

# 结合最近邻图模型的稀疏ISAR成像方法

胡长雨<sup>1</sup>, 陈春风<sup>2</sup>, 易文忆<sup>3</sup>, 董宇宸<sup>1</sup>, 李 晖<sup>1</sup>, 汪 玲<sup>2</sup>

(1. 无锡学院电子信息工程学院, 江苏无锡 214000; 2. 南京航空航天大学雷达成像与微波光子教育部重点实验室, 江苏南京 210016; 3. 无锡学院自动化学院, 江苏无锡 214000)

**摘要:** 逆合成孔径雷达(Inverse Synthetic Aperture Radar, ISAR)稀疏成像方法可提供图像对比度高、旁瓣干扰少的成像结果。稀疏成像以场景或目标散射率分布具有稀疏性为前提,待成像目标场景的稀疏特性决定了最终成像质量。ISAR目标场景的自然稀疏特性着重刻画点状特征,变换域稀疏表示可增强目标图像的纹理等通用特征。通过学习获得的稀疏变换字典,可自适应于待成像的ISAR目标场景,找到面向ISAR目标图像块的特有稀疏表示。但是,图像块的特有稀疏表示中忽略了待成像目标场景中目标的几何特征信息。最近邻图模型可建立给定数据的几何特征描述算子,刻画出给定数据的几何特征信息。本文利用最近邻图模型来刻画待成像目标场景中目标的几何特征信息,并映射到待成像目标场景的特有稀疏表示中;提出结合最近邻图模型的ISAR稀疏成像方法,用于不同类别实测ISAR数据成像。相比已有的ISAR稀疏成像方法,所提成像方法可获得目标轮廓更清晰的成像结果,成像所需时间平均减少10.4%。

**关键词:** 逆合成孔径雷达;稀疏成像;最近邻图模型;稀疏表示;字典学习

**基金项目:** 国家自然科学基金(No.61661018);江苏省双创博士人才项目(No.JSSCBS20210863, No.JSSCBS20210867);江苏省高等学校基础科学(自然科学)研究面上项目(No.22KJB140015);无锡市创新创业资金“太湖之光”科技攻关计划(基础研究)项目(No.K20221043, No.K20221049)

中图分类号: TN95

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2024)01-0170-11

电子学报URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI:10.12263/DZXB.20221326

## Sparse ISAR Imaging Combined with Nearest Neighbor Graph Model

HU Chang-yu<sup>1</sup>, CHEN Chun-feng<sup>2</sup>, YI Wen-yi<sup>3</sup>, DONG Yu-chen<sup>1</sup>, LI Hui<sup>1</sup>, WANG Ling<sup>2</sup>

(1. College of Electronic Information Engineering, Wuxi University, Wuxi, Jiangsu 214000, China;

2. Key Laboratory of Radar Imaging and Microwave Photonics of the Ministry of Education, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China;

3. College of Automation, Wuxi University, Wuxi, Jiangsu 214000, China)

**Abstract:** Inverse synthetic aperture radar (ISAR) sparse imaging methods can provide the imaging results with high image contrast and less sidelobe interference. The premise of sparse imaging is that the scatterers distribution of the scene or target to be imaged is sparse, which means that the final imaging quality is determined by the sparse feature of the target or scene to be imaged. The natural sparsity of ISAR target scenes emphasize point-like features, and the sparse representations of to be imaged target scene in the transform domains can enhance general features (e.g., texture or contour features) of the target. The well learned sparse transformation dictionaries can adapt to the to be imaged target scenes and find their unique sparse representations. However, the image patches oriented sparse representations ignore the geometric feature of target to be imaged. The nearest neighbor graph model is able to establish the geometric feature description operator of the given data, which can be used for describing the geometric feature information of the given data. In this paper, we introduce the nearest neighbor graph model (NNGM) into ISAR sparse imaging to express the geometric feature of the to be imaged target. The NNGM of the to be imaged target is then used as the regularization term and mapped to ISAR sparse imaging model. We propose an ISAR sparse imaging method combined with the NNGM for the imaging of different types of real ISAR data. Compared with the existing ISAR sparse imaging methods, the proposed imaging method can provide the im-

aging result with clearer contour, and the imaging time is reduced by 10.4% on average.

**Key words:** inverse synthetic aperture radar (ISAR); sparse imaging; nearest neighbor graph model; sparse representation; dictionary learning

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.61661018); Shuang Chuang Ph. D Award (No.JSSCBS20210863, No.JSSCBS20210867); The General Program of Basic Science (Natural Science) Foundation of the Jiangsu Higher Education Institutions of China (No.22KJB140015); "Light of Taihu" Key Technologies R & D Program of Innovation and Entrepreneurship Foundation of Wuxi (No.K20221043, No.K20221049).

## 1 引言

逆合成孔径雷达(Inverse Synthetic Aperture Radar, ISAR)能得到运动目标的高分辨率雷达图像,可为后续目标图像解译提供可靠的图像数据基础<sup>[1,2]</sup>. 传统的距离-多普勒(Range-Doppler, RD)类 ISAR 成像方法利用快速傅里叶变换重建目标场景散射率分布. 相比 RD 方法成像的结果,稀疏 ISAR 成像方法<sup>[3-10]</sup>的结果具有图像对比度高、副瓣少的优势. 压缩感知(Compressive Sensing, CS)成像方法<sup>[11,12]</sup>与稀疏成像方法相似,都是以待重建目标场景的稀疏性为成像前提,但 CS 成像强调使用极少降采样数据来重建目标场景散射率分布.

大多数稀疏 ISAR 成像方法假设待成像目标场景自然稀疏<sup>[2]</sup>,并利用目标场景的自然稀疏性成像<sup>[5,10]</sup>. 但相比 RD 成像方法成像结果,基于自然稀疏性的成像结果着重强调点状或区域状特征,而有助于目标辨识的特征(如目标的轮廓、纹理、边缘等)特征被忽略.

人工构建的变换字典可找到包含待成像 ISAR 目标场景特定特征的稀疏表示,增强目标图像中特定的图像特征<sup>[5,6,10]</sup>. 多个人工构建变换字典可进一步合成超完备字典,找到的稀疏表示可同时强化目标图像不同类别的特征<sup>[10]</sup>. 但人工构建变换字典的原子都为固定图像变换的理论模型,其中缺少待重建 ISAR 目标场景的先验信息,无法自适应于不同的目标场景.

相比人工构建的字典,学习得到的稀疏变换字典中,原子来自已有的 ISAR 数据中的先验信息<sup>[13,25]</sup>. 学习好的字典在训练数据上习得了待成像 ISAR 目标场景充分的先验信息,进而可自适应于待成像 ISAR 目标场景,找到其特有的稀疏表示. 但特有稀疏表示是面向单独图像块的,无法刻画完整目标图像中包含的目标整体几何结构特征. 特有稀疏表示进一步结合待重建目标场景图像的自相似性,可刻画目标的几何结构特征信息<sup>[14]</sup>. 但自相似性先验信息是在低质量的目标图像上提取的,这使结合自相似性的稀疏表示不可避免地会受到虚假散射点的干扰.

图模型<sup>[15-17]</sup>是一种能够建模数据结构的方法. 最

近邻图是图模型中常用的一种. 利用最近邻图模型(Nearest Neighbor Graph Model, NNGM)可精准地建立给定数据在数据结构空间的几何结构描述算子. 与传统的稀疏表示相比,结合几何结构描述算子的稀疏表示具有更精准的代表能力. 目前, NNGM 已被用于图像去噪<sup>[18,19]</sup>、图像稀疏编码<sup>[20]</sup>和结构化数据分类<sup>[21]</sup>等任务,并取得了很好的效果.

