

# 犹豫模糊距离测度分析及其在决策层 融合识别中的应用

于 森<sup>1</sup>, 孙贵东<sup>2\*</sup>, 李双明<sup>3</sup>

(1. 中国人民解放军某部, 北京 100000; 2. 中国人民解放军 32801 部队, 北京 100082;  
3. 中国人民解放军 92941 部队, 辽宁葫芦岛 125001)

**摘要:** 现有的犹豫模糊距离测度大多数受犹豫模糊数隶属度个数延拓补值和顺序重排条件的限制, 在一定条件下导致度量结果不准确. 为此, 本文提出基于距离矩阵的犹豫模糊距离测度, 分析了现有犹豫模糊比较法则的局限性, 定义了新的全序比较法则; 提出了距离矩阵概念, 合理解释了现有犹豫模糊距离测度的不足. 结合犹豫模糊新比较法则、新提出的特征距离、前景理论和集成算子, 形成了 CDPA (Comparison, Distance, Prospect, Aggregation) 识别决策新方法, 并应用于决策层融合识别解决目标威胁判定问题. 结果表明, 该距离测度能够解决延拓补值和顺序重排的问题, 识别准确.

**关键词:** 犹豫模糊集; 矩阵距离; 比较法则; 前景理论

**基金项目:** 国家自然科学基金 (No.62001503)

**中图分类号:** TP391; O235

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112(2024)01-0181-12

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20220938

## Distance Analysis of Hesitant Fuzzy Set and Its Application in Fusion Recognition on Decision Making Level

YU Miao<sup>1</sup>, SUN Gui-dong<sup>2\*</sup>, LI Shuang-ming<sup>3</sup>

(1. Unit XXX of PLA, Beijing 100000, China; 2. Unit 32801 of PLA, Beijing 100082, China;  
3. Unit 92941 of PLA, Huludao, Liaoning 125001, China)

**Abstract:** Most of the existing distance measures for the HFS (Hesitant Fuzzy Set) and its extensions either require the length of the membership in the HFEs (Hesitant Fuzzy Elements) to be equal or need to rearrange the order, which result in error and information loss under certain circumstances. In order to solve these problems, we propose a distance measure of HFS based on distance matrix. The limitations of the existing hesitant fuzzy comparison rules are analyzed, and a new total order comparison rule is defined. The proposed distance can reasonably explain the shortcomings of the existing hesitant fuzzy distance measures. Furthermore, we explore a CDPA (Comparison, Distance, Prospect, Aggregation) method by using a new comparison law, the proposed characteristic distance measure, prospect theory notion and aggregation operators. Finally, we apply the CDPA method to the decision making level target recognition and solve a target threat judgment problem. The results show that the proposed method can liberate the length and order to obtain correct recognition.

**Key words:** hesitant fuzzy set; matrix distance measure; comparison law; prospect theory notion

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.62001503)

## 1 引言

犹豫模糊集由Torra等人<sup>[1]</sup>于2009年提出,它与直觉模糊集和模糊多重集关系紧密,也可以看成是二型模糊集的特例.犹豫模糊集的产生是因为它的隶属度不像直觉模糊集那样由误差幅度的不确定性导致,也不像二型模糊集那样由一系列离散的可能值的程度组成,而是在一些可能值之间犹豫不定.比如决策者在决策时,A认为隶属度是0.8,而B认为隶属度为0.9,则最后的决策就会在0.8和0.9之间犹豫不定.此时,就可以用犹豫模糊数表示: $h=\{0.8,0.9\}$ .犹豫模糊集产生至今尽管仅有十多年,但是得到了广泛研究,主要集中于犹豫模糊数的距离、相似度量度和集成算子等,并在多属性决策<sup>[2]</sup>、模式识别<sup>[3]</sup>和语义计算<sup>[4]</sup>等领域得到了应用.

本文主要研究犹豫模糊数的距离测度以及基于距离测度的识别决策方法.距离度量描述变量之间的接近程度,在科学研究与工程计算领域都十分重要,多数方法都要基于距离度量实施,并且在决策领域,距离度量是TOPSIS(the Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution),VIKOR(Visekriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje),TODIM(TOmada de Deciso Iterativa Multicritrio)等经典决策方法的基础,因此研究犹豫模糊数的距离测度具有现实意义.Xu等人<sup>[5,6]</sup>最先定义了犹豫模糊数的一系列基本距离计算方法,Wu等人<sup>[7]</sup>、Ali等人<sup>[8]</sup>、Zhang等人<sup>[9]</sup>和Wei等人<sup>[10]</sup>分别将Xu等人的距离拓展到区间犹豫模糊集、犹豫模糊语义标签和对偶犹豫模糊集.Farhadinia等人<sup>[11]</sup>定义了有序加权犹豫模糊集的距离度量,Liu等人<sup>[12]</sup>提出了II型广义区间犹豫模糊集的距离并基于Farhadinia等人的方法与相似度之间进行转化.但是,上述距离度量均是将Xu等人提出的基本距离拓展到犹豫模糊集的拓展样式,并没有从距离构造层面改进距离度量方法.为此,Rezaei等人<sup>[13]</sup>、Liu等人<sup>[14]</sup>、Singha等人<sup>[15]</sup>和Chen等人<sup>[16]</sup>分别从不同角度定义犹豫模糊数的犹豫度,改进了犹豫模糊距离.Farhadinia等人<sup>[17]</sup>、Yang等人<sup>[18]</sup>和Zhao等人<sup>[19]</sup>则分别基于Hausdorff距离、兼容距离和一些常用方程,改进了犹豫模糊语义标签的距离度量.Ren等人<sup>[20]</sup>则考虑了隶属度和非隶属度的均值,定义了对偶犹豫模糊集的距离.Hu等人<sup>[21]</sup>定义了犹豫模糊数的区间表示方法进行距离与相似度量.尽管上述方法给出了犹豫模糊集的度量方法,但是上述方法均存在两点不足之处:一是均假设对应的犹豫模糊数中的隶属度个数相等,如果个数不等则利用各种延拓补值方法将其补齐至相等,而延拓补值必然引入无关误差;二是犹豫模糊数中的隶属度按照降序或升序排列.这两点假设是有条件的,无疑限制了这些距离在

某些情况下的应用.为此,现有研究也提出了相应的改进措施.Zhang等人<sup>[22]</sup>基于最小公倍数的思想定义犹豫模糊距离,但是这种方法将原来的隶属度延拓到了最小公倍数的长度,引入更多的误差.Zhang等人<sup>[23]</sup>定义了典型犹豫模糊集的模糊熵距离,尽管不需要隶属度个数相等,但是仅计算了犹豫模糊数中较短隶属度对应的距离,没有考虑其余隶属度值,会造成度量不充分.Farhadinia等人<sup>[24]</sup>通过改进Hausdorff距离定义了犹豫模糊距离,不需要对隶属度进行延拓.Meng等人<sup>[25]</sup>、Wang等人<sup>[26]</sup>和Zhou等人<sup>[27]</sup>借鉴了Hausdorff距离的思想,通过利用犹豫模糊数之间距离对的最小值形成的序列均值,定义了一系列犹豫模糊与犹豫模糊标签距离,但是这种Hausdorff类距离仅利用犹豫模糊数距离对中的最大值、最小值或均值定义距离而忽略了其他值,同样会造成度量不充分.Peng等人<sup>[28]</sup>通过定义所有犹豫模糊数距离对绝对值的均值作为犹豫模糊距离,然而这种方法只是在一定程度上缓解了现有犹豫模糊距离遇到的问题,但是仍存在不足,特别是对应的两个犹豫模糊数相等时,Peng等人的方法计算的距离不为0.除此之外,Zhang等人<sup>[29]</sup>利用定义的犹豫模糊距离集来定义犹豫模糊距离,但是仅利用距离集的势表示距离,存在不合理之处.Chen等人<sup>[30]</sup>利用对应犹豫模糊数的均值与标准差定义犹豫模糊距离,但是当犹豫模糊的均值与标准差均相等时,此类距离则无法进一步区分犹豫模糊数.

尽管上述犹豫模糊距离在一定条件下实现了犹豫模糊度量,但是这些距离或是需要延拓补值和重排序,或是为距离对中的部分值距离,又或是利用1~2个犹豫模糊特征表示距离,在某些情况下会度量失效.为此,为解决犹豫模糊距离存在的不足,本文重点探寻了犹豫模糊新的距离度量方法,定义了新的犹豫模糊距离测度进行犹豫模糊数的识别.首先,分析了现有犹豫模糊比较法则,基于模糊度定义了新的比较法则;其次,分析犹豫模糊现有距离的局限,基于距离矩阵提出矩阵距离,解决延拓补值和顺序重排的问题;除此之外,为解决犹豫模糊多属性识别决策判定问题,结合犹豫模糊新比较法则、新的距离测度、前景理论和集成算子,拓展了现有的TODIM方法,提出了CDPA(Comparison, Distance, Prospect, Aggregation)的识别决策新方法.最后,将所提出的犹豫模糊距离测度与CDPA的识别决策新方法应用于决策层多属性目标威胁识别判定场景,验证其普适性.

