

基于半解析有限元的利兹线交流电阻分析

金峰逸, 马玉芳

(辽宁工程技术大学电气与控制工程学院, 辽宁葫芦岛 125000)

摘要: 利兹线广泛应用于无线电能传输、涡流检测等领域。由于利兹线包含的导线股数多且几何结构复杂, 交流电阻计算困难是限制利兹线结构和电磁参数设计的主要原因。传统有限元方法和解析法在计算效率和普适性方面无法满足要求。本文采用半解析有限元法结合电路系统, 基于 Python 语言编程计算, 综合考虑集肤效应、邻近效应和循环电流, 对利兹线的交流电阻进行了分析。在 100 Hz 到 1 MHz 频率范围内, 基于并联利兹线模型, 验证了半解析有限元法对交流电阻计算的精度和效率, 并分析了螺距对利兹线空间磁场分布的影响。本文工作可为不同应用场景下利兹线模型的结构和电磁参数选择提供参考。

关键词: 利兹线; 交流电阻; 有限元; 均匀化; 电路; 螺距

基金项目: 辽宁省教育厅青年基金项目(No.LJ2020JL029)

中图分类号: TM15

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2023)12-3457-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20230001

Analysis of Litz Wire AC Resistance Based on Semi-Analytical Finite Element Method

JIN Feng-yi, MA Yu-fang

(Faculty of Electrical and Control Engineering, Liaoning Technical University, Huludao, Liaoning 125000, China)

Abstract: Litz wire is widely used in wireless power transfer, eddy current testing and other fields. Due to the large number of strands and complex geometric structure, the difficulty in calculating AC resistance is the main reason for limiting the design of Litz wire structure and electromagnetic parameters. The traditional finite element method and analytical method cannot meet the requirements in terms of computational efficiency and universality. In this paper, the AC resistance of Litz wire considering skin effect, proximity effect and circulating current is analyzed by semi-analytical finite element method and circuit system based on Python language. In the frequency range of 100 Hz to 1 MHz, the accuracy and efficiency of the semi-analytical finite element method for AC resistance calculation are verified based on the parallel Litz wire model, and the influence of pitch on the spatial magnetic field distribution of Litz wire is analyzed. The work in this paper can provide a reference for the structure and electromagnetic parameters selection of Litz wire model in different application scenarios.

Key words: Litz wire; AC resistance; finite element; homogenization; circuit; pitch

Foundation Item(s): Youth Fund Project of Liaoning Provincial Department of Education (No.LJ2020JL029)

1 引言

在涡流检测以及无线电能传输等领域, 随着应用场景的高频化, 线圈的交流电阻显著增加, 并成为制约系统性能提升的重要原因^[1,2]。为降低线圈的交流电阻, 工程上常采用由几十或上百股导线绞绕而成的利兹线代替普通单股漆包线^[3]。利兹线庞大的股数以及复杂的绞绕方式也使得交流电阻的计算复杂, 给利兹

线选型带来困难。例如, 在传统有限元及基于有限元的商业软件需要对利兹线中的每股导线进行细密剖分, 最终耗费大量的计算资源。如图 1, 利兹线中的交流电阻主要来自三部分: 一是高频下横截面电流密度趋于表面而形成的集肤效应; 二是处于外部磁场下, 因导线的抗磁性而产生的邻近效应; 三是并联利兹线自回路产生循环电流, 并对交流电阻产生一定贡献。

文献[4]采用一个与频率相关的交流损耗因子计

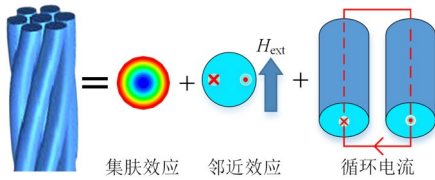


图1 利兹线交流电阻构成

算利兹线的交流电阻,但该方法忽略了利兹线的循环电流对交流电阻的影响.文献[5]采用部分元等效电路法计算利兹线的交流电阻,但该方法需要对每股导线进行单元划分.文献[6]采用解析公式计算利兹线的交流电阻,然而解析式不具有普适性.文献[7]采用均匀化方法结合积分方法,将抗磁效应引起的邻近效应以一个等效的复磁导率表示,将利兹线横截面的电流密度视为均匀分布,但该方法没有考虑利兹线循环电流的影响.