为了提升待成像 ISAR 目标场景稀疏表示的精准程度,进而提升目标图像的重建质量,将 NNGM 引入到 ISAR 稀疏成像中. 首先,以 ISAR 目标数据为基础,建立面向 ISAR 数据的 NNGM,用于反映待成像目标在数据空间的几何结构. 然后,利用构建的 NNGM 对待求解的稀疏表示系数加权,使待成像目标的几何结构特征信息可映射到最优稀疏表示中. 最后,提出结合 NNGM 的 ISAR 稀疏成像方法,将所提成像方法与基于组字典学习(Group Dictionary Learning, GDL)的 ISAR 成像方法<sup>[14]</sup>、基于字典学习(Dictionary Learning, DL)的 ISAR 成像方法<sup>[13]</sup>和基于贪婪卡尔曼滤波(Greedy Kalman Filtering, GKF)的 ISAR 成像方法<sup>[10]</sup>作对比. 实测飞机目标数据和船目标数据的成像结果表明,本文所提成像方法重建结果的目标轮廓更完整,目标图像对比度更高、成像效率更高.

本文的结构安排如下:第 2 节介绍 ISAR 稀疏成像的基本原理;第 3 节主要介绍面向 ISAR 目标场景数据的 NNGM 构建方法,并详细介绍结合 NNGM 的稀疏 ISAR 成像方法;第 4 节利用实测 ISAR 数据验证所提成像方法的可行性,并对成像结果进行定性和定量分析,明确所提成像方法优势所在;第 5 节对本文研究内容进行总结,给出明确的研究结论. 附录 A 和附录 B 分别给出文中式(5)和式(9)的推导和证明过程.

## 2 相关工作

通常 ISAR 待成像目标场景中,目标散射率相对背景散射率而言更强,目标相对背景可近似看成自然稀疏. 根据 CS 的基本原理,ISAR 目标场景成像可利用远低于奈奎斯特采样率获得的极少量数据实现. CS ISAR 成像问题可构建为欠定的方程组:

$$G_s = \Psi\sigma + n_s \quad (1)$$

其中,  $\sigma \in \mathbb{C}^n$  表示待重建散射率函数,  $n = N_r \times N_a$ ,  $N_r$  和  $N_a$  分别为雷达回波的距离向和方位向采样数;  $\Psi \in \mathbb{C}^{m \times n}$  且  $m < n$ , 表示的是测量矩阵;  $G_s \in \mathbb{C}^m$  表示测量数据;  $n_s$  为测量数据中的噪声.

在测量矩阵  $\Psi$  满足限制等距的性质, 以及未知目标成像几何满足自然稀疏的假设时, 式(1)所示的成像问题可通过优化 L1 范数最小化模型得到:

$$\min_{\sigma} \|\mathbf{G} - \Psi\sigma\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\sigma\|_1 \leq \epsilon \quad (2)$$

待成像目标场景的自然稀疏性着重刻画散射点的点状或区域状的图像特征, 变换域的稀疏表示则可刻画待成像目标更为重要的特征, 如纹理和轮廓特征等<sup>[10]</sup>.

令矩阵  $\mathbf{D}$  表示人工构建的稀疏变换矩阵, 可利用  $\sigma = \mathbf{D}\mathbf{w}$  稀疏地表示目标场景, 其中  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$  为目标场景  $\sigma$  通过字典  $\mathbf{D}$  找到的稀疏表示系数, 式(2)所示的 L1 范数最小化模型可改写为

$$\min_{\sigma} \|\mathbf{G} - \Psi\mathbf{D}\mathbf{w}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{w}\|_1 \leq \epsilon \quad (3)$$

人为构建稀疏变换矩阵的原子都为固定的图像变换的理论模型, 无法自适应于未知待成像目标场景数据. 利用已有 ISAR 图像建立 ISAR 训练数据集, 用于学习稀疏变换字典. 训练好的稀疏变换字典可以用于发现待成像目标场景的特有稀疏表示<sup>[13]</sup>.

结合字典学习的 ISAR 成像问题, 可以构建为字典学习、目标场景重建和稀疏表示求解的联合优化模型. 在模型优化过程中, 采用对图像数据分块重建的策略, 来加快字典学习和目标场景重建的效率:

$$\min_{\sigma, \mathbf{D}_p, \{\mathbf{w}_k\}} \sum_{k=1}^N \|\sigma_k - \mathbf{D}_p \mathbf{w}_k\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{G}_s - \Psi\sigma\|_2^2 \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad \forall k, \quad \|\mathbf{w}_k\|_1 \leq T_p$$

其中,  $\sigma_k \in \mathbb{C}^{\sqrt{n_p} \times \sqrt{n_p}}$  表示从  $\sigma$  上获得的第  $k$  个图像块, 图像块提取操作表示为  $\sigma_k = \mathcal{F}_k(\sigma)$ ,  $k$  为图像块索引;  $\mathbf{D}_p \in \mathbb{C}^{n_p \times n_p}$  表示面向图像块的稀疏变换字典;  $\mathbf{w}_k$  为  $\sigma_k$  在字典  $\mathbf{D}_p$  展开空间中特有的稀疏表示;  $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^N$  表示所有图像块稀疏表示的集合,  $\lambda$  为正则化参数, 用于平衡测量数据和图像块稀疏表示的保真度.

采用交替迭代的策略求解式(4), 其中,  $\mathbf{D}_p$  和  $\mathbf{w}_k$  采用 K-SVD 求解获得,  $\sigma$  则通过对重建的图像块集合  $\{\sigma_k\}_{k=1}^N$  采用共轭梯度方法<sup>[13]</sup>获得.

尽管学习好的稀疏变换字典可以自主地找到未知目标场景其特有的稀疏表示, 但由于特有稀疏表示为面向图像块的, 因此其中没有包含目标整体的几何结构特征信息.

### 3 结合 NNGM 的稀疏 ISAR 成像方法

图模型<sup>[15-17]</sup>是一种能够建模数据结构的方法.

最近邻图是图模型中常用的一种. 利用 NNGM 可精准地建立给定数据在数据结构空间的几何结构描述算子.

为了充分挖掘待成像 ISAR 目标场景的几何结构特征先验信息, 本节以待成像 ISAR 目标场景数据为基础建立 NNGM, 用于反映待成像目标在数据空间的几何结构; 进一步利用构建的 NNGM 对待求解的稀疏表示系数加权, 使待成像目标的几何结构特征信息映射到最优稀疏表示中; 最后建立含有 NNGM 的 ISAR 成像模型, 给出详细的成像模型优化步骤.

#### 3.1 结合 NNGM 的稀疏 ISAR 成像模型

给定一副 ISAR 图像, 按照设定的移动步长和图像块大小<sup>[13]</sup>, 划分为  $N$  个不完全重叠图像块, 组成 ISAR 图像块集合  $\{\sigma_k\}_{k=1}^N$ . 对  $\{\sigma_k\}_{k=1}^N$  构建具有  $N$  个顶点的最近邻图  $\mathbf{U}$ , 并令  $\mathbf{V}$  表示最近邻图  $\mathbf{U}$  的权重矩阵. 定义  $\sigma_k$  的自由度为  $r_k = \sum_{j=1}^N V_{(k,j)}$ ,  $\mathbf{R} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_N)$ .

将最近邻图  $\mathbf{U}$  的权重矩阵  $\mathbf{V}$  映射到稀疏表示系数向量矩阵  $\mathbf{W}$  中, 并通过最小化下述目标函数得到最优映射:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_j)^2 V_{(k,j)} = \text{Tr}(\mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{W}^T) \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{L} = \mathbf{R} - \mathbf{V}$  为面向 ISAR 图像块数据的图拉普拉斯矩阵,  $\text{Tr}(\mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{W}^T)$  称为面向 ISAR 图像块数据的图拉普拉斯正则化算子. 式(5)的推导过程在附录 A 中给出.

