过余弦算法拟合参数  $\sigma$  和  $b$  在电阻值和电磁频率变量下的最佳取值, 以及传播距离投影  $\tau$  的映射函数  $\sigma = m \cdot \tau^{-0.7563}$ ,  $m = 5.364$  (95% 置信水平) 和  $b = \tau^{-1}$ .

像中近场的正态分布拟合参数 $\sigma$ 的最优解(高亮区域)随着三个变量的改变都有相应的变化;对于图像中远场的双指数分布拟合参数 $b$ 的最佳取值与空间电阻值和电磁频率都没有相关性,唯独与传播距离投影呈线性变化.此现象与式(7)中的远场逼近函数完全匹配.单独观察图3(b),可以发现传播距离投影对两个拟合参数的影响是其中相对明显的,以线性相关为主要影响形式.所以,将变量空间电阻值和电磁频率影响的最佳拟合参数 $\sigma$ 和 $b$ 通过图3(b)选定出来,再考虑传播投影距离的差值引入的变化量,就能获得在某空间介质中,以某频率传播一定距离的电磁场对应的G-L混合分布函数的所有参数.

通过预先建立空间电阻率和电磁频率对拟合函数

参数的映射表(mapping table)以及传播距离投影的映射函数(mapping function),将能快速确定所应用的G-L混合分布函数.以随机分布的方式来模拟采样点的概率分配需要解释: $n$ 个采样点在 $k_z$ 轴上以何种疏密分布能够实现,在经过G-L混合分布运算后,采样点能均匀分布在 $[0, 1]$ 区间内.如图4所示,在过程中将G-L混合分布的概率分布函数pdf积分成累积分布函数cdf,以均匀分布将 $n$ 个采样点投射到cdf函数的 $[0, 1]$ 全域中,依照cdf函数的斜率与pdf函数等价并且与各采样点对应步长 $\Delta k_z$ 负相关,反馈回各处的 $k_z$ 值,并计算出相应位置的步长.此方式满足采样点在G-L混合分布上的均匀采样,实现高概率处密集、低概率处稀疏的合理分配.

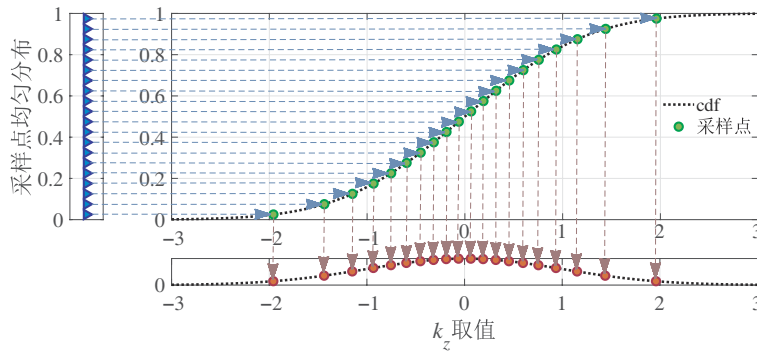


图4 概率分配20个采样点的过程演示图,从均匀分布在 $[0, 1]$ 区间逆向确定 $k_z$ 域中采样点的G-L混合分布

对上述随机分布的采样方法进行精度分析,以及与其他采样方法对比,本文在计算重构的电磁场数值时不使用差值优化方法提高计算精确度,以基础采样点为全部的积分数值计算幅值和相位的误差:

$$\begin{cases} R_{\text{Amplitude}} = \frac{\left| |\mathbf{E}_{\text{sample}}| - |\mathbf{E}_{\text{ref}}| \right|}{|\mathbf{E}_{\text{ref}}|} \\ R_{\text{Phase}} = \left| \text{Deg}(\mathbf{E}_{\text{sample}}) - \text{Deg}(\mathbf{E}_{\text{ref}}) \right| \end{cases} \quad (11)$$