## 2 理论基础

### 2.1 犹豫模糊数比较法则

在模糊识别和决策的实际应用中,犹豫模糊数的

比较法则起着重要作用. Xia 等人<sup>[31]</sup>首次定义了犹豫模糊数的计分函数对其进行比较.

对于犹豫模糊数  $h = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots, \gamma_{l_h}\}$ , 其计分函数记为

$$s(h) = \frac{1}{l_h} \sum_{k=1}^{l_h} \gamma_k \tag{1}$$

其中,  $l_h$  为犹豫模糊数  $h$  中的隶属度个数.

其比较法则描述如下.

对于犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$ :

(1) 如果  $s(h_A) > s(h_B)$ , 则  $h_A > h_B$ .

(2) 如果  $s(h_A) = s(h_B)$ , 则  $h_A = h_B$ .

然而, 在许多情况下, 仅依靠计分函数不能够很好地区分犹豫模糊数. 为此, Chen 等人<sup>[32]</sup>分别基于犹豫模糊数的方差和偏离度的概念改进了犹豫模糊数的比较法则.

对于犹豫模糊数  $h = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots, \gamma_{l_h}\}$ , 其方差函数记为

$$v(h) = \frac{1}{l_h} \sqrt{\sum_{\gamma_{k_1}, \gamma_{k_2} \in h} (\gamma_{k_1} - \gamma_{k_2})^2} \tag{2}$$

基于方差函数, 其比较法则描述如下.

对于犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$ :

(1) 如果  $s(h_A) > s(h_B)$ , 则  $h_A > h_B$ .

(2) 如果  $s(h_A) = s(h_B)$ , 则进一步比较其方差函数. 如果  $v(h_A) > v(h_B)$ , 则  $h_A < h_B$ ; 如果  $v(h_A) = v(h_B)$ , 则  $h_A = h_B$ .

对于犹豫模糊数  $h = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots, \gamma_{l_h}\}$ , 其偏离度函数记为

$$\sigma(h) = \frac{1}{l_h} \sqrt{\sum_{k=1}^{l_h} [\gamma_k - s(h)]^2} = \frac{1}{l_h} \sqrt{\sum_{k=1}^{l_h} \left[ \gamma_k - \frac{1}{l_h} \sum_{k=1}^{l_h} \gamma_k \right]^2} \tag{3}$$

基于偏离度函数, 其比较法则描述如下.

对于犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$ :

(1) 如果  $s(h_A) > s(h_B)$ , 则  $h_A > h_B$ .

(2) 如果  $s(h_A) = s(h_B)$ , 则进一步比较其偏离度函数. 如果  $\sigma(h_A) > \sigma(h_B)$ , 则  $h_A < h_B$ ; 如果  $\sigma(h_A) = \sigma(h_B)$ , 则  $h_A = h_B$ .

## 2.2 犹豫模糊数距离度量

自 Xu 等人<sup>[5,6]</sup>首次定义犹豫模糊距离以来, 许多学者提出了多样化的距离度量表达式, 本节仅给出常用的犹豫模糊基本距离, 在第 4.2 节将详细论述分析现有的犹豫模糊距离.

记论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的犹豫模糊集  $A, B$  和  $O$ , 称  $d(A, B)$  为  $A$  和  $B$  之间的犹豫模糊距离, 若满足

(1) 非负性:  $0 \leq d(A, B) \leq 1$ , 当且仅当  $A = B$  时

$d(A, B) = 0$ .

(2) 对称性:  $d(A, B) = d(B, A)$ .

(3) 三角不等式:  $d(A, B) \leq d(A, O) + d(O, B)$ .

几个常用的犹豫模糊基本距离如下.

(1) 归一化的犹豫模糊 Hamming 距离为

$$d_{\text{hnh}}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{l_{A_i}} \sum_{j=1}^{l_{A_i}} |\gamma_{A_i}^{\sigma(j)} - \gamma_{B_i}^{\sigma(j)}| \right] \tag{4}$$

(2) 归一化的犹豫模糊 Euclidean 距离为

$$d_{\text{hnc}}(A, B) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{l_{A_i}} \sum_{j=1}^{l_{A_i}} |\gamma_{A_i}^{\sigma(j)} - \gamma_{B_i}^{\sigma(j)}|^2 \right) \right]^{1/2} \tag{5}$$

(3) 归一化的犹豫模糊 Minkowski 距离为

$$d_{\text{ghn}}(A, B) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{l_{A_i}} \sum_{j=1}^{l_{A_i}} |\gamma_{A_i}^{\sigma(j)} - \gamma_{B_i}^{\sigma(j)}|^\lambda \right) \right]^{1/\lambda}, \lambda > 0 \tag{6}$$

(4) 归一化的犹豫模糊 Hausdorff 距离为

$$d_{\text{ghnh}}(A, B) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_j |\gamma_{A_i}^{\sigma(j)} - \gamma_{B_i}^{\sigma(j)}|^\lambda \right]^{1/\lambda}, \lambda > 0 \tag{7}$$

式(4)~(7)中,  $l_{A_i} = l_{B_i}$ ,  $\gamma_{A_i}^{\sigma(j)}$  和  $\gamma_{B_i}^{\sigma(j)}$  分别为犹豫模糊数  $h_A(x_i)$  和  $h_B(x_i)$  中第  $j$  大的数值. 现有大多数距离主要是基于上述 4 种距离的改进和组合, 不再赘述.

通过上述距离的表达式发现, 以上距离主要基于两个假设:

(1) 对应的犹豫模糊数之间的隶属度个数相等;

(2) 犹豫模糊数中的隶属度大小降序排列.

现有方法中, 大多数采用“如果对应的犹豫模糊数之间的隶属度个数不相等, 需要首先利用乐观法或者悲观法等延拓方法将其补齐至相等”的原则, 延拓方法的选择主要取决于决策者的偏好. 因此, 此类距离度量必然会引入人为误差, 造成度量的不准确性. 所以, 本文重点解决犹豫模糊数中隶属度个数不相等的距离度量问题, 提出一种不需采用延拓补值的犹豫模糊距离度量方法.

## 2.3 TODIM 决策方法

TODIM 是基于前景理论建立的多属性决策方法, 描述比较方案之间的优势度. 通过对所有决策方案互相比较, 建立方案之间的优势度, 进而得到某方案相对于其他方案的总体优势度, 通过对总体优势度排序进行决策判定. 本质上, TODIM 的核心在于基于各方案之间距离度量建立优势度, 其具体步骤描述如下.

假设  $m$  类待识别方案  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , 每类方案具有  $n$  类属性信息  $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$ , 对应的属性权重为  $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , 满足  $0 \leq w_j \leq 1, \sum_{j=1}^n w_j = 1$ . 记方案  $A_i$  在属性  $C_j$  上的属性值为  $x_{ij}$ , 则所有方案的属性值可以用决

策矩阵  $X = [x_{ij}]_{m \times n}$  表示.

**步骤 1** 如果属性值自身携带物理量纲,需要对其进行规范化处理,记决策矩阵  $X = [x_{ij}]_{m \times n}$  经规范化后变为  $Q = [q_{ij}]_{m \times n}$

**步骤 2** 按式(8)计算属性  $C_j$  相对于参考属性  $C_r$  的相对权重.

$$w_{jr} = \frac{w_j}{w_r}, w_r = \max_j w_j \quad (8)$$

**步骤 3** 计算每类方案  $A_i (i=1, 2, \dots, m)$  在各属性  $C_j (j=1, 2, \dots, n)$  上优于其他方案  $A_k$  的优势度,形成优势度矩阵  $\Phi_j = [\Phi_{ik}^j]_{m \times m}$ , 其中,  $\Phi_{ik}^j$  为方案之间的优势度,

$$\Phi_{ik}^j = \begin{cases} \sqrt{w_{jr}(r_{ij} - r_{kj}) / \sum_{j=1}^n w_{jr}}, & \text{if } r_{ij} > r_{kj} \\ 0, & \text{if } r_{ij} = r_{kj} \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{\sum_{j=1}^n w_{jr}(r_{kj} - r_{ij}) / w_{jr}}, & \text{if } r_{ij} < r_{kj} \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $\theta$  为损失衰退参数.