将式(5)中的图拉普拉斯正则化算子加入到式(4)中, 作为正则化项与成像问题联合优化. 加入图拉普拉斯正则化算子后的联合优化问题可建模为

$$\min_{\sigma, \mathbf{D}_p, \{\mathbf{w}_k\}} \sum_{k=1}^N \|\sigma_k - \mathbf{D}_p \mathbf{w}_k\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{G}_s - \Psi\sigma\|_2^2 + \alpha \text{Tr}(\mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{W}^T) \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \|\mathbf{d}_{py}\|_1 \leq c, \quad y = 1, 2, \dots, n_p, \quad \forall k, \quad \|\mathbf{w}_k\|_1 \leq T_p$$

其中,  $\mathbf{d}_{py}$  为稀疏变换字典  $\mathbf{D}_p$  中第  $y$  个原子,  $c$  为非 0 的正常数,  $\alpha$  表示引入的正则化参数. 第一项用于求得面向图像块的字典和稀疏表示系数, 第二项用于平衡稀疏表示系数和测量值之间的保真度, 第三项为图拉普拉斯正则化算子.

进一步引入正则化参数  $\beta$ , 将式(6)改写为

$$\min_{\sigma, \mathbf{D}_p, \{\mathbf{w}_k\}} \sum_{k=1}^N \|\sigma_k - \mathbf{D}_p \mathbf{w}_k\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{G}_s - \Psi\sigma\|_2^2 + \alpha \text{Tr}(\mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{W}^T) + \beta \sum_{k=1}^N \|\mathbf{w}_k\|_1 \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad \|\mathbf{d}_{py}\|_1 \leq c$$

式(7)中待求解的参数包括待重建目标场景图像  $\sigma$ 、面向 ISAR 图像块的变换字典  $\mathbf{D}_p$  以及稀疏表示系数集合  $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^N$ . 采用交替迭代策略优化式(7), 每一次迭代包括  $N$  次循环, 每次循环涉及两步: 交替求解  $\mathbf{w}_k$  和

$\sigma_k$ , 更新字典  $D_p$ . 迭代结束后, 将更新后的图像块按照提取时的索引置回原位置处. 考虑到图像块之间会有重叠, 最终成像结果中各个像素点的值通过对置回原位置处的图像块像素进行加权平均后得到.

### 3.2 稀疏表示求解和目标图像重建

通常情况可采用追踪算法求解式(7)中的稀疏表示. 但注意到式(7)中稀疏系数会包含0, 对于稀疏系数为0的情况, 常用非约束的优化方法并不一定能够获得最优结果. 上升坐标梯度法可解决该问题, 得到全局的最优解<sup>[17]</sup>.

求解稀疏系数和目标图像时, 面向图像块的字典  $D_p$  保持不变, 则式(7)可改写为

$$\left\{ \widehat{\sigma}, \left\{ \widehat{\mathbf{w}}_k \right\} \right\} = \operatorname{argmin}_{\sigma, \{\mathbf{w}_k\}} \sum_{k=1}^N \left\| \sigma_k - D_p \mathbf{w}_k \right\|_2^2 + \lambda \left\| \mathbf{G}_s - \Psi \sigma \right\|_2^2 + a \operatorname{Tr}(\mathbf{W} \mathbf{L} \mathbf{W}^T) + \beta \sum_{k=1}^N \left\| \mathbf{w}_k \right\|_1 \quad (8)$$

具体求解时, 按照逐个系数向量更新的策略, 依序地更新每一个系数向量. 当某一个系数向量更新时, 其余系数向量固定不变.

对保真度约束项  $\left\| \mathbf{G}_s - \Psi \sigma \right\|_2^2$  中的  $\mathbf{G}_s$  和  $\Psi \sigma$  分别左乘  $\Psi^T$  可得  $\left\| \sigma - \mathbf{I} \right\|_2^2$ , 其中  $\mathbf{I}$  为低质量的目标场景图像, 是 ISAR 回波数据两维随机降采样后, 直接通过快速傅里叶变换得到的.

借鉴文献[14]中的式(26), 令  $\sigma$  和  $\mathbf{I}$  之间的误差表示为  $\mathbf{e} = \sigma - \mathbf{I}$ , 其中  $\mathbf{e}$  中的每个元素表示为  $e_i, i=1, 2, \dots, n$ . 假设  $e_i$  是独立的且满足  $N(0, v^2)$  分布, 则对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\left\| \sigma - \mathbf{I} \right\|_2^2$  与  $\sum_{k=1}^N \left\| \sigma_k - \mathbf{I}_k \right\|_2^2$  之间的关系满足以下条件:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ K \rightarrow \infty}} \mathcal{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \left\| \sigma - \mathbf{I} \right\|_2^2 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^N \left\| \sigma_k - \mathbf{I}_k \right\|_2^2 \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (9)$$

其中,  $K = n_p \times N, \mathbf{I}_k$  为按照式(4)给出的图像块提取方式从  $\mathbf{I}$  中提取的第  $k$  个图像块. 式(9)的证明过程在附录 B 中给出.

根据式(9)所示近似关系, 可以概率为 1 得到如下等式:

$$\left\| \sigma - \mathbf{I} \right\|_2^2 = \frac{n}{K} \sum_{k=1}^N \left\| \sigma_k - \mathbf{I}_k \right\|_2^2 \quad (10)$$

同时,  $\operatorname{Tr}(\mathbf{W} \mathbf{L} \mathbf{W}^T)$  也可改写为向量内积的表示形式:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\mathbf{W} \mathbf{L} \mathbf{W}^T) &= \operatorname{Tr} \left( \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N L_{(k,j)} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N L_{(k,j)} \mathbf{w}_j^T \mathbf{w}_k \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N L_{(k,j)} \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_j \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)和式(10)代入式(8)可得:

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{\sigma}, \left\{ \widehat{\mathbf{w}}_k \right\} \right\} &= \operatorname{argmin}_{\sigma, \{\mathbf{w}_k\}} \sum_{k=1}^N \left\| \sigma_k - D_p \mathbf{w}_k \right\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\lambda n}{K} \sum_{k=1}^N \left\| \sigma_k - \mathbf{I}_k \right\|_2^2 + \alpha \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N L_{(k,j)} \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_j \\ &\quad + \beta \sum_{k=1}^N \left\| \mathbf{w}_k \right\|_1 \end{aligned} \quad (12)$$

(1) 稀疏表示系数求解

采用逐个稀疏向量更新的方式更新  $\{\mathbf{w}_k\}$ . 当更新系数  $\mathbf{w}_k$  时, 其余系数向量  $\{\mathbf{w}_j\}_{j \neq k}$  保持固定. 在式(12)基础上, 可以得到用于更新  $\mathbf{w}_k$  的目标函数:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{w}}_k &= \operatorname{argmin}_{\{\mathbf{w}_k\}} \left\| \sigma_k - D_p \mathbf{w}_k \right\|_2^2 + \frac{\lambda n}{K} \left\| \sigma_k - \mathbf{I}_k \right\|_2^2 \\ &\quad + \alpha L_{(k,k)} \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_k^T \mathbf{h}_k + \beta \sum_{j=1}^Q \left| \mathbf{w}_k^{(j)} \right| \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{h}_k = 2\alpha \left( \sum_{j \neq k} L_{(k,j)} \mathbf{w}_j \right), \mathbf{w}_k^{(j)}$  表示  $\mathbf{w}_k$  的第  $j$  个系数.

