

一种基于能量的压缩感知稀疏度估计算法

裴立业, 江 桦, 李 明

(信息工程大学信息工程学院, 河南郑州 450001)

摘 要: 压缩感知理论中, 信号稀疏度直接关系到采样速率的设定以及观测矩阵的构造, 而该先验信息往往受限. 针对这一问题, 本文从大维随机矩阵谱分析理论出发, 分析了采样协方差矩阵的极限特征值概率分布特征, 并结合其与观测信号能量的关系推导得到观测信号能量与压缩率、稀疏度和信噪比之间的对应关系, 提出一种基于观测信号能量的稀疏度估计算法. 相对于已有算法, 该算法计算复杂度较低, 且估计精度较好, 并可通过增加采样开销进一步提升稀疏度估计精度, 仿真实验验证了本文算法的有效性.

关键词: 压缩感知; 稀疏度估计; 随机矩阵理论; Stieltjes 变换

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)02-0285-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.02.004

A Sparsity Order Estimation Algorithm Based on Measured Signal's Energy

PEI Li-ye, JIANG Hua, LI Ming

(College of Information System Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China)

Abstract: Signal sparsity is directly related to the determination of sampling rate and the construction of measurement matrix in compressive sensing. However, the sparsity order is often unknown or time-varying. In this context, investigating blind sparsity order estimation (SOE) techniques is an open research issue. To address this, asymptotic random matrix spectrum analysis theory was used to derive the asymptotic eigenvalue probability distribution function (AEPDF) of the measured signal's covariance matrix. Then, the paper used the relation between the measurement energy and AEPDF to further deduce the corresponding relation between the sparsity order, compressive rate, SNR and the measured signal energy. Subsequently, based on this relation, a technique to estimate the sparsity order using the measured signal energy was proposed. Simulation results show that the proposed algorithm can gain higher estimation performance with lower computational complexity compared with the existing algorithm. And the estimation accuracy can be enhanced by increasing the sampling overhead.

Key words: compressive sensing; sparsity order estimation; random matrix theory; stieltjes transform

1 引言

随着信息技术的飞速发展, 人们对信息量的需求越来越大, 信号带宽越来越宽, 以传统奈奎斯特采样定理为基础的信号处理框架对采样速率的要求也越来越高, 而现有硬件设备尚无法满足其对模数转换能力的要求^[1]. 压缩感知^[2] (Compressive sensing, CS) 作为一种新的信号处理理论, 为信号的数字化过程提供了一种新的选择. CS 理论指出: 如果信号是稀疏的或可压缩的, 便可利用特定的观测矩阵将高维信号线性投影到一个低维空间, 且不会造成重要信息的丢失, 最后, 通过

求解一个优化问题可以从低维观测向量中高概率精确重构出原始信号.

压缩感知理论指出, 稀疏信号的最低采样速率由稀疏度 K 决定, 稀疏度越小, 重构稀疏信号所需采样点数和采样速率越小. 但现实应用中稀疏度这一先验信息往往受限, 例如在认知无线电 (Cognitive Radio, CR) 场景中, 由于主用户与认知用户之间没有直接信息交互, 且主用户频谱占用情况动态变化, 所以宽带频谱的稀疏度受限^[3]. 一种常见的解决方案是用统计意义下的最大稀疏度 K_{\max} 代替实际稀疏度 K 来计算采样速率, 而 K_{\max} 与 K 之间的差距必然会带来采样开销的不必要

浪费. 现阶段, 压缩感知的研究主要集中在观测矩阵的构造^[4,5]和稀疏信号的精确重构^[6,7], 针对稀疏度估计的研究还较少. 文献[8]提出一种序列采样(Sequential sampling, SS)方法, 逐次递增观测次数, 直至信号重建结果收敛. 该方法由于需要反复重构原始信号, 故计算复杂度较高; 文献[9]首次提出稀疏度估计这一概念, 并给出一种两步压缩频谱感知算法, 首先利用较少的采样点数估计稀疏度, 然后利用稀疏度估计值自适应调整采样速率. 该方法的稀疏度估计主要基于蒙特卡罗(Monte Carlo, MC)模拟和曲线拟合(Curve Fitting, CF)技术, 缺乏理论分析, 且算法也需重构原始信号, 计算复杂度较高. 文献[10]提出一种基于采样协方差矩阵最大特征值的稀疏度估计方法, 但该方法应用的最大特征值具有较大随机性, 估计精度有待进一步提高.

针对以上不足, 本文提出一种基于观测信号平均能量的稀疏度估计算法. 在 MMV (Multiple Measurement Vector) 模型下, 推导得到了观测信号采样协方差矩阵的极限特征值概率密度函数以及能量与稀疏度之间的关系, 并在此基础上提出基于观测信号能量的稀疏度估计算法, 该算法具有更好的估计精度以及较低的计算复杂度, 仿真实验验证了该算法的有效性.