本文基于利兹线均匀化方法,结合电路系统与有限元法^[8],在100 Hz到1 MHz频率范围内,对利兹线的交流电阻进行了计算与分析.本文首先推导了利兹线的等效复磁导率与均匀化模型,然后介绍了有限元法结合电路系统的耦合模型,并通过与传统有限元法和阻抗分析仪实测对比,验证了本文半解析有限元法的计算效率和计算精度.基于本文的利兹线求解模型,对高频下利兹线的交流电阻成分进行了分析,并探究了螺距对利兹线空间磁场分布的影响.

2 利兹线均匀化模型

2.1 单股导线电磁场分析

图2为真空中沿 z 轴的单股圆导线横截面,导线中通过的总电流为 I ,且整个导线处于均匀时变磁场 $B_0 e^{j\omega t}$ 中.

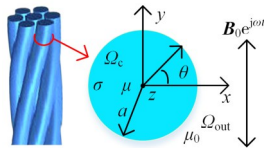


图2 单股圆导线横截面

在准静态场下,电场强度 E 和磁场强度 H 的方程如下:

$$\nabla \times H = \sigma E \quad (1)$$

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H \quad (2)$$

其中, σ 为电导率, μ 为磁导率, ω 为角频率, j 为虚部单位.图2中磁场强度只存在 z 轴分量 E_z ,根据式(1)和式(2),在极坐标下, E_z 满足如下微分方程:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k^2 E_z = 0 \quad (3)$$

其中 $k = \sqrt{-j\omega\sigma\mu}$.对式(3)在极坐标下采用分离变量法,可得电场强度 E_z 和磁场强度周向分量 H_θ 表达式如下:

$$E_z = p_0 J_0(\zeta) + p_1 J_1(\zeta) \cos \theta \quad (r \leq a) \quad (4)$$

$$H_\theta = \frac{jk}{\omega\mu} [p_0 J_1(\zeta) - p_1 J_1'(\zeta) \cos \theta] \quad (r \leq a) \quad (5)$$

$$E_z = \left(\frac{q_1}{r} + j\omega r B_0\right) \cos \theta \quad (r \geq a) \quad (6)$$

$$H_\theta = \frac{-j}{\omega\mu_0} \left(-\frac{q_1}{r^2} + j\omega B_0\right) \cos \theta \quad (r \geq a) \quad (7)$$

$$p_0 = \frac{kI}{2\pi a \sigma J_1(z)} \quad (8)$$

其中 $\zeta = kr$, $z = ka$,且 J_0 为第一类零阶贝塞尔函数, J_1 为第一类一阶贝塞尔函数.式(4)等式右边第一项和第二项分别对应集肤效应和邻近效应.式(6)和式(7)中的第一项和第二项分别为对应邻近效应和外部均匀磁场的偶极场.系数 p_1 和 q_1 可通过求解以下矩阵得到:

$$\begin{bmatrix} J_1(z) & -1/a \\ zJ_1'(z)/\mu_r & 1/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = j\omega a B_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

根据功率平衡方程,可得导线区域电磁场功率平衡方程:

$$S_c = - \int_{\partial\Omega_c} (E \times H^*) \cdot dS = \int_{\Omega_c} (\sigma |E|^2 + j\omega\mu |H|^2) dv \quad (10)$$

整个空间的电磁场功率平衡方程为

$$S = j\omega \int_{\Omega_{out}} \mu |H|^2 dv + \frac{R_0 z J_0(z)}{2J_1(z)} |I|^2 + j2\pi\omega a^2 l B_0^2 \frac{\mu_r}{\mu_0} \frac{J_1(z)(zJ_0(z) - J_1(z))^*}{|zJ_0(z) + J_1(z)(\mu_r - 1)|^2} \quad (11)$$

其中, $R_0 = l/(\sigma\pi a^2)$ 表示长为 l 的圆导线直流电阻.式(11)等式右边第一项表示导线外空气域的磁场储能;第二项表示导线集肤效应造成的交流电阻分量;第三项表示与导线邻近效应相关复功率,此项与外部空间磁场 $B_0 e^{j\omega t}$ 有关,且与集肤深度有关,必须对导线横截面进行精细剖分,将消耗大量的计算资源.因此,对邻近效应的有限元简化计算具有极大意义.