为了方便表述, 令

$$f(\mathbf{w}_k) = \mathbf{h}(\mathbf{w}_k) + \beta \sum_{j=1}^Q \left| \mathbf{w}_k^{(j)} \right| \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{h}(\mathbf{w}_k) = \left\| \sigma_k - D_p \mathbf{w}_k \right\|_2^2 + \frac{\lambda n}{K} \left\| \sigma_k - \mathbf{I}_k \right\|_2^2 + \alpha L_{(k,k)} \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_k^T \mathbf{h}_k$ , 将  $\left| \mathbf{w}_k^{(j)} \right|$  的取模符号去掉, 即用  $\mathbf{w}_k^{(j)}$  (如果  $\mathbf{w}_k^{(j)} > 0$ )、 $-\mathbf{w}_k^{(j)}$  (如果  $\mathbf{w}_k^{(j)} < 0$ ) 或 0 (如果  $\mathbf{w}_k^{(j)} = 0$ ) 来替代  $\left| \mathbf{w}_k^{(j)} \right|$ . 引入符号向量  $\boldsymbol{\theta}$  存放  $\mathbf{w}_k^{(j)}$  的符号, 式(14)可改写为

$$\widehat{\mathbf{w}}_k = \operatorname{argmin}(\mathbf{w}_k) = f(\mathbf{w}_k) + \beta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{w}_k \quad (15)$$

令  $(\partial g(\widehat{\mathbf{w}}_k) / \partial \widehat{\mathbf{w}}_k) = 0$ , 可得到  $\widehat{\mathbf{w}}_k$  的估计值:

$$\widehat{\mathbf{w}}_k = (2D_p^T D_p + \alpha L_{(k,k)} \mathbf{E})^{-1} (2D_p^T \sigma_k - (\beta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_k)) \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{E}$  为单位矩阵.

对其余的待求解的稀疏系数向量  $\{\mathbf{w}_j\}_{j \neq k}$ , 采用式(13)~(16)的求解方法, 获得所有的稀疏向量的估计值  $\{\widehat{\mathbf{w}}_k\}_{k=1}^N$ .

(2) 目标图像重建

利用  $\{\widehat{\mathbf{w}}_k\}_{k=1}^N$  和固定的稀疏变换字典, 结合  $\widehat{\sigma}_k = D_p \widehat{\mathbf{w}}_k$ , 即可获得所有待重建图像块的估计值  $\{\widehat{\sigma}_k\}_{k=1}^N$ . 将所有重建的图像块根据提取的索引可置回原位置处, 进一步对各个重建的图像块加权平均后可得到待成像目标场景的估计值:

$$\widehat{\sigma} = \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_k^T(\widehat{\sigma}_k) / \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_k^T(\mathbf{B}) \quad (17)$$

其中,  $\widehat{\sigma}$  表示待重建的目标场景的估计值; “/” 表示逐元素的除法;  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\sqrt{n_p} \times \sqrt{n_p}}$  为标识矩阵, 其中各元素值都为 1.

### 3.3 字典学习

在学习图像块字典  $\mathbf{D}_p$  时,需要将稀疏系数矩阵  $\widehat{\mathbf{W}}$  和估计的目标场景图像块矩阵  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$  固定,其中矩阵  $\widehat{\mathbf{W}} \in \mathbb{C}^{n_p \times N}$  是由集合  $\{\widehat{\mathbf{w}}_k\}_{k=1}^N$  中的稀疏系数向量构成的稀疏系数矩阵.

根据式(7)可知,字典学习问题可以改写为

$$\min_{\mathbf{D}_p} \left\| \widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{D}_p \widehat{\mathbf{W}} \right\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \left\| \mathbf{d}_{py} \right\|_1^2 \leq c, \quad y=1, 2, \dots, n_p \quad (18)$$

从式(18)中可见,图像块字典学习问题为建模为含有二次约束的最小二乘问题.含有二次约束项的优化问题可利用迭代投影梯度下降策略求解.但采用拉格朗日对偶上升策略求解无需迭代过程,效率更高<sup>[22]</sup>.

构建式(18)的拉格朗日对偶函数.令向量  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_p}]$ ,其中  $\lambda_y$  为与第  $y$  个不等式约束  $\left\| \mathbf{d}_{py} \right\|_1^2 - c \leq 0$  相关的拉格朗日乘子,式(18)关于  $\mathbf{D}_p$  取最小值的拉格朗日对偶函数为

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\lambda}) &= \inf_{\mathbf{D}_p} L(\mathbf{D}_p, \boldsymbol{\lambda}) \\ &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{D}_p} \left\| \widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{D}_p \widehat{\mathbf{W}} \right\|_2^2 + \sum_{y=1}^{n_p} \lambda_y \left( \left\| \mathbf{d}_{py} \right\|_1^2 - c \right) \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)表示拉格朗日函数关于  $\mathbf{D}_p$  取最小值,inf代表取可行  $\mathbf{D}_p$  集合的下确界.

令  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n_p \times n_p}$  为对角矩阵,其中的对角线元素  $A_{yy} = \lambda_y$ .则  $L(\mathbf{D}_p, \boldsymbol{\lambda})$  可以改写为

$$\begin{aligned} L(\mathbf{D}_p, \boldsymbol{\lambda}) &= \left\| \widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{D}_p \widehat{\mathbf{W}} \right\|_2^2 + \operatorname{Tr}(\mathbf{D}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{A}) - c \operatorname{Tr}(\mathbf{A}) \\ &= \operatorname{Tr}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) - 2 \operatorname{Tr}(\mathbf{D}_p^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \widehat{\mathbf{W}}^T) \\ &\quad + \operatorname{Tr}(\widehat{\mathbf{W}}^T \mathbf{D}_p^T \mathbf{D}_p \widehat{\mathbf{W}}) \\ &\quad + \operatorname{Tr}(\mathbf{D}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{A}) - c \operatorname{Tr}(\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (20)$$

待求解字典的最优估计值可通过令  $\partial L(\mathbf{D}_p, \boldsymbol{\lambda}) / \partial \mathbf{D}_p = 0$  得到:

$$\mathbf{D}_p \widehat{\mathbf{W}} \widehat{\mathbf{W}}^T - \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \widehat{\mathbf{W}}^T + \mathbf{D}_p \mathbf{A} = 0 \quad (21)$$

字典  $\mathbf{D}_p$  的估计值为

$$\widehat{\mathbf{D}}_p = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \widehat{\mathbf{W}}^T (\widehat{\mathbf{W}} \widehat{\mathbf{W}}^T + \mathbf{A})^{-1} \quad (22)$$

## 4 ISAR 数据成像结果及分析

本节采用实测的飞机数据和船目标数据来验证结合 NNGM 的 ISAR 成像方法的成像性能.为了客观评价所提成像方法的可行性和主要优势,采用基于 GDL 的 ISAR 成像方法、基于 DL 的 ISAR 成像方法和基于 GKF 的 ISAR 成像方法作为对比方法.

基于 GDL 和 DL 的 ISAR 成像方法中,稀疏变换字典可自适应于待成像目标场景,找到其特有的稀疏表

示用于重建目标图像.基于 GKF 的 ISAR 成像方法中自然稀疏特性,可强化点状特征成像.

### 4.1 成像数据和评价指标

实测飞机目标数据通过 C 波段的地基雷达获得,雷达发射信号带宽 400 MHz.船目标数据是通过 X 波段岸基雷达采集的,雷达发射波形的带宽为 80 MHz.两类实测数据均利用基于平均距离像最小熵的距离对准<sup>[23]</sup>和改进的相位梯度自聚焦<sup>[24]</sup>完成运动补偿.雷达采集的回波数据完成运动补偿后,再执行距离和方位两维的随机降采样.对于飞机数据,执行 25% 的降采样率和 50% 的降采样率,对船数据执行 50% 的降采样率.两类数据的大小、降采样率以及稀疏度如表 1 所示.