**步骤 4** 基于优势度矩阵计算得到方案  $A_i$  相对于方案  $A_k$  在各属性上的总体优势度为

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^n \Phi_{ik}^j \quad (10)$$

**步骤 5** 按下式计算每类方案的全局前景值:

$$\eta_i = \frac{\sum_{k=1}^m \delta_{ik} - \min_i \left\{ \sum_{k=1}^m \delta_{ik} \right\}}{\max_i \left\{ \sum_{k=1}^m \delta_{ik} \right\} - \min_i \left\{ \sum_{k=1}^m \delta_{ik} \right\}} \quad (11)$$

**步骤 6** 对全局前景值  $\eta_i$  进行降序排列,判定决策方案为最大全局前景值对应的方案.

通过 TODIM 的步骤得知,其核心在于方案之间优势度建立,现有的改进型 TODIM 方法改进工作主要在两方面:一是将传统属性描述值拓展到多元数据表示样式;二是改进优势度建立时各类数据间的距离度量.本文主要基于犹豫模糊数数据样式和所提出的犹豫模糊新距离度量测度对其进行改进.

### 3 犹豫模糊数比较法则

第 2.1 节总结了 3 种犹豫模糊数的比较法则,在实际的犹豫模糊多属性决策应用中,上述比较法则往往会呈现不合理的结果.为此,本节首先分析现有犹豫模糊数比较法则的局限性,在此基础上提出新的比较法则.

#### 3.1 犹豫模糊数比较法则局限分析

Xia 等人<sup>[31]</sup>利用计分函数比较犹豫模糊数,当犹豫模糊数的计分函数相等时,无法比较犹豫模糊数的大

小.比如犹豫模糊数  $h_1 = \{0.3, 0.5\}$ ,  $h_2 = \{0.1, 0.5, 0.6\}$ , 其计分函数均为  $s(h_1) = s(h_2) = 0.4$ , 此时仅利用计分函数则会得到  $h_1 = h_2$ , 与实际不符.

Chen 等人<sup>[32]</sup>分别在计分函数的基础上,基于方差和偏离度比较犹豫模糊数.然而,当犹豫模糊数之间的计分函数与偏离度或者计分函数与方差相等时,依然无法对其进行比较,举两个反例进行说明.

假设两犹豫模糊数分别为  $h_1 = \{0.2, 0.3, 0.4\}$ ,  $h_2 = \left\{ 0.3 - \frac{\sqrt{0.06}}{6}, 0.3 + \frac{\sqrt{0.06}}{6} \right\}$ .

计算得到其计分函数和偏离度函数分别为

$$s(h_1) = s(h_2) = 0.3, \sigma(h_1) = \sigma(h_2) = \frac{\sqrt{0.06}}{3}.$$

此外,假设两犹豫模糊数分别为

$$h_1 = \{0.2, 0.3, 0.4\}, h_2 = \left\{ 0.3 - \sqrt{\frac{0.02}{3}}, 0.3 + \sqrt{\frac{0.02}{3}} \right\}.$$

计算得到其计分函数和方差函数分别为

$$s(h_1) = s(h_2) = 0.3, v(h_1) = v(h_2) = \sqrt{\frac{0.02}{3}}.$$

此时,如果分别用 Chen 等人<sup>[32]</sup>方法中的计分函数和偏离度函数或方差进行比较,则会得到  $h_1 = h_2$ , 与实际不符.

通过上述比较法则的分析得知,这几种比较法则或多或少存在局限性,它们仅仅为犹豫模糊数比较的一种偏序关系,而非全序关系.

Zhang 等人<sup>[33]</sup>提出了一种测量函数对上述比较法则进行改进,声称作为一种全序关系.

记犹豫模糊数  $h = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n\}$ ,  $h$  的测量函数定义为

$$Z_\delta(h) = \left( \frac{\sum_{i=1}^{l(h)} (\gamma_i)^\delta}{l(h)} \right)^{\frac{1}{\delta}} \quad (12)$$

其中,  $l(h)$  为  $h$  中的隶属度个数;  $\delta$  为决策者的偏好参数,  $0 < \delta \leq 1$ .

然而,经研究发现此测量函数在某些情况下也存在不合理性.

假设  $h_1 = \{0.16, 0.25\}$ ,  $h_2 = \{0.09, 0.36\}$ ,  $\delta = 0.5$ , 此时计算得到  $h_1$  和  $h_2$  的测量函数均为  $Z_\delta(h_1) = Z_\delta(h_2) = \sqrt{0.45}$ , 如果利用 Zhang 等人<sup>[33]</sup>提出的测量函数对  $h_1$  和  $h_2$  进行比较,得到  $h_1 = h_2$ , 依然与实际不符.除此之外,如果  $h_1 = \{0.01, 0.81\}$ ,  $h_2 = \{0.09, 0.64\}$ ,  $\delta = 0.5$ , 利用 Zhang 等人<sup>[33]</sup>提出的测量函数比较  $h_1$  和  $h_2$ , 会得到  $h_1 < h_2$  与直觉不符的结果,实际上  $h_1 > h_2$ . 主要原因在于测量函数不是一个线性变换关系,测量函数的大小比较,

不能同步映射到其所比较的犹豫模糊数的大小比较上.

### 3.2 新的犹豫模糊数比较法则定义

通过第 3.1 节的分析得知,现有的犹豫模糊数比较法则一定程度上存在不合理之处,在有些情况下无法很好地将犹豫模糊数区分.为此,研究一种新的犹豫模糊数比较法则非常必要.本节通过模拟决策者在犹豫模糊数赋值过程中的心理活动提出一种新的犹豫模糊数比较法则.

当决策者对决策方案进行隶属度赋值时,往往根据自身已储备的知识和认知能力进行判断.因此,决策者给出的隶属度数值本身也蕴含着其认知信息,比如隶属度数值 0.5 是公认的最模糊和不确定的数值.如果决策者对方案的优劣十分确定,会给出一个远离 0.5 的相对确定的数值,而如果对方案的优劣不确定,此时则会给出数值靠近 0.5 的隶属度.这说明了隶属度数值 0.5 可以描述决策者在赋值时的模糊性,可以称之为全模糊数值.因此,在新的犹豫模糊数的比较法则定义时考虑其模糊性,通过判断隶属度数值的模糊性对其进行比较.

比如犹豫模糊数  $h_1 = \{0.4, 0.5\}$ ,  $h_2 = \{0.2, 0.7\}$ , 尽管其计分函数相等,但是显然  $h_1$  的模糊性要比  $h_2$  要大.因此,可以将全模糊数值 0.5 作为衡量隶属度数值的标尺,定义犹豫模糊数的隶属度模糊度的概念,与计分函数、方差和偏离度函数等共同比较犹豫模糊数.

记犹豫模糊数  $h = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n\}$ , 其隶属度  $\gamma_i$  的模糊度定义为

$$f(\gamma_i) = 1 - 2|\gamma_i - 0.5| \quad (13)$$

则可以得到  $h$  中所有隶属度的模糊度,称之为犹豫模糊数的模糊度,为一新的犹豫模糊数  $\{f(\gamma_i), i = 1, 2, \dots, l(h)\}$ . 定义该模糊度犹豫模糊数的均值和方差分别为

$$s(f) = \frac{1}{n} \sum_{\gamma_i \in h} f(\gamma_i) = \frac{1}{n} \sum_{\gamma_i \in h} (1 - 2|\gamma_i - 0.5|) \quad (14)$$

$$v(f) = \frac{1}{n} \sum_{\gamma_i \in h} (\gamma_i - s(f))^2 \quad (15)$$

通过模糊度的定义得知,如果犹豫模糊数的模糊度越大,则其描述的信息越不确定,此时对应的犹豫模糊数应该越小,这与直觉是一致的.因此,在计分函数、方差或偏离度函数的基础上,增加模糊度的比较,提出新的犹豫模糊数比较法则,其流程如图 1 所示.

对于犹豫模糊数  $h_1$  和  $h_2$ , 其模糊度分别为  $f_1 = \{f_1(\gamma_i), i = 1, 2, \dots, l(h_1)\}$  和  $f_2 = \{f_2(\gamma_i), i = 1, 2, \dots, l(h_2)\}$ :

(1) 如果计分函数  $s(h_1) > s(h_2)$ , 则  $h_1 > h_2$ .

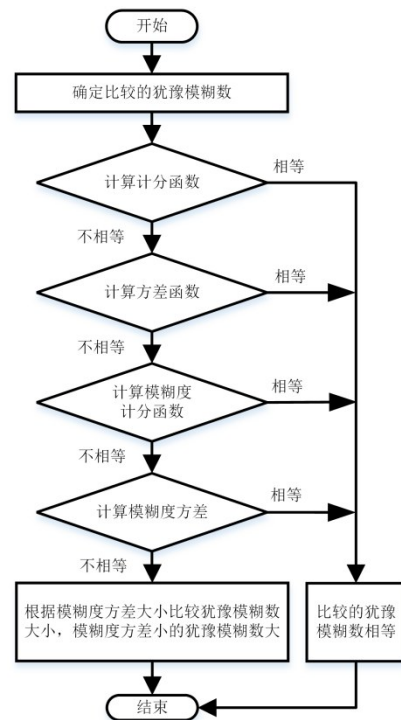


图 1 新的犹豫模糊数比较法则流程

(2) 如果  $s(h_1) = s(h_2)$ , 则进一步比较其方差函数, 如果  $v(f_1) < v(f_2)$ , 则  $h_1 > h_2$ .