2.2 单股导线等效复磁导率

为减小有限元计算导线邻近效应的剖分单元数量,可基于等效复磁导率,转化为静磁场下采用相对粗糙剖分网格对高频邻近效应进行分析.假设单股导线所处的外部磁场分布均匀,导线的磁化强度为

$$M = 2 \frac{B_0 \mu_r J_1(z) - zJ_1'(z)}{\mu_0 \mu_r J_1(z) + zJ_1'(z)} \quad (12)$$

在静磁场 B_0 下,相对磁导率为 μ_r 的圆柱体磁化强度为

$$M_s = 2 \frac{B_0 \mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r + 1} \quad (13)$$

对比式(12)和式(13),当采用等效相对复磁导率 μ_r , 可将 M 改写为与 M_s 相同的表达形式, 即

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} = \frac{\mu_r J_1(z) - zJ_1'(z)}{\mu_r J_1(z) + zJ_1'(z)} \quad (14)$$

根据式(14), 得孤立圆导线的等效复磁导率为

$$\mu = \mu_r \mu_0 = \mu_r \frac{J_1(z)}{zJ_0(z) - J_1(z)} \mu_0 \quad (15)$$

结合式(11), 得空间复功率的统一表达式为

$$S = j\omega \int_{\Omega_c + \Omega_{out}} \mu |H|^2 dv + \frac{R_0 z J_0(z)}{2J_1(z)} |I|^2 \quad (16)$$

当积分区域为空气域时, μ 取为 μ_0 , 当积分区域为区域时, μ 取为等效复磁导率 μ . 根据式(16), 导线区域与邻近效应有关的抗磁性完全由 μ 表示, 此时导线区域磁化作用无需考虑集肤深度的影响, 因此可采用相对粗糙的有限元剖分网格.

2.3 利兹线等效复磁导率

利兹线由多股圆导线绞绕而成, 当利兹线采用完全绞绕时, 利兹线中每根细丝所处的外部磁场相同. 若每根细丝的相对磁导率为 μ_r , 将整个利兹线等效为具有相同磁效应且外径相同的圆导线, 根据 Ollendorff 公式^[9], 可得等效圆导线的相对磁导率为

$$\langle \mu_r \rangle = 1 + \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + 0.5(1 - \eta)(\mu_r - 1)} \quad (17)$$

其中, η 为利兹线中所有股导线的横截面积之和与等效圆导线横截面积之比. 结合式(15), 考虑每股导线的相对磁导率 $\mu_r = 1$, 可得整个利兹线的等效复磁导率为

$$\langle \mu \rangle = \langle \mu_r \rangle \mu_0 = 1 + \frac{2\eta(\frac{J_1(z)}{zJ_0(z) - J_1(z)} - 1)}{2 + (1 - \eta)(\frac{J_1(z)}{zJ_0(z) - J_1(z)} - 1)} \mu_0 \quad (18)$$

在有限元计算中, 将利兹线的磁导率设置为等效复磁导率 $\langle \mu \rangle$, 此时利兹线区域与邻近效应有关的抗磁性完全由 $\langle \mu \rangle$ 表示, 即导线区域磁化作用无需考虑集肤深度的影响, 因此对利兹线的分析可等效为对静磁场下外径相同且电流密度均匀分布的圆导线的分析. 则可采用相对粗糙的剖分网格, 提高计算效率. 在本文研究的工作频率范围内(100 Hz 到 1 MHz), 利兹线的螺距远小于电磁波的波长, 可忽略螺距对利兹线交流电阻的影响^[10].

3 有限元与电路耦合模型

在似稳电磁场下, 设源电流为 J_s , 以矢量磁位 A 为求解变量, 当采用电导率规范时, A 满足以下非齐次涡流场方程

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A - j\omega\sigma A = -J_s \quad (19)$$

采用伽辽金形式的加权余量法建立有限元离散化

方程. 在工程中, 为降低总的交流电阻, 常采用多支路利兹线并联模型. 以两支路利兹线并联为例, 如图 3, 其中 I 、 R 和 E 分别代表支路的电流、电阻以及感应电动势. 当两支路所处位置不对称时, 两者的空间磁场分布存在差异, 造成 $I_1 \neq I_2$, 此时可视为在两利兹线支路所处的回路中产生循环电流 $I_{\text{环}}$, 并对交流电阻产生贡献. 因此必须结合外部电路系统分析利兹线的交流电阻.