幅值误差以采样积分结果和参考值的相对误差为比较标准,相位误差则以角度的绝对误差为比较标准.本文的研究以更少的采样点数重构相同精度的电磁场数值,从图5可以明显发现G-L混合分布在幅值和相位的误差都具有很大的优势:从个位数采样点的G-L混合分布具有更低的幅值误差(图5(a)),6采样点实现4%的幅值误差,10采样点实现2%的幅值误差,在14个采样点之前,G-L混合分布拥有高于高斯-勒让德积分法(Gauss-Legendre Quadrature, G-Q)的积分精度.在相位误

差分析中(图5(b)),G-L混合分布的计算精度优势更为明显,能整体保持在 $0.2^\circ$ 以下的相位误差,整体低于G-Q积分法的相位误差一个数量级.从电磁波频率的范围(图5(c)、图5(d))和空间电阻值的范围(图5(e)、图5(f))观察几种积分方法的误差等级,G-L混合分布能够都保持在较低的误差水平.

需要提出的是,随着电磁频率不断增大,积分函数中周期振荡会显著增强.在保持远场端的双指数衰减形式时,中心部分不再呈现正态分布的状态.对于种情况,G-L混合分布的积分误差率会有所上升,从图5(c)、图5(d)中可以分辨出,10个采样对于愈来愈高的电磁频率,幅值和相位的误差都有所增加:在1 GHz以下的频段,相位误差稳步提升,幅值误差还保持相对稳定状态;在1 GHz以上的频段,相位和幅值误差都呈现不稳定的大范围波动情况.当然,对于1 GHz以上的频段来说10个采样点已经是十分欠采样(under-sampling)的状况.