(3) 如果  $v(f_1) = v(f_2)$ , 则继续比较其模糊度函数, 如果模糊度计分函数  $s(f_1) < s(f_2)$ , 则  $h_1 > h_2$ .

(4) 如果模糊度计分函数  $s(f_1) = s(f_2)$ , 则继续比较模糊度方差. 如果模糊度方差  $v(f_1) < v(f_2)$ , 则  $h_1 > h_2$ ; 如果模糊度方差  $v(f_1) = v(f_2)$ , 则  $h_1 = h_2$ .

根据新的比较法则比较 3.1 节中的  $h_1 = \{0.2, 0.3, 0.4\}$ ,  $h_2 = \left\{0.3 - \sqrt{\frac{0.02}{3}}, 0.3 + \sqrt{\frac{0.02}{3}}\right\}$ , 计算模糊度犹豫模糊数的均值和方差分别为  $s(f_1) = s(f_2) = 0.6$ ,  $v(f_1) = 0.1155$ ,  $v(f_2) = 0.04$ , 根据新的比较法则, 得到  $h_1 < h_2$ .

因此, 新的犹豫模糊数的比较法则在现有比较法则分不清犹豫模糊数大小关系时, 提供了一种可比较的方法.

## 4 犹豫模糊数距离

### 4.1 基于距离矩阵的犹豫模糊数距离构造

为了构造新的犹豫模糊距离, 首先定义距离矩阵的概念. 距离矩阵是由犹豫模糊数之间各自隶属度两两度量形成的成对的隶属度距离对组成.

记两个犹豫模糊数分别为  $h_A = \{\gamma_{A1}, \gamma_{A2}, \dots, \gamma_{Ai}, \dots, \gamma_{Al(h_A)}\}$  和  $h_B = \{\gamma_{B1}, \gamma_{B2}, \dots, \gamma_{Bj}, \dots, \gamma_{Bl(h_B)}\}$ ,  $l(h_A)$  和  $l(h_B)$  分别为  $h_A$

和  $h_B$  中隶属度的个数,  $l(h_A) \neq l(h_B)$  是允许的, 则  $h_A$  和  $h_B$

$$D_{AB} = \begin{matrix} & \gamma_{B1} & \gamma_{B2} & \cdots & \gamma_{Bj} & \cdots & \gamma_{Bl(h_B)} \\ \begin{matrix} \gamma_{A1} \\ \gamma_{A2} \\ \vdots \\ \gamma_{Ai} \\ \vdots \\ \gamma_{Al(h_A)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \text{pd}(\gamma_{A1}, \gamma_{B1}) & \text{pd}(\gamma_{A1}, \gamma_{B2}) & \cdots & \text{pd}(\gamma_{A1}, \gamma_{Bj}) & \cdots & \text{pd}(\gamma_{A1}, \gamma_{Bl(h_B)}) \\ \text{pd}(\gamma_{A2}, \gamma_{B1}) & \text{pd}(\gamma_{A2}, \gamma_{B2}) & & & & \text{pd}(\gamma_{A2}, \gamma_{Bl(h_B)}) \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \text{pd}(\gamma_{Ai}, \gamma_{B1}) & & & \text{pd}(\gamma_{Ai}, \gamma_{Bj}) & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \text{pd}(\gamma_{Al(h_A)}, \gamma_{B1}) & \text{pd}(\gamma_{Al(h_A)}, \gamma_{B2}) & \cdots & \text{pd}(\gamma_{Al(h_A)}, \gamma_{Bj}) & \cdots & \text{pd}(\gamma_{Al(h_A)}, \gamma_{Bl(h_B)}) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (16)$$

其中,  $\text{pd}(\gamma_{Ai}, \gamma_{Bj})$  为隶属度  $\gamma_{Ai}$  和  $\gamma_{Bj}$  之间的两两比较的隶属度距离对,

$$\text{pd}(\gamma_{Ai}, \gamma_{Bj}) = \gamma_{Ai} - \gamma_{Bj} \quad (17)$$

基于上述距离矩阵, 犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$  之间的距离可以定义为

$$d(h_A, h_B) = \left| \frac{1}{l(h_A) \cdot l(h_B)} \sum_{i=1}^{l(h_A)} \sum_{j=1}^{l(h_B)} (\gamma_{Ai} - \gamma_{Bj}) \right| \quad (18)$$

通过上式可知, 基于距离矩阵在计算犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$  之间的距离时并没有考虑隶属度的长度和顺序问题, 即使隶属个数不一致, 顺序没有降序排列, 通过距离矩阵计算, 无需对其进行延拓和重排序, 能够完全保持犹豫模糊数原始信息, 避免了人为误差的引入, 本文将此距离称为犹豫模糊矩阵距离.

通过分析可知, 犹豫模糊矩阵距离可进一步简化为计分函数之差

$$d(h_A, h_B) = |s(h_A) - s(h_B)| \quad (19)$$

证明:

$$\begin{aligned} d(h_A, h_B) &= \left| \frac{1}{l(h_A) \cdot l(h_B)} \sum_{i=1}^{l(h_A)} \sum_{j=1}^{l(h_B)} (\gamma_{Ai} - \gamma_{Bj}) \right| \\ &= \left| \frac{1}{l(h_A) \cdot l(h_B)} \left( \sum_{i=1}^{l(h_A)} \sum_{j=1}^{l(h_B)} \gamma_{Ai} - \sum_{i=1}^{l(h_A)} \sum_{j=1}^{l(h_B)} \gamma_{Bj} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{l(h_A) \cdot l(h_B)} \left( l(h_B) \sum_{i=1}^{l(h_A)} \gamma_{Ai} - l(h_A) \sum_{j=1}^{l(h_B)} \gamma_{Bj} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{l(h_A)} \sum_{i=1}^{l(h_A)} \gamma_{Ai} - \frac{1}{l(h_B)} \sum_{j=1}^{l(h_B)} \gamma_{Bj} \right| \\ &= |s(h_A) - s(h_B)| \end{aligned}$$

证毕.

#### 4.2 犹豫模糊矩阵距离分析

广义上讲, 所有集合之间的距离都可以用距离矩阵的样式解释. 如果集合间的数值个数相等, 则现有的各种 Minkowski 式距离及其特殊形式 Manhattan 和 Euclidean 距离等, 为距离矩阵中对角线元素的均值构成的距离样式. 如果集合间的数值个数不相等, 则现有的距离可分为两种: 需要延拓和不需要延拓的距离.

之间的距离矩阵定义为

如果采用延拓的方法, 将数值较短个数补齐至与数值较长个数一致, 则形成的距离仍然由延拓后的距离矩阵中对角线元素的均值构成, 比如现有文献[5, 7, 9~14, 19~21, 23, 34~36]中的各种基于延拓方法的犹豫模糊距离. 除此之外, 文献[22]基于最小公倍数的思想将所对比的集合均进行数值延拓至其最小公倍数, 此时得到的距离仍为延拓后的距离矩阵中对角线元素的均值, 并且此种方法加入了更多无关的数值, 导致计算误差更大. 另外, 无需延拓的方法, 依然可以用距离矩阵解释. 文献[17, 24]中采用的 Hausdorff 距离度量实际上仅仅为距离矩阵中各行或各列中的最小值组成数值中的最大值构成. 而文献[25, 26]中采用距离矩阵中各行和各列中的最小值组成数值的均值构造新距离. 上述方法仅仅利用了距离矩阵中的部分距离对进行距离构造, 或是对角线数值, 或是各行各列最小值组成数值中的最大值或均值等, 实际上为部分距离.