表 1 实测飞机和船目标 ISAR 数据参数

数据	原始数据大小	降采样率(测量数据)	稀疏度
飞机数据	100 × 80	25%(2 000), 50%(4 000)	900
船数据	96 × 96	50%(4 096)	841

对于采用的基于 GDL 的 ISAR 成像方法,最优的成像参数设置在文献[14]表 1 中给出.本文所有实验和对比实验在 MATLAB2020a 上完成,实验平台为: Intel (R) Core (TM) i7-7700 CPU @ 3.60 GHz, 8 GB 内存, Windows 10 操作系统.

采用如下定量评价指标来综合评估所提成像方法成像结果<sup>[13]</sup>:虚警(False Alarm, FA)、漏检(Missed Detection, MD)、相对均方根误差(Relative Root Mean Square Error, RRMSE)、目标杂波比(Target-to-Clutter Ratio, TCR)、图像熵(ENTropy of the image, ENT)、图像对比度(Image Contrast, IC)和成像时间 Time.其中 FA 和 MD 分别用来衡量错误重建和遗漏的散射点数,RRMSE 用来表示所有被重建的散射点相对于 RD 图中散射点在幅度上的重建误差.

### 4.2 飞机目标成像结果与分析

本节给出实测的飞机目标 ISAR 数据的成像结果与分析.基于 NNGM, GDL 和 DL 的成像方法都采用图像分块策略对飞机目标数据成像,分块步长为 3,分块大小为 8 × 8. NNGM 成像方法中参数  $\alpha$  和  $\beta$  分别设为 0.4 和 0.028.

图 1(a)为飞机目标 ISAR 全数据通过 RD 成像方法获得目标图像.图 1(b)~(e)分别为 25% 飞机目标 ISAR 数据分别通过 NNGM, GDL, DL 和 GKF 成像方法获得的目标图像.

结合图 1(a)和图 1(b)可看出, NNGM 成像方法利用 25% 飞机目标数据重建的飞机目标可辨识,成像结果中,飞机机头和机翼都被重建出来,目标轮廓完整.

对比图 1(b)、图 1(c)与图 1(d)可见, NNGM 和 GDL

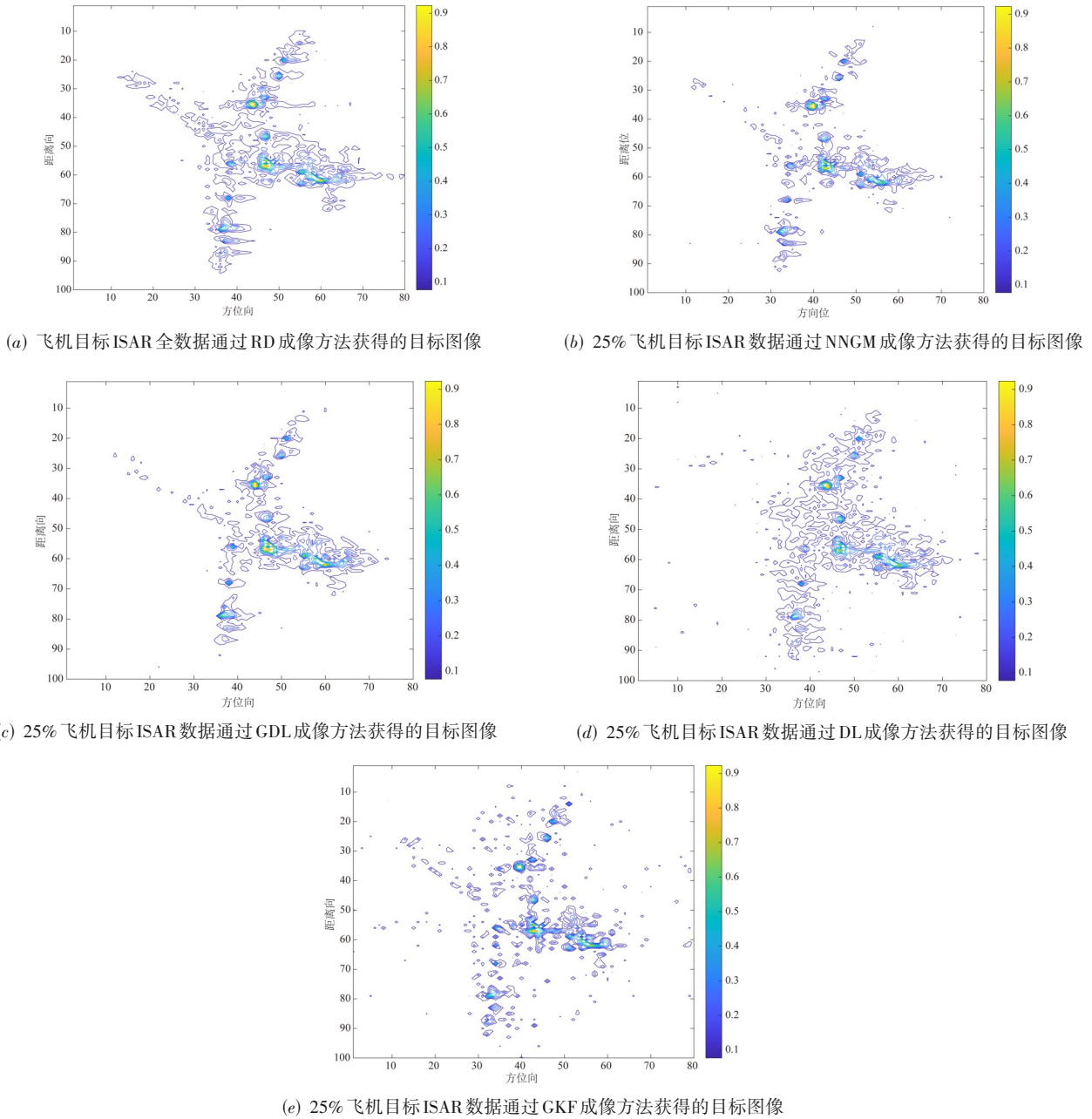


图 1 飞机目标 ISAR 数据的成像结果

成像方法获得的成像结果优于 DL 成像方法获得的。DL 成像方法未能重建机头部位的散射点, NNGM 和 GDL 成像方法成像结果目标轮廓相对更完整, 机头部位有散射点被重建。这说明在 25% 测量数据成像情况下, 仅依赖训练好字典找到目标数据特有的稀疏表示用于成像, 并不足以完整重建目标。NNGM 中额外引入的 ISAR 目标数据在数据空间的几何结构信息, GDL 中利用的图像块间的相似性先验信息, 都有助于提升目标轮廓的重建质量。

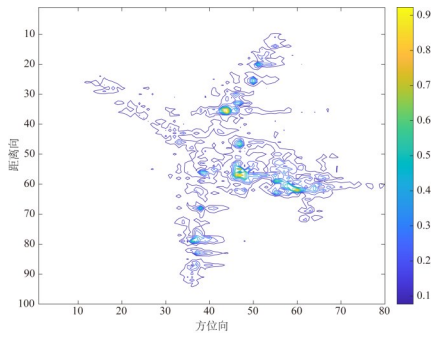
继续对比图 1(b) 与图 1(e), NNGM 成像方法获得

的飞机目标明显优于 GKF 方法获得的飞机目标, 飞机目标轮廓明显更完整, 背景虚假散射点明显减少。这是因为 GKF 成像方法中利用的是 ISAR 目标数据的空域稀疏表示重建目标图像。空域稀疏表示主要刻画 ISAR 目标图像点状或区域状特征, 无法刻画目标区域特有的特征, 进而导致相应的重建结果中, 出现较多的虚假的散射点。