2 系统模型

本文重点考虑 MMV 模型^[11]下稀疏度估计问题. 首先定义两个参数, 稀疏率 $\sigma = \frac{K}{N}$ 表示稀疏域非零系数所占比率; 压缩率 $\rho = \frac{M}{N}$ 表示稀疏信号线性变换后的压缩比率. 压缩感知观测模型可表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{Z} \quad (1)$$

其中 \mathbf{A} 为 $N \times N$ 维对角矩阵, 其对角元素服从独立同分布的伯努利分布, 即 $p[A_{ii} = 1] = \rho = 1 - p[A_{ii} = 0]$, 其中 $\rho = \frac{1}{N}E_A[M] = \frac{1}{N}\bar{M}$ 表示对角非零元素占整个对角元素的比例, 对应于文献[2]中的压缩率. \mathbf{U} 为 $N \times N$ 维随机矩阵, 其元素独立同分布, 且均值为 0, 方差为 $1/N$. $N \times N$ 维矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{U}$ 表示观测矩阵. \mathbf{B} 为 $N \times N$ 维对角矩阵, 其对角元素服从独立同分布的伯努利分布, 即 $p[B_{ii} = 1] = \sigma = 1 - p[B_{ii} = 0]$. \mathbf{X} 为元素独立同分布, 且均值为 0, 方差为 $1/N$ 的 $N \times N$ 维随机矩阵. 矩阵 $\mathbf{B}\mathbf{X}$ 表示具有相同稀疏度的稀疏信号矩阵. \mathbf{Z} 表示高斯噪声, 其元素独立同分布, 且均值为 0, 方差为 $1/N$. \mathbf{P} 为 $N \times N$ 维对角矩阵, 其对角元素对应于稀疏域不同频点的能量. 为简便起见, 本文仅考虑稀疏域不同频点在接收端具有相同增益的情况, 即 \mathbf{P} 为常数 p , 观测模型可简化为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{U}\sqrt{p}\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{Z} \quad (2)$$

通过式(2)可以看出, 观测信号 \mathbf{Y} 有 $\bar{M} = \rho N \leq N$ 个非零行, 且每行有 N 个采样点. 本文假设矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{U}, \mathbf{B}, \mathbf{X}$ 和 \mathbf{Z} 相互独立, 且观测矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{U}$ 已知.

3 基于能量的压缩感知稀疏度估计算法

3.1 大维随机矩阵谱分析理论基础

大维随机矩阵谱分析是大维随机矩阵理论的重要组成部分, 在理论物理、通信、金融等学科中都有广泛应用. 这里首先介绍将在 3.2 节理论推导过程中应用到的相关结论.

定义 1 假设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 Hermitian 矩阵 \mathbf{A} 的实特征值. 经验谱分布函数定义如下^[12]:

$$F^{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{\lambda_i \leq x\} \quad (3)$$

其中 $I\{\cdot\}$ 表示示性函数. 通常情况下, 随机矩阵在一定条件下其经验谱分布会随着矩阵维数的增大而收敛于极限谱分布, 也就是说其极限谱分布函数具有非随机性.

Stieltjes 变换、 η 变换、 R 变换、 Σ 变换等方法^[12]是大维随机矩阵谱分析的重要工具.

定义 2 对于一个半正定矩阵 \mathbf{X} , 其 Stieltjes 变换定义为

$$S_{\mathbf{X}}(z) = E \left[\frac{1}{\mathbf{X} - z} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} dF_{\mathbf{X}}(\lambda) \quad (4)$$

其中 $F_{\mathbf{X}}(\cdot)$ 表示矩阵 \mathbf{X} 的特征值概率分布函数.

Stieltjes 变换的优势在于, 极限谱密度函数可以简单的通过求取矩阵 Stieltjes 变换的极限得到, 即

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \text{Im} \{ S_{\mathbf{X}}(x + jy) \} \quad (5)$$

定义 3 对于一个半正定矩阵 \mathbf{X} , 其 η 变换定义为

$$\eta_{\mathbf{X}}(\gamma) = E \left[\frac{1}{1 + \gamma \mathbf{X}} \right] = \frac{S_{\mathbf{X}}\left(-\frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma} \quad (6)$$

其中 γ 为非负实数, 且 $0 < \eta_{\mathbf{X}}(\gamma) \leq 1$.