除此之外, 文献[28]也采用距离矩阵的思想, 利用其中两两比较的隶属度距离对的绝对值进行距离构造, 计算所有距离对绝对值的均值作为新距离. 但是利用隶属度距离对的绝对值定义的距离在某些情况下也存在不足. 在利用距离矩阵进行距离定义时, 应该利用隶属度距离对  $\gamma_{Ai} - \gamma_{Bj}$  表示隶属度  $\gamma_{Ai}$  和  $\gamma_{Bj}$  之间的距离而不是其绝对值距离对  $|\gamma_{Ai} - \gamma_{Bj}|$ , 主要是  $\gamma_{Ai} - \gamma_{Bj}$  不仅能够反映隶属度  $\gamma_{Ai}$  和  $\gamma_{Bj}$  之间的接近程度, 还能够反映  $\gamma_{Ai}$  和  $\gamma_{Bj}$  之间的相对比较关系, 即如果  $d(\gamma_{Ai}, \gamma_{Bj}) = 0$ , 则  $\gamma_{Ai} = \gamma_{Bj}$ , 如果  $d(\gamma_{Ai}, \gamma_{Bj}) < 0$ , 则  $\gamma_{Ai} < \gamma_{Bj}$ , 如果  $d(\gamma_{Ai}, \gamma_{Bj}) > 0$ , 则  $\gamma_{Ai} > \gamma_{Bj}$ . 如果利用文献[28]中的绝对值距离  $|\gamma_{Ai} - \gamma_{Bj}|$ , 则不能够反映相对比较关系, 并且在计算所有绝对值距离对  $|\gamma_{Ai} - \gamma_{Bj}|$  的均值作为新距离时, 有时会出现不符实际的结果. 比如对于两个完全相同的犹豫模糊数  $\{0.3, 0.5, 0.6\}$  和  $\{0.3, 0.5, 0.6\}$ , 显然它们之间的距离为 0. 但是利用绝对值距离对  $|\gamma_{Ai} - \gamma_{Bj}|$  进行计算, 则得到的

$$\text{距离矩阵为} \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \text{继续计算距离矩阵中所有}$$

元素的均值,得到犹豫模糊数之间的距离为  $\left| \frac{0.2+0.3+0.2+0.1+0.3+0.1}{9} \right| = \frac{2}{15}$ ,与实际不符.而

利用隶属度距离对  $\gamma_{A_i} - \gamma_{B_j}$  计算,得到的距离矩阵为  $\begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.3 \\ 0.2 & 0 & -0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$ ,所有元素的均值组成的犹豫模糊数

距离为  $\left| \frac{0}{9} \right| = 0$ ,与实际相符.因此,本文提出的基于距

离矩阵的犹豫模糊数度量方法相对现有方法,在犹豫模糊数的长度和顺序不用特定处理时,也能够较好地计算其距离.

实际上,尽管在计算过程中,不必考虑隶属度和顺序问题,但是从更广义研究的角度,如果存在顺序权重时,比如 OWA (Ordered Weighted Averaging) 算子,则初始的犹豫模糊数距离被拓展为 OWA-based 的犹豫模糊数距离,即

$$d_{\text{OWA}}(h_A, h_B) = \left| \sum_{i=1}^{l(h_A)} \sum_{j=1}^{l(h_B)} \omega_{A\sigma(i)} \cdot \omega_{B\sigma(j)} (\gamma_{A\sigma(i)} - \gamma_{B\sigma(j)}) \right| \quad (20)$$

$$= \left| \omega_A^T \cdot \mathbf{D}_{AB} \cdot \omega_B \right|$$

其中,  $\sigma: (1, 2, \dots, n) \rightarrow (1, 2, \dots, n)$  为隶属度顺序排列;  $\gamma_{A\sigma(i)} \geq \gamma_{A\sigma(i+1)}$ ,  $\gamma_{B\sigma(j)} \geq \gamma_{B\sigma(j+1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l(h_A)$ ,  $j = 1, 2, \dots, l(h_B)$ ;  $h_A$  和  $h_B$  所对应的顺序权重分别为  $\omega_A = [\omega_{A\sigma(1)}, \omega_{A\sigma(2)}, \dots, \omega_{A\sigma(i)}, \dots, \omega_{A\sigma(l(h_A))}]^T$  和  $\omega_B = [\omega_{B\sigma(1)}, \omega_{B\sigma(2)}, \dots, \omega_{B\sigma(j)}, \dots, \omega_{B\sigma(l(h_B))}]^T$ , 满足  $\sum_{i=1}^{l(h_A)} \omega_{A\sigma(i)} = 1$  和  $\sum_{j=1}^{l(h_B)} \omega_{B\sigma(j)} = 1$ .

基于上述 OWA-based 的犹豫模糊数距离,同样从广义的角度考虑,可以将初始的犹豫模糊数距离拓展为 WA-based 的犹豫模糊数距离,即

$$d_{\text{WA}}(h_A, h_B) = \left| \sum_{i=1}^{l(h_A)} \sum_{j=1}^{l(h_B)} w_{A_i} \cdot w_{B_j} (\gamma_{A_i} - \gamma_{B_j}) \right| \quad (21)$$

$$= \left| \mathbf{w}_A^T \cdot \mathbf{D}_{AB} \cdot \mathbf{w}_B \right|$$

其中,  $\mathbf{w}_A = [w_{A_1}, w_{A_2}, \dots, w_{A_i}, \dots, w_{A_{l(h_A)}}]^T$  和  $\mathbf{w}_B = [w_{B_1}, w_{B_2}, \dots, w_{B_j}, \dots, w_{B_{l(h_B)}}]^T$  为所对应的犹豫模糊数隶属度  $\gamma_{A_i}$  和  $\gamma_{B_j}$  的权重,满足  $\sum_{i=1}^{l(h_A)} w_{A_i} = 1$  和  $\sum_{j=1}^{l(h_B)} w_{B_j} = 1$ . 本质上,WA-based 的犹豫模糊数距离也可以看成是隶属度自身携带概率,即概率犹豫模糊数之间的距离.

### 4.3 改进的犹豫模糊特征距离

由于犹豫模糊矩阵距离仅为为计分函数之差,为此综合犹豫模糊数聚集性、离散性、一致性和模糊性 4 种参数基础上,定义犹豫模糊数的 4 种特征参数距离.

犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$  之间的聚集距离等价于矩阵距离为计分函数之差:

$$d_M(h_A, h_B) = |s(h_A) - s(h_B)| \quad (22)$$

犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$  之间的离散距离为  $h_A$  和  $h_B$  的标准差之间的距离:

$$d_D(h_A, h_B) = |\text{std}(h_A) - \text{std}(h_B)| \quad (23)$$

其中,  $h_A$  和  $h_B$  的标准差分别为

$$\text{std}(h_A) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{l(h_A)} (\gamma_{A_i} - s(h_A))^2}{l(h_A)}} \quad \text{和} \quad \text{std}(h_B) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{l(h_B)} (\gamma_{B_j} - s(h_B))^2}{l(h_B)}}.$$

犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$  之间的一致距离为  $h_A$  和  $h_B$  的一致度之间的距离:

$$d_C(h_A, h_B) = |c(h_A) - c(h_B)| \quad (24)$$

其中,犹豫模糊数  $h$  的一致性用一致度表示:

$$c(h) = \frac{1}{l(h)} \quad (25)$$

其中,  $l(h)$  为犹豫模糊数  $h$  中隶属度的个数.

犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$  之间的模糊距离,为其模糊度犹豫模糊数之间的均值距离,记为

$$d_F(h_A, h_B) = |s(\{f(\gamma_{A_i})\}) - s(\{f(\gamma_{B_j})\})|$$

$$= \left| \frac{1}{l(h_A)} \sum_{i=1}^{l(h_A)} (1 - 2|\gamma_{A_i} - 0.5|) - \frac{1}{l(h_B)} \sum_{j=1}^{l(h_B)} (1 - 2|\gamma_{B_j} - 0.5|) \right| \quad (26)$$

基于上述 4 种基本的犹豫模糊特征参数距离,集成得到犹豫模糊数  $h_A$  和  $h_B$  之间的广义距离测度为

$$d(h_A, h_B) = \left\{ w_M [d_M(h_A, h_B)]^p + w_D [d_D(h_A, h_B)]^p + w_C [d_C(h_A, h_B)]^p + w_F [d_F(h_A, h_B)]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (27)$$

其中,  $w_M + w_D + w_C + w_F = 1$ , 表示 4 种基本的犹豫模糊特征参数距离的权重,  $p$  为距离参数,  $p \geq 1$ .

## 5 新的犹豫模糊识别决策方法

在犹豫模糊特征距离基础上,本节提出一种新的犹豫模糊多属性识别决策方法,新方法主要基于 TODIM 方法和前景理论,并引入本文改进的犹豫模糊比较方法和提出的犹豫模糊特征距离,具体步骤如下.

假设  $m$  类待识别方案  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , 每类方案具有  $n$  类属性信息  $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$ , 对应的属性权重为  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , 满足  $0 \leq w_j \leq 1$ ,  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ . 记  $A_i$  在  $C_j$  上的属性值为犹豫模糊数  $h_i(C_j) = \{\gamma_{i1}(C_j), \gamma_{i2}(C_j), \dots, \gamma_{i_{l(h_i(C_j))}}(C_j)\}$ , 则所有方案的属性值可

以用一决策矩阵  $\mathbf{H} = (h_i(C_j))_{m \times n}$  表示.

**步骤 1** 按属性值遍历, 计算各方案  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  之间在属性  $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$  上的两两比较矩阵关系, 形成比较矩阵  $\Phi_j = [\Phi_{ik}^j]_{m \times m}$ , 其中  $\Phi_{ik}^j$  的取值描述如下.