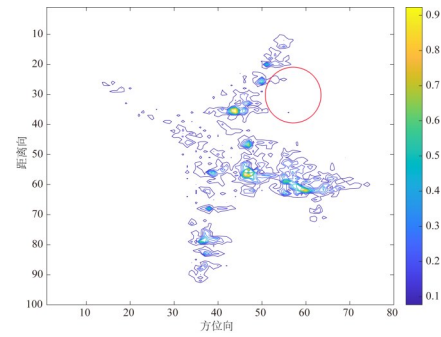
图 2(a) 给出了飞机全数据采用 RD 算法获得的目标图像。从图 2(b) 到图 2(e) 分别展示的是 50% 飞机目标数据通过 NNGM, GDL, DL 和 GKF 成像方法获得的目标图

像. 从图2中可以看出,4种方法都可以利用50%飞机数据重建出目标轮廓完整的飞机目标. 对比图2(b)、图2(c)、图2(d)和图2(e)可见,NNGM成像方法成像结果中虚假散射点较少,如图2中红色圆圈区域所示. 这是因为

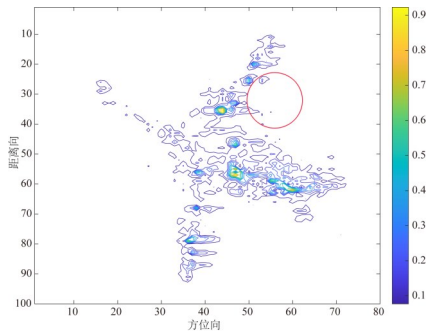
NNGM成像方法中包含的目标的先验信息更多,包括几何结构特征信息,进而能够找到目标图像更精准的稀疏表示,能提升目标主体区域散射点的重建质量,同时抑制无用的特征信息,减少背景区域虚假散射点的重建.



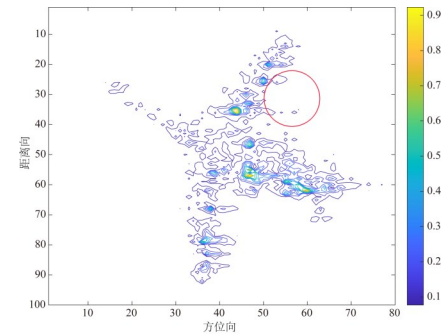
(a) 飞机全数据采用RD算法获得的目标图像



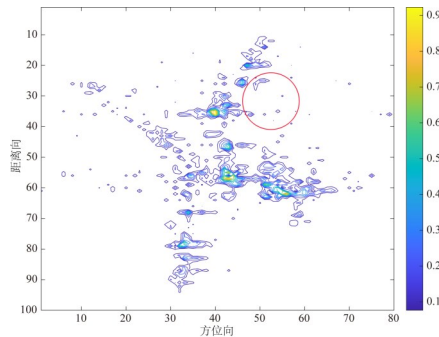
(b) 50%飞机目标数据通过NNGM成像方法获得的目标图像



(c) 50%飞机目标数据通过GDL成像方法获得的目标图像



(d) 50%飞机目标数据通过DL成像方法获得的目标图像



(e) 50%飞机目标数据通过GKF成像方法获得的目标图像

图2 飞机目标ISAR数据的成像结果

图1和图2中各成像方法重建结果的定量评价在表2中给出. 由于非合作目标的真值图无法获得,将全数据通过RD方法获得的目标图像看作目标的“真值”图像,并以此作为评价算法成像质量的基准.

表2中FA以及MD表明,NNGM成像方法重建飞机目标图像中,误建和漏建的散射点数量都是最少的. 从表2中RRMSE指标可知,NNGM成像方法重建飞机目标散射点的幅度最准确,幅度误差最小.

表2中TCR,ENT以及IC反映出,NNGM成像结

果中船目标散射点位置最精准,重建结果的图像对比度最高. 这和从视觉角度对比图1和图2得出的结果相同.

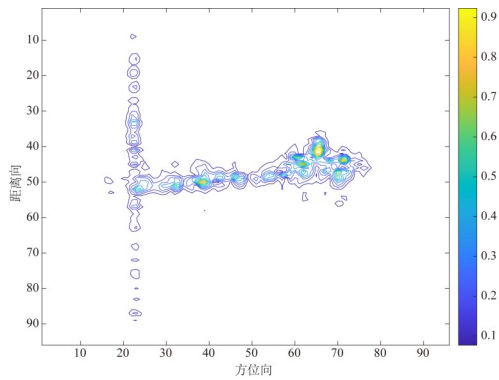
从运算时间可知,NNGM成像方法计算效率最高. 这是因为NNGM字典学习步骤中没有迭代过程.

### 4.3 船目标成像结果与分析

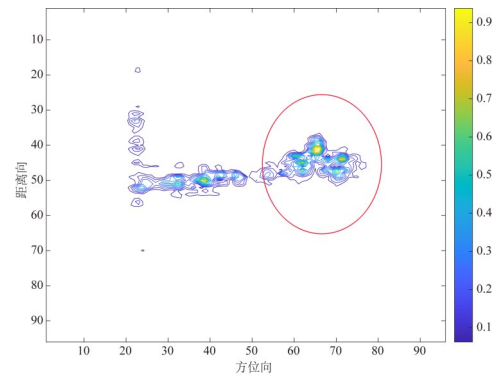
图3(a)给出了船目标全数据利用RD算法获得的目标图像. 图3(b)~(e)给出了50%船目标数据通过NNGM,GDL,DL和GKF成像方法获得的目标图像.

表 2 25% 和 50% 降采样的飞机数据利用文中各方法成像结果定量分析

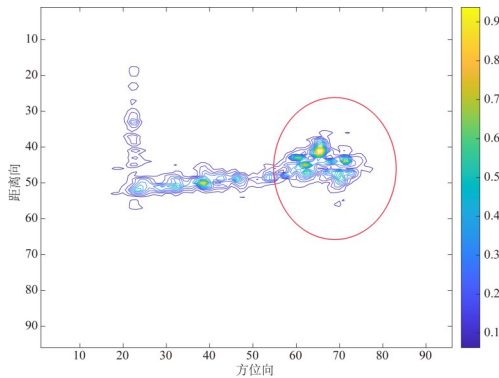
数据	成像方法	FA	MD	RRMSE	TCR	ENT	IC	时间/s
25% 飞机数据	NNGM	56	89	0.227 1	58.893 7	5.023 8	9.924 0	2.556 2
	GDL	70	102	0.287 8	57.122 5	5.048 2	9.537 6	3.027 1
	DL	170	173	0.317 0	48.652 5	5.467 4	7.722 9	7.661 9
	GKF	144	209	0.332 5	50.017 9	5.320 5	8.085 0	1.113 1×10 <sup>3</sup>
50% 飞机数据	NNGM	34	67	0.192 3	62.224 3	5.178 3	9.323 3	3.334 2
	GDL	52	104	0.212 9	60.397 2	5.258 0	8.727 8	3.362 0
	DL	45	187	0.223 4	53.459 3	5.315 2	8.429 9	7.221 3
	GKF	86	133	0.254 5	55.593 0	5.380 0	8.144 9	1.894 5×10 <sup>3</sup>



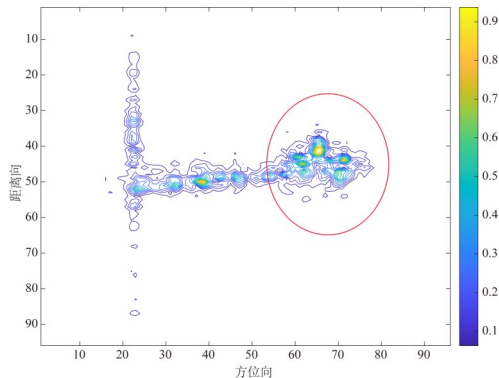
(a) 船目标全数据利用RD算法获得的目标图像



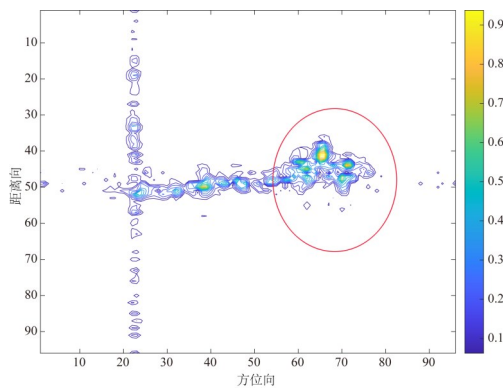
(b) 50% 船目标数据通过 NNGM 成像方法获得的目标图像



(c) 50% 船目标数据通过 GDL 成像方法获得的目标图像



(d) 50% 船目标数据通过 DL 成像方法获得的目标图像



(e) 50% 船目标数据通过 GKF 成像方法获得的目标图像

图 3 船目标 ISAR 数据的成像结果

基于 NNGM, GDL 和 DL 的成像方法都采用图像分块的策略, 图像分块的步长为 3, 图像块大小为  $8 \times 8$ . NNGM 成像方法中参数  $\alpha$  和  $\beta$  分别设为 0.38 和 0.022.