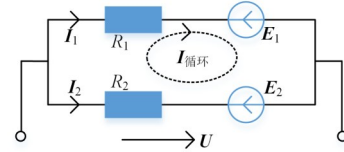


图3 两支路利兹线并联模型等效电路

每条利兹线支路所满足的电路方程为

$$I_i R_i - E_i = U \quad (20)$$

其中 $R_i = R_0 z J_0(z) / (2J_1(z))$ 表示集肤效应对应的交流电阻分量, 且 E 可由 A 表示. 综合式(19)和式(20), 可得有限元-电路耦合方程如下:

$$\begin{bmatrix} K & P \\ Q & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中, U 是由支路已知电源电压构成的矩阵, I 是由支路未知电流构成的矩阵, A 是每个节点未知矢量磁位构成的矩阵, K 和 P 是根据式(19)推导得到的矩阵, Q 和 R 是根据式(20)推导得到的矩阵. 通过求解式(21), 即可得到交流电阻 R 和空间磁场分布 ($B = \nabla \times A$).

综上, 对于利兹线的集肤效应造成的交流电阻分量, 可采用解析公式计算; 对于并联利兹线结构引起的循环电流, 可通过引入电路系统进行分析; 对于由导线的抗磁效应造成的邻近效应电阻分量, 由于邻近效应与集肤深度有关, 基于均匀化模型, 通过直接解析计算得到利兹线等效复磁导率, 将高频下的抗磁效应等效为静磁场下的导线抗磁效应, 使得我们可以在有限元中采用相对粗糙的网格, 最终实现对利兹线交流电阻的快速计算.

4 数值计算与分析

4.1 半解析有限元与传统有限元对比

为验证半解析有限元法对利兹线交流电阻的计算效率与计算精度, 采用图 4 所示的平面圆形螺旋线圈结构, 线圈包含相同的上下两层并联, 每层螺旋线圈的内径为 51 mm, 外径为 70 mm, 10 匝, 利兹线包含 150 股, 每股线径为 0.1 mm.

采用简化轴对称模型进行分析, 图 5 为图 4 对应的有限元网格剖分模型, 有限元剖分采用的是 python 中的开源库 Gmsh. 对于同样的利兹线横截面, 传统有限元法总的三角形单元达到了 17 308. 对比之下, 半解析

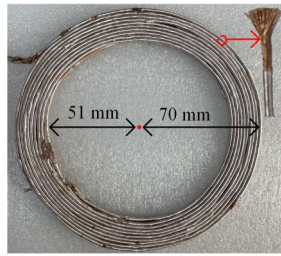


图4 双层平面圆形螺旋利兹线

有限元法对整个利兹线横截面只需 57 个三角形单元, 从而可显著降低整体模型的剖分网格数量。

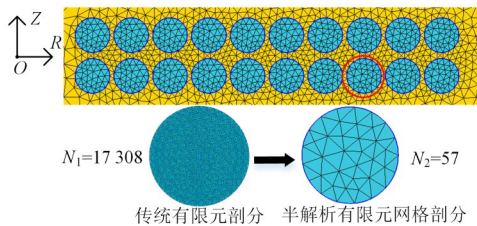


图5 双层平面圆形螺旋利兹线有限元网格剖分

在 100 Hz 到 1 MHz 的频率范围内, 基于以下三种方法得到图(4)所示利兹线的交流电阻: (1)传统有限元法; (2)半解析有限元法; (3)实测(在实验室采用 Agilent4294A 高精度阻抗分析仪测量。三种方法得到的利兹线交流电阻对比见图6。基于半解析有限元的交流电阻与基于传统有限元的交流电阻基本相同, 两者的相对偏差不超过 2%。在 100 Hz 下, 实测交流电阻为 38.8 mΩ, 当频率增加到 1 MHz 时, 交流电阻增加到了 994.1 mΩ。半解析有限元的计算结果与实测的最大相对偏差 < 8%, 说明了本文的半解析有限元法具有较好的计算精度。

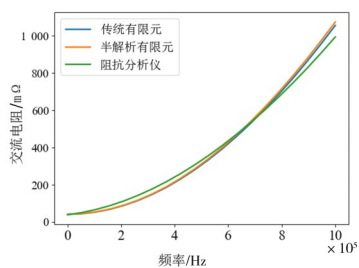


图6 不同方法得到的利兹线交流电阻对比

为了对比半解析有限元法与传统有限元法在计算效率方面的差异, 在个人笔记本上(16 GB 内存, 2.3 GHz 的四核 i5-8300H 处理器), 采用 Python 编程, 分别基于半解析有限元和传统有限元法求解平面圆形螺旋利兹线模型, 对比两种方法的计算时间随利兹线匝数的变化, 结果见图7。当线圈匝数为两匝时, 传统有限元法计算时间需要 29.9 s, 而半解析有限元法只需要 0.32 s(耗时为传统有限元的 1.1%)。随着利兹线匝数的增加, 传