如果  $C_j$  为效益型属性, 则

$$\Phi_{ik}^j = \begin{cases} d(h_i(C_j), h_k(C_j)), & \text{if } h_i(C_j) > h_k(C_j) \\ 0, & \text{if } h_i(C_j) = h_k(C_j) \\ -\rho \cdot d(h_i(C_j), h_k(C_j)), & \text{if } h_i(C_j) < h_k(C_j) \end{cases} \quad (28)$$

如果  $C_j$  为成本型属性, 则

$$\Phi_{ik}^j = \begin{cases} -\rho \cdot d(h_i(C_j), h_k(C_j)), & \text{if } h_i(C_j) > h_k(C_j) \\ 0, & \text{if } h_i(C_j) = h_k(C_j) \\ d(h_i(C_j), h_k(C_j)), & \text{if } h_i(C_j) < h_k(C_j) \end{cases} \quad (29)$$

其中,  $\rho$  为损失衰退参数, 可以用来模拟决策者的偏好,  $\rho \geq 1$ ,  $\rho$  的取值实际为前景理论的体现. 犹豫模糊数  $h_i(C_j)$  和  $h_k(C_j)$  之间的比较关系按照第 3.2 节的犹豫模糊数比较法则比较,  $d(h_i(C_j), h_k(C_j))$  为犹豫模糊数  $h_i(C_j)$  和  $h_k(C_j)$  之间的距离, 按照第 4 节的犹豫模糊特征距离计算.

**步骤 2** 基于各属性上的比较矩阵, 将所有属性集成得到各方案之间的比较矩阵  $\Phi$ , 即

$$\Phi = [\Phi_{ik}]_{m \times m}, \Phi_{ik} = \left[ \sum_{j=1}^n w_j (\Phi_{ik}^j)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \quad (30)$$

其中,  $\lambda$  为集成参数, 由于  $\Phi_{ik}^j$  可能存在负值, 因此  $\lambda$  不能为偶数. 当  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = -1$  和  $\lambda \rightarrow 0$  时, 得到 3 类比较矩阵.

如果  $\lambda = 1$ , 为 WA-based 的比较矩阵, 即

$$\Phi_{\text{WA}} = [\Phi_{\text{WA-ik}}]_{m \times m}, \Phi_{\text{WA-ik}} = \sum_{j=1}^n w_j (\Phi_{ik}^j) \quad (31)$$

如果  $\lambda = -1$ , 为 WHA-based 的比较矩阵, 即

$$\Phi_{\text{WHA}} = [\Phi_{\text{WHA-ik}}]_{m \times m}, \Phi_{\text{WHA-ik}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{\Phi_{ik}^j}} \quad (32)$$

如果  $\lambda \rightarrow 0$ , 为 WGA-based 的比较矩阵,

$$\Phi_{\text{WGA}} = [\Phi_{\text{WGA-ik}}]_{m \times m}, \Phi_{\text{WGA-ik}} = \prod_{j=1}^n (\Phi_{ik}^j)^{w_j} \quad (33)$$

由表 2 得知, 不同的距离测度得到不同的识别结果. 基于乐观延拓和悲观延拓的 Hamming 距离都将已知模式 1 作为识别结果. 均值距离将已知模式 1 和模式 2 同时作为识别结果, 无法进一步区分. Hausdorff 距离和文献[25~27]中的距离将已知模式 5 作为识别结果, 与提出的犹豫模糊特征距离的识别结果一致. 文献[28]中距离的识别结果则为已知模式 1.

**步骤 3** 按下式计算每类方案的全局比较值  $\eta_i$ :

$$\eta_i = \frac{\sum_{k=1}^m \Phi_{ik} - \min_i \left\{ \sum_{k=1}^m \Phi_{ik} \right\}}{\max_i \left\{ \sum_{k=1}^m \Phi_{ik} \right\} - \min_i \left\{ \sum_{k=1}^m \Phi_{ik} \right\}} \quad (34)$$

**步骤 4** 对全局比较值  $\eta_i$  进行排序, 判定决策方案为最大全局比较值对应的方案. 新的犹豫模糊多属性识别决策方法主要结合了新的犹豫模糊比较法则、矩阵距离、前景理论和集成方法, 称为 CDPA 方法. 新方法是传统的 TODIM 方法在改进犹豫模糊数及其距离方面的拓展.

## 6 仿真分析

本节首先将提出的犹豫模糊特征距离与现有的距离度量进行对比分析, 之后将提出的 CDPA 方法用于解决多传感器目标威胁识别判定问题.

### 6.1 与现有犹豫模糊度量的对比分析

本节将提出的犹豫模糊特征距离与现有的几种典型距离进行对比分析, 采用文献[5, 6, 34]中的 Hamming 距离; 文献[24]中的 Hausdorff 距离; 文献[25~27]中的距离矩阵各行各列最小值的均值距离; 文献[28]中的距离矩阵中绝对值距离对的均值和基于距离矩阵各行各列均值中的最小值 5 大类距离方法对比分析, 其中 Hamming 距离又分为乐观法延拓和悲观法延拓补值两种情况, 且需要将隶属度进行降序排列. 根据参数的重要性, 将各参数的权重设定为 (0.4, 0.3, 0.3). 利用这 5 类距离计算表 1 算例, 得到的识别对比结果如表 2 所示, 特征距离计算时, 聚集性、离散性、一致性和模糊性 4 类特征权重为 (0.4, 0.2, 0.2, 0.2), 距离参数  $p=1$ .

表 1 已知模式的犹豫模糊参数

已知模式	参数		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
未知目标	{0.5,0.3,0.4}	{0.2,0.9,0.4,0.5}	{0.3,0.6}
已知模式 1	{0.2,0.6,0.4}	{0.3,0.7}	{0.3,0.6,0.4,0.5}
已知模式 2	{0.1,0.7}	{0.4,0.6,0.5}	{0.2,0.7,0.3,0.6}
已知模式 3	{0.3,0.4,0.2}	{0.1,0.8,0.3,0.4}	{0.2,0.5}
已知模式 4	{0.7,0.5,0.6}	{0.1,0.4,0.8,0.5}	{0.7,0.4}
已知模式 5	{0.6,0.2,0.4}	{0.6,0.8,0.1,0.4}	{0.6,0.3}

上述不同结果的主要原因在于, 基于乐观延拓和悲观延拓的 Hamming 距离以及文献[28]中的绝对值距离均利用距离矩阵中的绝对值距离对构造距离, 仅表示距离的强度, 不能反映距离间的对比关系. 此外, 基于乐观延拓和悲观延拓的 Hamming 距离增加了延拓值和顺序重排列, 会引入无关信息, 导致计算精度降低.

表 2 不同距离的识别结果对比

方法	距离及排序					排序
	模式 1	模式 2	模式 3	模式 4	模式 5	
悲观延拓距离	0.094 2	0.168 3	0.153 3	0.138 3	0.115 8	P2 > P3 > P4 > P5 > P1
乐观延拓距离	0.109 2	0.183 3	0.153 3	0.138 3	0.115 8	P2 > P3 > P4 > P5 > P1
均值距离	0.000 0	0.000 0	0.100 0	0.125 0	0.007 5	P4 > P3 > P5 > P1 = P2
Hausdorff 距离	0.130 0	0.240 0	0.100 0	0.140 0	0.070 0	P2 > P4 > P1 > P3 > P5
距离矩阵最小值	0.079 2	0.117 9	0.065 8	0.085 0	0.041 7	P2 > P1 > P4 > P3 > P5
距离矩阵绝对值	0.189 7	0.245 0	0.198 9	0.226 2	0.193 5	P2 > P4 > P3 > P5 > P1
特征距离	0.058 8	0.118 6	0.062 0	0.050 3	0.023 4	P2 > P3 > P1 > P4 > P5

均值距离则利用犹豫模糊数的均值构造犹豫模糊距离,本质上为距离的聚集性表示.特别地,当模式 1 和模式 2 与未知目标之间的聚集性一致时,无法对其进一步区分.尽管 Hausdorff 距离和文献[25~27]中距离的计算结果与犹豫模糊矩阵距离的计算结果一致,但是这两种方法只利用了距离矩阵中的部分距离对进行距离构造,在部分距离与实际距离计算结果不一致时,也会得到不合理的结果.

而本文提出的犹豫模糊特征距离释放了犹豫模糊数隶属度个数与顺序的条件,利用距离矩阵中的所有数值构造犹豫模糊数距离,相对现有犹豫模糊距离考虑的因素更多,表明了犹豫模糊特征距离在距离分辨方面具有优越性.

### 6.2 基于 CDPA 的目标威胁识别判定

本节结合所提出的 CDPA 多属性识别决策方法进一步验证犹豫模糊特征距离,并用于解决目标威胁识别判定问题.