从图 3(a) 和图 3(b) 可知, NNGM 利用 50% 船数据重建的船目标主体, 与全数据利用传统 RD 方法获的船目标主体相近.

从图 3(b)、图 3(c) 和图 3(d) 中可见, NNGM 成像方法重建的结果要优于 GDL, DL 和 GKF 成像方法重建的结果. NNGM 重建的船目标轮廓更加清晰, 背景虚假散

射点数更少, 如图 3 中红色圆圈所示.

各成像方法重建船目标图像的定量分析在表 3 中给出. 从 FA 和 MD 可知, NNGM 重建船目标图像中, 误建和漏建的目标区域散射点数量都是最少的. 对比 RRMSE, TCR, ENT 和 IC 指标值可知, NNGM 成像方法重建结果中, 目标区域散射点的幅度和位置最准确, 重建结果的图像对比度最高.

从表 3 最后一列 Time 可见, NNGM 成像方法成像效率最高.

表 3 50% 降采样的船目标数据利用文中各方法成像结果定量分析

数据	成像方法	FA	MD	RRMSE	TCR	ENT	IC	时间/s
50% 船数据	NNGM	11	52	0.158 8	69.584 4	5.029 7	9.156 1	3.525 4
	GDL	20	55	0.223 1	68.482 8	5.181 3	9.145 4	4.152 6
	DL	155	126	0.335 4	53.629 6	5.638 8	7.323 9	6.362 0
	GKF	88	132	0.226 4	56.316 1	5.603 6	7.596 5	$1.340 \times 10^3$

#### 4.4 算法复杂度和计算时间

假设计算每一个图像块的  $N$  个顶点的最近邻图模型耗时为  $T_N$ , 计算每一个图像块稀疏表示的时间为  $T_s$ , 则 NNGM 成像方法对 ISAR 目标成像的计算复杂度为  $O(N(T_N + T_s))$ . 在 Intel (R) Core (TM) i7-7700 CPU @ 3.60 GHz 的计算平台上, 3~5 s 即可完成目标成像.

## 5 结论

文章首次将 NNGM 引入到 ISAR 稀疏成像中. 对 ISAR 目标数据建立的 NNGM 可映射到 ISAR 目标数据稀疏表示中, 形成图拉普拉斯算子. 与自然稀疏特性和变换域的特有稀疏表示相比, 结合几何结构特征的特有稀疏表示更优. 与 GKF, DL 和 GDL 三种 ISAR 稀疏成像方法成像结果相比, 结合 NNGM 的 ISAR 稀疏成像方法成像结果中背景虚假散射点数更少, 目标背景更干净, 目标轮廓更清晰, 成像方法成像效率更高.

#### 参考文献

- [1] PRICKETT M J, CHEN C C. Principles of inverse synthetic aperture radar ISAR imaging[C]//IEEE Electronics and Aerospace Systems Conference. New York: IEEE, 1980: 340-345.
- [2] CHEN V C, MARTORELLA M. Inverse Synthetic Aperture Radar Imaging: Principles, Algorithms and Applications [M]. Edison: SciTech Publishing, Inc., 2014.
- [3] GENG M M, TIAN Y, FANG J, et al. Implementation of GPU-based iterative shrinkage-thresholding algorithm in sparse microwave imaging[C]//2012 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Piscataway: IEEE, 2013: 3863-3866.
- [4] CETIN M, KARL W, M C. Feature-enhanced synthetic aperture radar image formation based on nonquadratic regularization[J]. IEEE Transactions on Image Processing: a Publication of the IEEE Signal Processing Society, 2001, 10(4): 623-631.
- [5] 汪玲, 朱栋强, 马凯莉, 等. 空间目标卡尔曼滤波稀疏成像方法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(4): 846-852. WANG L, ZHU D Q, MA K L, et al. Sparse imaging of space targets using Kalman filter[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2018, 40(4): 846-852. (in Chinese)
- [6] 徐宗本, 吴一戎, 张冰尘, 等. 基于  $L_{1/2}$  正则化理论的稀疏雷达成像[J]. 科学通报, 2018, 63(14): 1306-1319. XU Z B, WU Y R, ZHANG B C, et al. Sparse radar imaging based on  $L_{1/2}$  regularization theory[J]. Chinese Science Bulletin, 2018, 63(14): 1306-1319. (in Chinese)
- [7] HASANKHAN M J, SAMADI S, ÇETIN M. Sparse representation-based algorithm for joint SAR image formation and autofocus[J]. Signal, Image and Video Processing, 2017, 11(4): 589-596.
- [8] BI H, BI G A, ZHANG B C, et al. Complex-image-based sparse SAR imaging and its equivalence[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2018, 56(9): 5006-5014.
- [9] SAMADI S, ÇETIN M, MASNADI-SHIRAZI M A. Sparse representation-based synthetic aperture radar imaging[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2011, 5(2): 182-193.
- [10] WANG L, LOFFELD O, MA K L, et al. Sparse ISAR imaging using a greedy Kalman filtering approach[J]. Signal Processing, 2017, 138: 1-10.
- [11] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transac-

- tions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [12] BARANIUK R, STEEGHS P. Compressive radar imaging [C]//2007 IEEE Radar Conference. Piscataway: IEEE, 2007: 128-133.
- [13] 胡长雨, 汪玲, 朱栋强. 结合字典学习技术的 ISAR 稀疏成像方法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(7): 1735-1742.  
HU C Y, WANG L, ZHU D Q. Sparse ISAR imaging exploiting dictionary learning[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2019, 41(7): 1735-1742. (in Chinese)
- [14] HU C Y, WANG L, ZHU D Y, et al. Inverse synthetic aperture radar sparse imaging exploiting the group dictionary learning[J]. Remote Sensing, 2021, 13(14): 2812-2833.
- [15] BELKIN M, NIYOOGI P. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation[J]. Neural Computation, 2003, 15(6): 1373-1396.
- [16] LIU X M, ZHAI D M, ZHAO D B, et al. Progressive image denoising through hybrid graph Laplacian regularization: A unified framework[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(4): 1491-1503.
- [17] ZHENG M, BU J J, CHEN C, et al. Graph regularized sparse coding for image representation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(5): 1327-1336.
- [18] TANG Y B, SHEN Y, JIANG A M, et al. Image denoising via graph regularized K-SVD[C]//2013 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). Piscataway: IEEE, 2013: 2820-2823.
- [19] YANKELEVSKY Y, ELAD M. Dual graph regularized dictionary learning[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks, 2016, 2(4): 611-624.
- [20] SHA L D, SCHONFELD D. Dual graph regularized sparse coding for image representation[C]//2017 IEEE Visual Communications and Image Processing (VCIP). Piscataway: IEEE, 2018: 1-4.
- [21] YANKELEVSKY Y, ELAD M. Graph-constrained supervised dictionary learning for multi-label classification[C]//2016 IEEE International Conference on the Science of Electrical Engineering (ICSEE). Piscataway: IEEE, 2017: 1-5.
- [22] SCHÖLKOPF B, PLATT J, HOFMANN T. Efficient sparse coding algorithms[C]//Advances in Neural Information Processing Systems, 19: Proceedings of the 2006 Conference. Cambridge: MIT Press, 2007: 801-808.
- [23] ZHU D Y, WANG L, YU Y S, et al. Robust ISAR range alignment via minimizing the entropy of the average

range profile[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2009, 6(2): 204-208.