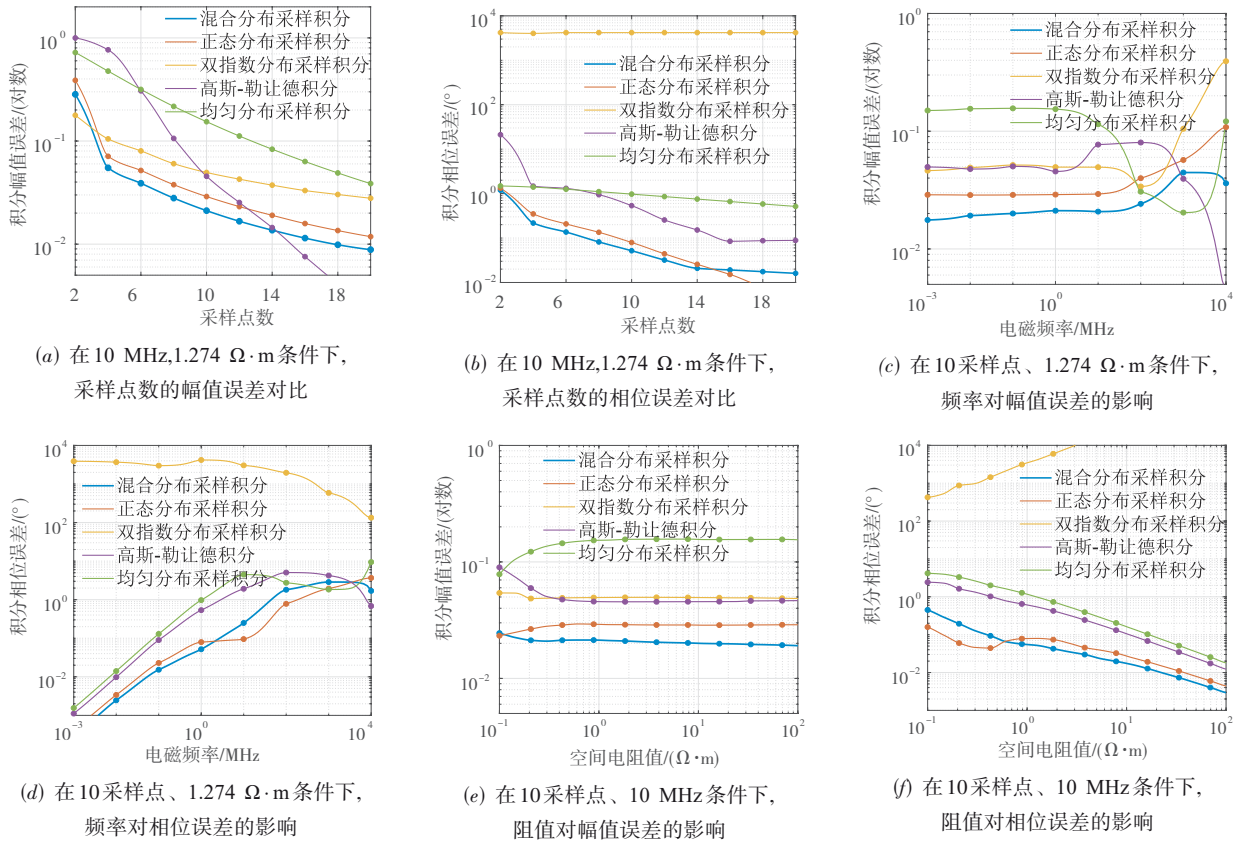


图 5 横向对比多种采样积分函数

### 5 结论

本文从复频域上电磁场分布特征出发,通过建立 G-L 混合概率分布函数并确定函数参数与电磁场的主要变量的映射关系,提出了一种能够以更少的采样点数,完成高精度空间电磁场重构计算的新方法. 本文采用以随机分布的方式合理分配采样点,实现了以电磁场的分布特征作为加权,控制采样点的疏密排布. 实际仿真获得的结果相比于常用的高斯-勒让德积分法, G-L 混合分布在个位数的采样点中依然保持了极低的误差率. G-L 混合分布运用在低于 1 GHz 较低频域中,使用 10 个采样点完成高精度 ( $Err \approx 2\%$ ) 的空间电磁场计算.

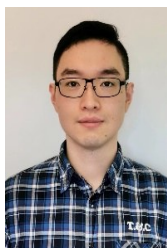
G-L 混合分布不局限于在 2.5D FDM 计算方法上运用,对于使用二维复频域的 1.5D FDM 算法以及其他运用了降维法减轻计算压力的算法都能适用. 此快速积分方法对提高矩阵计算有效性、实现实时 3D 仿真、建立高速反演算法等方面都有重要的应用前景和价值.

### 参考文献

- [1] COOKE S J, STANTCHEV G M, ANTONSEN T M, et al. Vacuum electronic device design using 3D EM-PIC[C]// IEEE International Vacuum Electronics Conference. Piscataway: IEEE, 2014: 9-10.
- [2] 王磊, 范宜仁, 操应长, 等. 大斜度井/水平井随钻方位电磁波测井资料实时反演方法[J]. 地球物理学报, 2020, 63(4): 1715-1724.  
WANG L, FAN Y R, CAO Y C, et al. Real-time inversion of logging-while-drilling azimuthal electromagnetic measurements acquired in high-angle and horizontal wells[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2020, 63(4): 1715-1724. (in Chinese)
- [3] MORAN J H, GIANZERO S. Effects of formation anisotropy on resistivity-logging measurements[J]. Geophysics, 1979, 44(7): 1266-1286.
- [4] GAN H Q, JIANG P, ZHU K, et al. Simulation of FAST EM performance for both the axial and lateral feed defocusing[J]. Research in Astronomy and Astrophysics, 2020, 20(5): 69.