某机载多传感器威胁识别系统的雷达、敌我识别器和电子支援措施获取到 4 类可能的威胁目标.每类目标的威胁程度取决于 3 类参数:距离、速度和方位.在复杂环境下,威胁值自身携带不确定性,通过前段的数据预处理上报给融合中心的各类目标决策信息为犹豫模糊信息,融合中心需要根据得到的信息进行威胁识别判定,这是一个典型的多属性识别决策问题,可以描述为下述数学模型.

记融合中心待识别威胁为  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ , 每类威胁具有 3 类参数  $\{C_1, C_2, C_3\}$ , 按参数的重要性将其权重设定为  $w=[0.5, 0.3, 0.2]^T$ , 记  $h_i(C_j)=\{\gamma_{i1}(C_j), \gamma_{i2}(C_j), \dots, \gamma_{i|h_i(C_j)|}(C_j)\}$  为威胁目标  $A_i$  在参数  $C_j$  上的犹豫模糊信息, 则所有威胁目标的犹豫模糊信息可以表示为一决策矩阵  $H=[h_i(C_j)]_{m \times n}$ , 具体数值如表 3 所示.

利用提出的 CDPA 方法进行威胁目标的识别判定, 具体步骤如下.

表 3 犹豫模糊威胁特征参数值

威胁	参数		
	距离	速度	方向
威胁 1	{0.5,0.6,0.7}	{0.6,0.8}	{0.5,0.6,0.4,0.2}
威胁 2	{0.4,0.6,0.3}	{0.6,0.5,0.3}	{0.2,0.5,0.6,0.3}
威胁 3	{0.3,0.5,0.4}	{0.4,0.6,0.8}	{0.4,0.3,0.2,0.7}
威胁 4	{0.3,0.2,0.6,0.5}	{0.3,0.4,0.6,0.7}	{0.3,0.5}

#### 步骤 1 计算各参数上各威胁目标的比较矩阵.

首先,利用新的犹豫模糊比较法则对各目标在各参数上的大小进行比较,得到下述关系.

对于距离参数而言: Threat 1 > Threat 2 > Threat 4 > Threat 3.

对于速度参数而言: Threat 1 > Threat 3 > Threat 4 > Threat 2.

对于方位参数而言: Threat 1 > Threat 4 > Threat 2 > Threat 3.

进一步,基于犹豫模糊数之间的距离计算各目标在各参数上的距离.

对于距离参数而言:  $d_{12}=0.088 6, d_{13}=0.080 0, d_{14}=0.132 0, d_{23}=0.035 3, d_{24}=0.043 3, d_{34}=0.052 0$ .

对于速度参数而言:  $d_{12}=0.171 6, d_{13}=0.099 3, d_{14}=0.161 6, d_{23}=0.087 7, d_{24}=0.056 7, d_{34}=0.064 4$ .

对于方位参数而言:  $d_{12}=0.022 0, d_{13}=0.047 8, d_{14}=0.079 6, d_{23}=0.025 8, d_{24}=0.081 6, d_{34}=0.107 4$ .

其中,  $d_{ij}$  为威胁  $i$  与威胁  $j$  之间的距离.

由于距离越近威胁越大,速度越快威胁越大,方位越小威胁越大,因此距离和方位为成本型参数,速度为效益型参数.基于各目标在各参数上的比较关系和相互间的距离,当损失衰退参数  $\rho=1$  时,可以得到各目标在参数值上的比较矩阵为

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.088 6 & -0.080 0 & -0.132 0 \\ 0.088 6 & 0 & -0.035 3 & -0.043 3 \\ 0.080 0 & 0.035 3 & 0 & 0.052 0 \\ 0.132 0 & 0.043 3 & 0.052 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1716 & 0.0993 & 0.1616 \\ -0.1716 & 0 & -0.0877 & -0.0567 \\ -0.0993 & 0.0877 & 0 & 0.0644 \\ -0.1616 & 0.0567 & -0.0644 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0220 & -0.0478 & -0.0796 \\ 0.0220 & 0 & -0.0258 & 0.0816 \\ 0.0478 & 0.0258 & 0 & 0.1074 \\ 0.0796 & -0.0816 & -0.1074 & 0 \end{bmatrix}$$

步骤2 基于犹豫模糊数 WA-based 距离集成各目标在参数值上的比较矩阵,得到各方案之间的比较矩阵为

$$\Phi_{WA} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0094 & -0.0166 & -0.0282 \\ -0.0094 & 0 & -0.0482 & -0.0099 \\ 0.0166 & 0.0482 & 0 & 0.0723 \\ 0.0282 & 0.0099 & -0.0723 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

步骤3 计算各目标的全局比较值  $\eta_i$  为

$$\eta_1 = 0.1572, \eta_2 = 0, \eta_3 = 1, \eta_4 = 0.1621.$$

步骤4 对全局比较值  $\eta_i$  进行排序得到

$$\eta_3 \succ \eta_4 \succ \eta_1 \succ \eta_2.$$

$\eta_3$  最大,因此判定最大的威胁目标为威胁3.

损失衰退参数  $\rho$  是前景理论的体现. 为确定目标威胁识别结果随着损失衰退参数  $\rho$  变化关系,当损失衰退参数  $\rho$  变化的情况下,全局比较值  $\eta_i$  和排序结果如表4所示.

表4 不同损失衰退参数条件下的威胁识别结果

损失衰退参数	威胁识别结果及排序				
	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$	排序
$\rho=2$	0	0.2141	1.0000	0.6415	$\eta_3 \succ \eta_4 \succ \eta_1 \succ \eta_2$
$\rho=4$	0	0.3593	1.0000	0.8718	$\eta_3 \succ \eta_4 \succ \eta_2 \succ \eta_1$
$\rho=6$	0	0.4019	1.0000	0.9395	$\eta_3 \succ \eta_4 \succ \eta_2 \succ \eta_1$
$\rho=8$	0	0.4223	1.0000	0.9719	$\eta_3 \succ \eta_4 \succ \eta_2 \succ \eta_1$
$\rho=10$	0	0.4343	1.0000	0.9908	$\eta_3 \succ \eta_4 \succ \eta_2 \succ \eta_1$
$\rho=12$	0	0.4407	0.9967	1.0000	$\eta_4 \succ \eta_3 \succ \eta_2 \succ \eta_1$
$\rho=14$	0	0.4423	0.9880	1.0000	$\eta_4 \succ \eta_3 \succ \eta_2 \succ \eta_1$

表4给出了损失衰退参数  $\rho$  逐渐增加条件下威胁目标的识别结果变化. 当  $\rho$  从1增加到10时,尽管全局比较值  $\eta_i$  的排序有所变化,但是识别结果始终为威胁3. 但是,当  $\rho$  增加到12时,最大的威胁目标变为威胁4,表明损失衰退参数的选取对识别结果起着重要作用.

实质上,损失衰退参数模拟了决策者的偏好,体现了利用前景理论在决策时更倾向于规避损失的特点,表示决策者对损失值更敏感,反映出在做决策时更倾向于在较小损失的条件得到相对确定的结果. 因此,在利用 CDPA 方法进行识别决策时,应当根据决策者的偏好选取合适的损失衰退参数,否则可能得到不同的识别结果.

### 6.3 与现有融合决策目标识别方法的对比

基于本文的犹豫模糊距离样式,用文献[8]中的 TOPSIS 识别决策方法和文献[3]中的 VIKOR 识别决策方法对第6.2节中的算例进行计算,计算结果如表5所示. 表5中的  $L_i$  表示 TOPSIS 方法中的贴近度,  $S_i, R_i$  和  $Q_i$  分别表示 VIKOR 方法中的群体效能值、个体后悔值和折衷值.

表5 基于 TOPSIS 和 VIKOR 方法的威胁识别结果

方法	计算结果				排序
	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	
TOPSIS	0.229	0.4194	0.5220	0.4825	$L_3 \succ L_4 \succ L_2 \succ L_1$
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_3 \succ S_4 \succ S_1 \succ S_2$
VIKOR	0.7333	0.8542	0.5250	0.7250	$R_3 \succ R_4 \succ R_1 \succ R_2$
	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	
	0.5000	0.4667	0.200	0.400	$Q_3 \succ Q_4 \succ Q_1 \succ Q_2$
	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	
	0.7063	0.9778	0	0.6194	

从表中可见,由 TOPSIS 方法得到的威胁从高到低排序为威胁3>威胁4>威胁2>威胁1. 由 VIKOR 方法得到的威胁从高到低排序为威胁3>威胁4>威胁1>威胁2,两种方法都将威胁3识别为最大的威胁目标,与本文方法  $\rho \leq 10$  的识别结果一致,证明了本文方法的正确性. 在不同的场景下,决策者对损失的敏感度不一样,这两种方法没有考虑决策时决策者的偏好影响,无论在何种情况下,都将威胁3识别为最大的威胁目标,而本文方法将决策者规避损失的偏好考虑在内,得到随损失衰退参数变化的识别结果,与实际决策判定更为贴近.