- [24] 汪玲, 朱岱寅, 朱兆达. 基于 SAR 实测数据的舰船成像研究[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(2): 401-404.  
WANG L, ZHU D Y, ZHU Z D. Study on ship imaging using SAR real data[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(2): 401-404. (in Chinese)
- [25] 李亚峰. 一种基于多字典学习的图像分割模糊方法[J]. 电子学报, 2018, 46(7): 1700-1709.  
LI Y F. An image segmentation fuzzy method based on multi-dictionary learning[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(7): 1700-1709. (in Chinese)

## 附录 A

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_j)^2 \mathbf{V}_{(k,j)} = \text{Tr}(\mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{W}^T) \quad (\text{A-1})$$

证明:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_j)^2 \mathbf{V}_{(k,j)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{w}_k^2 + \mathbf{w}_j^2 - 2\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j) \mathbf{V}_{(k,j)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_k^2 \mathbf{V}_{(k,j)} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_j^2 \mathbf{V}_{(k,j)} - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N 2\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j \mathbf{V}_{(k,j)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

又因为  $r_k = \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_{(k,j)}$ ,  $\mathbf{R} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m)$ , 式(A-2)

可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_k^2 \mathbf{V}_{(k,j)} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_j^2 \mathbf{V}_{(k,j)} - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N 2\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j \mathbf{V}_{(k,j)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{w}_k^2 \mathbf{R}_{(k,k)} + \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_j^2 \mathbf{R}_{(j,j)} - 2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_k \mathbf{w}_j \mathbf{V}_{(k,j)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{k=1}^N \mathbf{w}_k^2 \mathbf{R}_{(k,k)} - 2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_k \mathbf{w}_j \mathbf{V}_{(k,j)} \right) \\ &= \mathbf{W} \text{diag}(\mathbf{R}) \mathbf{W}^T - \mathbf{W} \mathbf{V} \mathbf{W}^T \\ &= \text{Tr}(\mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{W}^T) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

其中,  $\mathbf{L} = \mathbf{R} - \mathbf{V}$ .

证毕.

## 附录 B

令  $\sigma \in \mathbb{C}^{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$ ,  $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$ ,  $\sigma_k \in \mathbb{C}^{\sqrt{n_p} \times \sqrt{n_p}}$ ,  $\mathbf{I}_k \in \mathbb{C}^{\sqrt{n_p} \times \sqrt{n_p}}$ ,

$\sigma$  和  $\mathbf{I}$  之间的误差表示  $\mathbf{e} = \sigma - \mathbf{I}$ , 其中,  $\mathbf{e}$  中的每个元素表示为  $e_i, i=1, 2, \dots, n$ . 假设  $e_i$  是独立且满足  $N(0, \nu^2)$  分

布,则对于 $\forall \varepsilon > 0, \|\sigma - I\|_2^2$ 与 $\sum_{k=1}^N \|\sigma_k - I_k\|_2^2$ 之间的关系满足式(9)的条件.

**证明:**

假设 $e_i$ 是独立的且满足 $N(0, v^2)$ 分布,则可知 $e_i^2$ 也满足独立假设. $e_i$ 的均值和方差分别为: $E\{e_i\}=0$ 和 $V\{e_i\}=v^2$ ,则 $e_i^2$ 的均值可以表示为

$$E\{e_i^2\} = V\{e_i\} + \{E\{e_i\}\}^2 = v^2 \quad (\text{B-1})$$

根据大数定律的收敛性,对于 $\forall \varepsilon > 0$ ,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 - v^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} = 1 \quad (\text{B-2})$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \|\sigma - I\|_2^2 - v^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} = 1 \quad (\text{B-3})$$

进一步,令 $\sigma_G$ 和 $I_G$ 分别表示 $\{\sigma_k\}_{k=1}^N$ 和 $\{I_k\}_{k=1}^N$ 中图像块拼接的矩阵. $\sigma_G$ 和 $I_G$ 之间的误差表示为 $e_G$ ,每个 $e_G$ 元素在 $e_j$ 表示的, $j=1, 2, \dots, K$ 和 $K=n_p \times N$ 由于假设 $e_j$ 也是独立的且满足 $N(0, v^2)$ 的分布,则对于 $e_j^2$ 而言,可得

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mathcal{P} \left\{ \left| \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K e_j^2 - v^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} = 1 \quad (\text{B-4})$$

将式(B-4)改写为

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mathcal{P} \left\{ \left| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^N \|\sigma_k - I_k\|_2^2 - v^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} = 1 \quad (\text{B-5})$$

从式(B-3)可知,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} < \left( \frac{1}{n} \|\sigma - I\|_2^2 - v^2 \right) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} &= 1 \quad \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} - \beta < \frac{1}{n} \|\sigma - I\|_2^2 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^N \|\sigma_k - I_k\|_2^2 < \frac{\varepsilon}{2} - \beta \right\} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

从式(B-5)可知, $\lim_{K \rightarrow \infty} \rho \left\{ \beta \in \left( -\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\} = 1$ . 因此,

当 $K \rightarrow \infty$ 时,有 $-\frac{\varepsilon}{2} - \beta > -\frac{\varepsilon}{2} - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) = -\varepsilon$ 和 $\frac{\varepsilon}{2} - \beta < \frac{\varepsilon}{2} - \left( -\frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon$ . 因此,式(B-6)可以被缩放为

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ K \rightarrow \infty}} \rho \left\{ -\varepsilon < \frac{1}{n} \|\sigma - I\|_2^2 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^N \|\sigma_k - I_k\|_2^2 < \varepsilon \right\} = 1 \quad (\text{B-7})$$

因此,式(9)得证.

## 作者简介



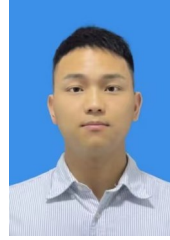
**胡长雨** 1989年出生于江西抚州. 现为无锡学院讲师. 主要研究方向为智能雷达成像.

E-mail: changyu\_hu@cwXu.edu.cn



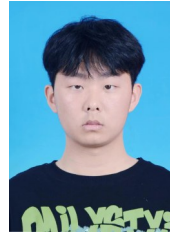
**陈春风** 1982年出生于黑龙江哈尔滨. 现为南京航空航天大学博士研究生. 主要研究方向为雷达成像与动目标检测.

E-mail: chunfeng\_chen@nuaa.edu.cn



**易文忆** 2000年出生于江西九江. 现为无锡学院自动化学院本科生.

E-mail: 13426588110@163.com



**董宇宸** 2003年出生于重庆. 现为无锡学院电子信息工程学院本科生.

E-mail: 18015908211@163.com



**李晖** 1977年出生于河南叶县. 博士. 现为无锡学院教授、硕士生导师. 主要研究方向为智能信息处理、网络信息处理、网络安全、多目标优化理论与应用.

E-mail: hitihui1112@163.com



**汪玲** 1977年出生于河南开封. 现为南京航空航天大学教授、博士生导师,德国洪堡学者. 主要研究方向为逆合成孔径雷达成像.

E-mail: tulip\_wling@nuaa.edu.cn