定义 4 矩阵 \mathbf{X} 的 R 变换可表示为矩阵 \mathbf{X} 的 Stieltjes 逆变换

$$R_{\mathbf{X}}(z) = S_{\mathbf{X}}^{-1}(-z) - \frac{1}{z} \quad (7)$$

定义 5 矩阵 \mathbf{X} 的 Σ 变换可以由 η 变换表示为如下形式

$$\Sigma_{\mathbf{X}}(z) = -\frac{1+z}{z} \eta_{\mathbf{X}}^{-1}(1+z) \quad (8)$$

3.2 算法理论分析

假设源信号与噪声不相关, 则观测信号协方差矩阵 $\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{Y}} &= E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] \\ &= E[(\mathbf{A}\mathbf{U}\sqrt{p}\mathbf{B}\mathbf{X})(\mathbf{A}\mathbf{U}\sqrt{p}\mathbf{B}\mathbf{X})^H] + E[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H] \\ &= \rho E[\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{X}^H\mathbf{B}^H\mathbf{U}^H\mathbf{A}^H] + E[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H] \end{aligned} \quad (9)$$

本文感兴趣的是协方差矩阵 \mathbf{R}_Y 的特征值概率分布 $f(\lambda)$, 由于 $\mathbf{A}, \mathbf{U}, \mathbf{B}, \mathbf{X}$ 和 \mathbf{Z} 均为方阵, 故 $f_{\hat{R}_Y}(\lambda) = f_{\mathbf{R}_Y}(\lambda)$, 其中 $\bar{\mathbf{R}}_Y = \rho \mathbf{E}[\mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{X}^H \mathbf{B}^H] + \mathbf{E}[\mathbf{Z} \mathbf{Z}^H] = \rho \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_Z$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{E}[\mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{U}]$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{E}[\mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{X}^H \mathbf{B}^H]$ 且 $\mathbf{R}_Z = \mathbf{E}[\mathbf{Z} \mathbf{Z}^H]$. 实际应用中, 观测信号协方差矩阵 \mathbf{R}_Y 很难得到, 故样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$ 被广泛应用. 当 N 很大时, 可认为样本协方差矩阵近似等于统计协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N) \approx \mathbf{R}_Y$, 同时, 样本协方差矩阵可近似表示为如下形式^[13]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{R}}_Y(N) \approx \rho \hat{\mathbf{R}}_1 \hat{\mathbf{R}}_2 + \hat{\mathbf{R}}_Z \quad (10)$$

其中 $\hat{\mathbf{R}}_1, \hat{\mathbf{R}}_2, \hat{\mathbf{R}}_Z$ 为相应样本协方差矩阵.

根据式(5)可知, 样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 的极限特征值概率密度函数可以通过计算其 Stieltjes 变换得到, 但直接计算样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 的 Stieltjes 变换有很大困难. 大维随机矩阵的自由概率理论指出, 无需考虑随机矩阵的特征值结构, 多个随机矩阵和或积的渐进谱可通过分别计算各个随机矩阵的渐进谱得到, 主要是指 Σ 变换满足乘性自由卷积性^[14], 以及 R 变换满足加性自由卷积性^[15], 该特性在后续理论推导中会被反复应用.

根据文献[12]可知, 矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_2$ 的 Σ 变换可分别表示为

$$\Sigma_{\hat{R}_1}(z) = \frac{1}{\rho + z}, \quad \Sigma_{\hat{R}_2}(z) = \frac{1}{\sigma + z} \quad (11)$$

利用 Σ 变换的乘性自由卷积性质可得矩阵乘积 $\hat{\mathbf{R}}_1 \hat{\mathbf{R}}_2$ 的 Σ 变换

$$\Sigma_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}(z) = \Sigma_{\hat{R}_1}(z) \cdot \Sigma_{\hat{R}_2}(z) = \frac{1}{\rho + z} \cdot \frac{1}{\sigma + z} \quad (12)$$

将式(8)代入式(12), 可得

$$z(\eta_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}(z) + \rho - 1)(\eta_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}(z) + \sigma - 1) \cdot \eta_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}(z) + \eta_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}(z) - 1 = 0 \quad (13)$$

根据 η 变换和 Stieltjes 变换关系式(6), 可知 $\hat{\mathbf{R}}_1 \hat{\mathbf{R}}_2$ 的 Stieltjes 变换满足如下多项式

$$z^2 S_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}^3(z) + z(2 - \rho - \sigma) S_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}^2(z) + ((\rho - 1)(\sigma - 1) - z) S_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}(z) - 1 = 0 \quad (14)$$

结合式(7)和式(14)可得 $\hat{\mathbf{R}}_1 \hat{\mathbf{R}}_2$ 的 R 变换

$$R_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}(z) = \frac{-(z\rho + z\sigma - 1)}{2z^2} - \frac{\sqrt{z^2 \rho^2 - 2z^2 \rho \sigma - 2z\rho + z^2 \sigma^2 - 2z\sigma + 1}}{2z^2} \quad (15)$$