统有限元的计算时间显著增加, 而半解析有限元的计算时间仍然在 1 s 以内, 体现了优良的计算效率。

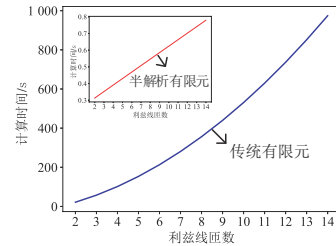


图7 半解析有限元与传统有限元计算时间对比

4.2 利兹线交流电阻成分分析

根据式(16), 分别计算集肤效应和邻近效应造成的交流电阻分量; 结合式(20), 计算循环电流造成的交流电阻分量。由于图4所示模型的两根利兹线为上下对称分布, 根据式(20), 通过两根利兹线的电流相同, 因此循环电流对交流电阻无贡献。图8展示了随着工作频率的增加, 集肤效应造成的交流电阻分量和邻近效应造成的交流电阻分量的变化情况。由于每股圆导线的线径仅为 0.1 mm, 集肤效应造成的交流电阻分量基本不变, 保持在 33 mΩ 左右。当频率较低时, 邻近效应造成的交流电阻分量可以忽略。随着工作频率的增加, 邻近效应造成的交流电阻分量迅速增加, 当频率为 1 MHz 时, 邻近效应造成的交流电阻分量达到了 1 Ω 左右。利兹线的邻近效应是造成高频下交流电阻较大的主要原因, 工程上利兹线的工作频率大多低于 1 MHz。

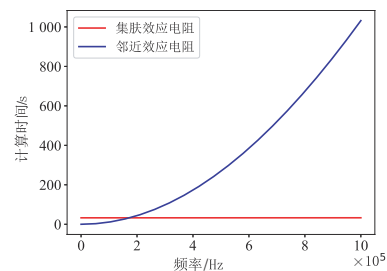


图8 平面圆形螺旋利兹线模型的交流电阻分解

4.3 螺距对空间磁场的影响

利兹线以螺距为最小重复单元。当基于均匀化方法, 采用有限元计算利兹线空间磁场时, 忽略了利兹线中每股导线扭转角(对应螺距的不同)对空间磁场的影响, 即认为利兹线中的所有股导线为并联。为探究利兹线的螺距对空间磁场的影响, 如图9(a), 以 150 股, 利兹线外径为 0.855 mm, 每股线径为 0.1 mm, 螺距为 35 mm 的利兹线元段为例, 改变利兹线的螺距, 探究螺距对利兹线产生的磁场的影响。

为高效计算考虑螺距时利兹线产生的空间磁场, 采用细丝等效模型, 即忽略利兹线中每股导线的横截

面积,将利兹线每股导线划分为若干直线电流元段,如图9(b),每根电流元段在空间产生的磁场通过毕奥-萨伐尔定律计算,整个利兹线的磁场为所有电流元段磁场的叠加。

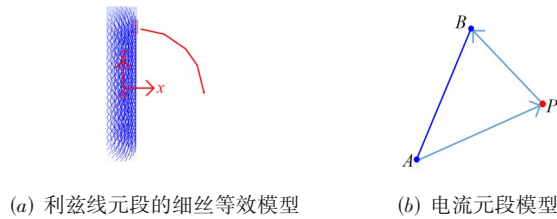


图9 考虑利兹线扭转角的磁场计算模型

以利兹线元段为中心,探测区域是径向范围为5 mm到35 mm,轴向范围为-15 mm到15 mm的矩形.图10(a)给出了螺距为35 mm下的探测区域磁场等值线分布.保持利兹线元段的总长度为35 mm,改变利兹线的螺距(50 mm、35 mm、25 mm、15 mm、10 mm),图10(b)给出了磁场强度沿径向1 mm到35 mm的变化,为了对比,同时给出了利兹线所有股导线为并联的磁场分布.根据图10(b)的结果,不同螺距下的磁场相比于平行分布下磁场的相对偏差<0.009%,因此在基于均匀化方法的有限元求解时,忽略利兹线螺距对磁场的影响是合理的。

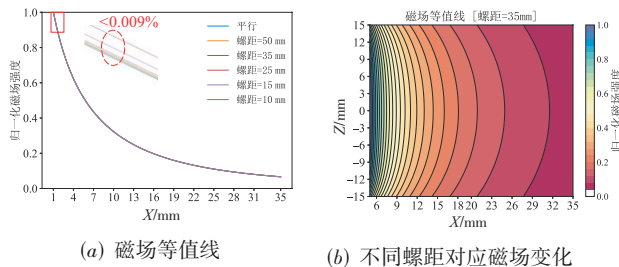


图10 磁场分布(利兹线元段的长度固定为35 mm)