## 7 结论

本文主要研究犹豫模糊数的距离测度及其识别问题. 回顾和总结了现有犹豫模糊数的比较法则及基本距离度量方法,通过案例论述了现有犹豫模糊距离度量一方面需要延拓补值和顺序重排列,另一方面仅利用距离矩阵中的部分值或者犹豫模糊部分特征进行距离度量,分别导致误差引入和信息缺失. 首先,为解决上述问题,本文改进了犹豫模糊数的比较法则,引入模糊度作为新的比较指标形成新的犹豫模糊数比较法则. 其次,为解决犹豫模糊距离度量中隶属度延拓补值和顺序重排的问题,本文提出基于距离矩阵的犹豫模糊数距离度量方法,该距离释放了隶属度延拓补值和顺序重排的条件. 在此基础上,为解决多属性识别决策问题,综合考虑犹豫模糊新比较法则、矩阵距离、前景理论和集成算子提出了 CDPA 识别决策方法. 最后,本文通过仿真分析,将犹豫模糊矩阵距离与现有5大类距离度量详细对比分析,论证了新提出的犹豫模糊特征

距离的有效性;除此之外,利用CDPA识别决策方法解决多传感器目标威胁判定问题,并对比分析了损失衰退参数的影响,得出了在进行识别决策时应该选取合适的损失衰退参数的结论。

#### 参考文献

- [1] TORRA V, NARUKAWA Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]//2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Piscataway: IEEE, 2009: 1378-1382.
- [2] 徐俊艳,孙贵东,赵静.新的犹豫模糊集相关系数及多属性决策应用[J].电子学报,2018,46(6):1327-1335.  
XU J Y, SUN G D, ZHAO J. Novel correlation coefficients between hesitant fuzzy sets and their applications in multi-attribute decision making[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(6): 1327-1335. (in Chinese)
- [3] 李双明,关欣,孙贵东.基于犹豫模糊集的不等长序列识别方法及应用[J].通信学报,2021,42(7):41-51.  
LI S M, GUAN X, SUN G D. Recognition method based on hesitant fuzzy set for unequal length sequences and its application[J]. Journal on Communications, 2021, 42(7): 41-51. (in Chinese)
- [4] LIAO H C, GOU X J, XU Z S, et al. Hesitancy degree-based correlation measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their applications in multiple criteria decision making[J]. Information Sciences, 2020, 508: 275-292.
- [5] XU Z S, XIA M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.
- [6] XU Z S, XIA M M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2011, 26(5): 410-425.
- [7] WU S S, LIN J, ZHANG Z Y. New distance measures of hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Physica Scripta, 2021, 96(1): 015002.
- [8] ALI J, BASHIR Z, RASHID T. On distance measure and TOPSIS model for probabilistic interval-valued hesitant fuzzy sets: Application to healthcare facilities in public hospitals[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2022, 12(1): 197-229.
- [9] ZHANG H M. Distance and entropy measures for dual hesitant fuzzy sets[J]. Computational and Applied Mathematics, 2020, 39(2): 91.
- [10] WEI Y X, WANG Q H. New distances for dual hesitant fuzzy sets and their application in clustering algorithm[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 41(6): 6221-6232.
- [11] FARHADINIA B, XU Z S. Distance and aggregation-based methodologies for hesitant fuzzy decision making [J]. Cognitive Computation, 2017, 9(1): 81-94.
- [12] LIU Y, LIU J, HONG Z Y. A multiple attribute decision making approach based on new similarity measures of interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2018, 11(1): 15-32.
- [13] REZAEI K, REZAEI H. New distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets and their application in hierarchical clustering[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2020, 39(3): 4349-4360.
- [14] LIU D H, CHEN X H, PENG D. Distance measures for hesitant fuzzy linguistic sets and their applications in multiple criteria decision making[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2018, 20(7): 2111-2121.
- [15] SINGHA B, SEN M, SINHA N. Modified distance measure on hesitant fuzzy sets and its application in multi-criteria decision making problem[J]. OPSEARCH, 2020, 57(2): 584-602.
- [16] CHEN X, SUO C F, LI Y M. Distance measures on intuitionistic hesitant fuzzy set and its application in decision-making[J]. Computational and Applied Mathematics, 2021, 40(3): 84.
- [17] FARHADINIA B, XU Z S. A novel distance-based multiple attribute decision-making with hesitant fuzzy sets[J]. Soft Computing, 2020, 24(7): 5005-5017.
- [18] YANG M S, HUSSAIN Z. Distance and similarity measures of hesitant fuzzy sets based on Hausdorff metric with applications to multi-criteria decision making and clustering[J]. Soft Computing, 2019, 23(14): 5835-5848.
- [19] ZHAO N, XU Z S, REN Z L. Some approaches to constructing distance measures for hesitant fuzzy linguistic term sets with applications in decision-making[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2018, 17(1): 103-132.
- [20] REN Z L, XU Z S, WANG H. Dual hesitant fuzzy VIKOR method for multi-criteria group decision making based on fuzzy measure and new comparison method[J]. Information Sciences, 2017, 388/389: 1-16.
- [21] HU J H, YANG Y, ZHANG X L, et al. Similarity and entropy measures for hesitant fuzzy sets[J]. International Transactions in Operational Research, 2018, 25(3): 857-886.
- [22] ZHANG F W, CHEN S Y, LI J B, et al. New distance measures on hesitant fuzzy sets based on the cardinality

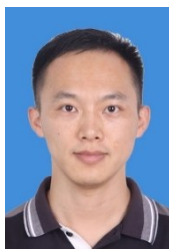
- theory and their application in pattern recognition[J]. *Soft Computing*, 2018, 22(4): 1237-1245.
- [23] ZHANG H Y, YANG S Y. Inclusion measure for typical hesitant fuzzy sets, the relative similarity measure and fuzzy entropy[J]. *Soft Computing*, 2016, 20(4): 1277-1287.
- [24] FARHADINIA B, HERRERA-VIEDMA E. Sorting of decision-making methods based on their outcomes using dominance-vector hesitant fuzzy-based distance[J]. *Soft Computing*, 2019, 23(4): 1109-1121.
- [25] MENG F Y, CHEN X H. A hesitant fuzzy linguistic multi-granularity decision making model based on distance measures[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2015, 28(4): 1519-1531.
- [26] WANG J, WANG J Q, ZHANG H Y, et al. Distance-based multi-criteria group decision-making approaches with multi-hesitant fuzzy linguistic information[J]. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 2017, 16(4): 1069-1099.
- [27] ZHOU H, WANG J Q, ZHANG H Y. Multi-criteria decision-making approaches based on distance measures for linguistic hesitant fuzzy sets[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2018, 69(5): 661-675.
- [28] PENG D H, WANG T D, GAO C Y, et al. Enhancing relative ratio method for MCDM via attitudinal distance measures of interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(4): 1347-1368.
- [29] ZHANG F W, LI J B, CHEN J H, et al. Hesitant distance set on hesitant fuzzy sets and its application in urban road traffic state identification[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2017, 61: 57-64.
- [30] CHEN J J, HUANG X J, TANG J. Distance measures for higher order dual hesitant fuzzy sets[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2018, 37(2): 1784-1806.
- [31] XIA M M, XU Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2011, 52(3): 395-407.
- [32] CHEN N, XU Z S, XIA M M. The ELECTRE I multi-criteria decision-making method based on hesitant fuzzy sets [J]. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 2015, 14(3): 621-657.
- [33] ZHANG X L, XU Z S. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2014, 61: 48-58.
- [34] CHEN N, XU Z S, XIA M M. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(4): 2197-2211.
- [35] LIU H B, RODRÍGUEZ R M. A fuzzy envelope for hesitant fuzzy linguistic term set and its application to multi-criteria decision making[J]. *Information Sciences*, 2014, 258: 220-238.
- [36] KOBZA V, JANIŠ V, MONTES S. Divergence measures on hesitant fuzzy sets[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2017, 33(3): 1589-1601.

### 作者简介



于 森 女, 1980年生, 北京人. 中国人民解放军某部工程师. 主要研究方向为信息与通信工程.

E-mail: moppetnizi@163.com



孙贵东 男, 1989年生, 山东荣成人. 中国人民解放军32801部队助理研究员. 主要研究方向为复杂电磁环境、信息融合与智能决策.

E-mail: sdwhsgd@163.com



李双明 男, 1986年生, 山东梁山人. 中国人民解放军92941部队工程师. 主要研究方向为智能识别、不确定信息处理.

E-mail: aminglishuang@126.com