- [5] 张琰, 高本庆. FDTD 计算中非均匀网格网络的分析及综合[J]. 电子学报, 2001, 29(7): 965-969.  
ZHANG Y, GAO B Q. The analysis and synthesis of non-uniform mesh network in FDTD computation[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(7): 965-969. (in Chinese)
- [6] 邓薇, 王绪本, 李文超, 等. 2.5D-FDTD 数值算法的建立和模拟[J]. 地球物理学进展, 2008, 23(1): 82-88.  
DENG W, WANG X B, LI W C, et al. The establishing and simulation of 2.5D-FDTD numerical algorithm[J]. Progress in Geophysics, 2008, 23(1): 82-88. (in Chinese)
- [7] ZENG S B, CHEN F Z, LI D W, et al. A novel 2.5D finite difference scheme for simulations of resistivity logging in anisotropic media[J]. Journal of Applied Geophysics, 2018, 150: 144-152.
- [8] 张恒, 郝建红, 董焱, 等. 基于 JASMIN 并行框架的 2.5 维粒子模拟程序 NEPTUNE2D 的研制[J]. 强激光与粒子束, 2016, 28(3): 40-46.  
ZHANG H, HAO J H, DONG Y, et al. Development on 2.5D electromagnetic and particle-in-cell code named NEPTUNE2D based on a massively adaptive parallel applications infrastructure named JASMIN[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2016, 28(3): 40-46. (in Chinese)
- [9] 戴世坤, 王顺国, 张钱江, 等. 频率域可控源电磁法 2.5D 正反演[J]. 中国有色金属学报, 2013, 23(9): 2513-2523.  
DAI S K, WANG S G, ZHANG Q J, et al. 2.5D forward and inversion of CSEM in frequency domain[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2013, 23(9): 2513-2523. (in Chinese)
- [10] DOMENZAIN D, BRADFORD J, MEAD J. Efficient inversion of 2.5D electrical resistivity data using the discrete adjoint method[J]. GEOPHYSICS, 2021, 86(3): E225-E237.
- [11] 王顺国, 熊彬, 王有学, 等. 广域电磁法 H-H<sub>z</sub> 方式波数域的一次场特征[J]. 桂林理工大学学报, 2012, 32(2): 179-183.  
WANG S G, XIONG B, WANG Y X, et al. Wave-number domain features of primary field of H-H<sub>z</sub> arrangement wide field electromagnetic method[J]. Journal of Guilin University of Technology, 2012, 32(2): 179-183. (in Chinese)
- [12] EMINOV S I. Dependence of the input resistance of vibrator and microstrip antennas on the primary field[J]. Journal of Communications Technology and Electronics, 2020, 65(11): 1263-1266.
- [13] CHEN F Z, WU D G, YU M P, et al. The enhancement of finite difference method for EM simulating the arbitrary fractures[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2021, 63(4): 1078-1082.
- [14] FUJITA M. Iterative Bayesian estimation of navigation performance modeled by a mixture of Gaussian and Laplace distributions for the application of collision risk modeling[J]. Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, 2013, 56(5): 253-260.
- [15] COOK N J. Short communication: On the Gaussian-exponential mixture model for pressure coefficients[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2016, 153: 71-77.
- [16] 王曦, 祝付玲. 基于高斯混合分布的交通拥堵评价模型[J]. 公路交通科技, 2011, 28(2): 127-132.  
WANG X, ZHU F L. Evaluation model of traffic congestion based on Gaussian mixture distribution[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2011, 28(2): 127-132. (in Chinese)
- [17] 陈天, 刘文浩. 相似度算法分析与比较研究[J]. 现代计算机(专业版), 2012(18): 18-20.  
CHEN T, LIU W H. Research on the analysis and comparison on similarity algorithm[J]. Modern Computer, 2012(18): 18-20. (in Chinese)
- [18] 成怡, 朱伟康, 徐国伟. 基于余弦相似度的改进 ORB 匹配算法[J]. 天津工业大学学报, 2021, 40(1): 60-66.  
CHENG Y, ZHU W K, XU G W. An improved ORB matching algorithm based on cosine similarity[J]. Journal of Tiangong University, 2021, 40(1): 60-66. (in Chinese)

#### 作者简介



**陈方舟** 男, 2019 年获得美国休斯顿大学工学博士学位. 现为南京航空航天大学航天学院副研究员、硕士生导师. 从事计算电磁学、光学超表面、纳米电磁学研究. 主持国防科技基础加强计划基金项目、“核高基”重大专项研究子课题.

E-mail: fchen1990@nuaa.edu.cn



**阚银辉(通讯作者)** 男, 上海交通大学获得工学博士学位. 现为南京航空航天大学航天学院副教授、硕士生导师. 研究方向为微纳光子器件、红外辐射调控、光电探测、量子光学超表面等. 以第一作者在 Adv. Mater.、ACS Photonics、Phys. Rev. Appl 等权威期刊发表学术成果十余篇, 申报国家发明专利多项.

E-mail: yhkan@nuaa.edu.cn