5 结论

本文基于半解析有限元法,结合电路结构,并综合考虑集肤效应、邻近效应与循环电流,对电力电子、无线电能传输等工程背景下常用的利兹线交流电阻进行了高效计算.通过对利兹线采用基于等效复磁导率的均匀化技术,使得利兹线在高频下与集肤深度有关的抗磁效应与静磁场下的抗磁效应等效,此时分析邻近效应时整个利兹线横截面可视为电流密度均匀分布,且可采用相对粗糙网格剖分,大大提高了计算效率.在100 Hz到1 MHz频率范围内,理论计算与实测结果表明,本文的半解析有限元法可实现对利兹线交流电阻的快速准确计算,且计算效率显著高于传统有限元法。

利兹线的邻近效应是造成高频下交流电阻较大的主要原因.同时,螺距对利兹线空间磁场分布的影响可以忽略.本文分析方法与分析结果可为更广泛应用场景下的利兹线结构和电磁参数选型提供参考.在未来,为了更精确计算利兹线的交流电阻,还需考虑电容效应对利兹线交流电阻的影响。

参考文献

- [1] 郭仲杰,程新齐,余宁梅,等.面向超大面阵CMOS图像传感器的列总线自加速建立方法研究[J].电子学报,2023,51(6):1581-1589.
GUO Z J, CHENG X Q, YU N M, et al. Research on self-accelerated establishment method of column bus for super large array CMOS image sensor[J]. Acta Electronica Sinica, 2023, 51(6): 1581-1589. (in Chinese)
- [2] 师奕兵,罗清旺,王志刚,等.基于多元接收线圈的管道局部缺陷检测方法研究[J].电子学报,2018,46(1):197-202.
SHI Y B, LUO Q W, WANG Z G, et al. Research on the detection of local defects of pipes based on dual receivers [J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(1): 197-202. (in Chinese)
- [3] 黄平,杨理践,高松巍,等.利兹线在低频脉冲涡流检测技术中的应用[J].仪表技术与传感器,2021,(6):95-99.
HUANG P, YANG L J, GAO S W, et al. Application research of Litz wire on low frequency pulsed eddy current detection technology[J]. Instrument Technique and Sensor, 2021, (6): 95-99. (in Chinese)
- [4] LI H L, ZHANG N M, WANG S H, et al. An analytical loss model of Litz-wire windings for transformers excited by converters with winding configurations considered[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2019, 55(9): 1-5.
- [5] LYU J H, CHEN H C, ZHANG Y, et al. Litz wire and un-insulated twisted wire assessment using a multilevel PEEC method[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2022, 37(2): 2372-2381.
- [6] SULLIVAN C R, ZHANG R Y. Analytical model for effects of twisting on litz-wire losses[C]//2014 IEEE 15th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL). Piscataway: IEEE, 2014: 1-10.
- [7] HIRUMA S, OTOMO Y, IGARASHI H. Eddy current analysis of Litz wire using homogenization-based FEM in conjunction with integral equation[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(3): 1-4.
- [8] 王卫杰,胡少亮,郑宇腾,等.并行预处理有限元方法及其在系统级封装结构电磁模拟中的应用[J].电子学报,

2021, 49(1): 58-63.

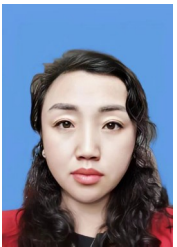
WANG W J, HU S L, ZHENG Y T. A parallel preconditioned finite element method and its applications in system-in-package electromagnetic simulations[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(1): 58-63. (in Chinese)

- [9] OLLENDORFF F. Magnetostatik der massekerne[J]. Arch Elektrotechnik, 1931, 25: 436-447.
- [10] OTOMO Y, IGARASHI H, SANO H, et al. Analysis of Litz wire losses using homogenization-based FEM[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2021, 57 (8): 1-9.

作者简介



金峰逸 男, 2002年6月出生于辽宁省兴城市. 现为辽宁工程技术大学电气与控制工程学院本科生. 研究方向为电磁场理论计算.
E-mail: 18004291118@163.com



马玉芳(通讯作者) 女, 1978年9月出生
于河北省沧州市. 现为辽宁工程技术大学电气
与控制工程学院讲师. 研究方向为电工与电子
技术、电磁场理论计算.
E-mail: lgdmyf@163.com