定理 1^[12] 对一个 Wishart 随机矩阵 \mathbf{X} , 其特征值概率分布的 R 变换可表示为如下形式

$$R_X(z) = \frac{\beta}{1 - z} \quad (16)$$

对于任意实数 $a > 0$,

$$R_{aX}(z) = aR_X(az) \quad (17)$$

根据定理 1 和 R 变换的加性自由卷积性质可得

$$R_{\hat{R}_Y}(z) = \rho R_{\hat{R}_1 \hat{R}_2}(z) + R_{\hat{R}_Z}(z) \quad (18)$$

利用 R 变换和 Stieltjes 变换关系式(7), 可知采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 的 Stieltjes 变换满足如下多项式

$$c_6 S_{\hat{R}_Y}^6(z) + c_5 S_{\hat{R}_Y}^5(z) + c_4 S_{\hat{R}_Y}^4(z) + c_3 S_{\hat{R}_Y}^3(z) + c_2 S_{\hat{R}_Y}^2(z) + c_0 = 0 \quad (19)$$

$$c_0 = -\rho^2$$

$$c_2 = \rho^2(\rho\sigma - 1 - z) - \rho^3(\rho + \sigma) + \rho^4$$

$$c_3 = -\rho^3(\rho + \sigma)(z + 1) + 2\rho^2(\rho\sigma - z + zp^2) \quad (20)$$

$$c_4 = zp^4(2 - z) - 2zp^3(\rho + \sigma) - \rho^2(z - \rho\sigma)$$

$$c_5 = 2z^2 p^4 - zp^3(\rho + \sigma)$$

$$c_6 = p^4 z^2$$

其中 ρ 和 σ 分别表示压缩率和稀疏率, p 表示信噪比. 结合式(5)可进一步得到采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 的极限特征值概率密度函数, 且其仅与稀疏率 σ 、压缩率 ρ 和信噪比 p 有关.

大维随机矩阵理论指出 F^A 的 k 阶矩可表示为

$$\beta_k(A) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k F^A(dx) = \frac{1}{n} \text{tr}(A^k) \quad (21)$$

故 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 的极限特征值期望为

$$E_{\hat{R}_Y}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x F^{\hat{R}_Y}(dx) = \frac{1}{N} \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_Y) \quad (22)$$

由于

$$\hat{\mathbf{R}}_Y(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H \quad (23)$$

故

$$\frac{1}{N} \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_Y) = \frac{1}{N} \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_Y(N)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Y_{ij}|^2 \quad (24)$$

结合式(22)得

$$E_{\hat{R}_Y}(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Y_{ij}|^2 = E_Y \quad (25)$$

通过以上理论推导可以看出, 在压缩率 ρ 和信噪比 p 已知的情况下, 稀疏率 σ 与协方差矩阵极限特征值概率密度函数存在对应关系, 而极限特征值概率密度函数又与观测信号平均能量有关, 故可通过观测信号平均能量估计稀疏率 σ , 进而得到稀疏度 $K = \sigma \cdot N$.

3.3 基于能量的稀疏度估计算法

基于 3.2 节理论推导, 本节给出一种基于信号能量的稀疏度估计方法. 首先, 根据式(19)得到采样协方差

矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$ 的 Stieltjes 变换 $S_{\hat{R}_Y}(z)$; 其次,

将其代入式(5)可得采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 的极限特征值概率密度函数; 最后, 结合式(22)得到采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 的特征值期望, 也就是观测信号能量. 通过整个分析过程可以看出, 在压缩率 ρ 和信噪比 p 已知条

件下,观测信号能量 E_Y 与稀疏率 σ 之间存在一一对应关系,故可利用观测信号能量 E_Y 估计稀疏率 σ . 为简便起见,本算法采用查表的方法估计稀疏度. 首先构造一张观测信号能量 E_Y 与稀疏率 σ 关系对照表(如表 1),对照表中列举出不同压缩率 ρ 和 SNR 条件下,不同稀疏率 σ 对应的观测信号能量. 表 2 归纳总结了对照表

构造过程. 在稀疏率 σ 的估计过程中,首先计算观测信号能量 E_Y ,其次通过对照表查找 E_Y 对应的信号稀疏率,完成信号稀疏度估计. 针对不在表格中的信号能量 E_Y ,利用合理的插值算法完成稀疏度估计,本文采用简单的均匀插值方法. 表 3 归纳总结了稀疏度估计过程.

表 1 稀疏率与观测信号平均能量关系对照表

参数 稀疏率	$\rho=0.6$ SNR = -2dB	$\rho=0.6$ SNR = 0dB	$\rho=0.6$ SNR = 2dB	$\rho=0.8$ SNR = -2dB	$\rho=0.8$ SNR = 0dB	$\rho=0.8$ SNR = 2dB
1	1.3784	1.5998	1.9487	1.5047	1.7995	2.1415
0.9	1.3405	1.5398	1.8534	1.4546	1.7187	2.2689
0.8	1.3038	1.4810	1.7614	1.4041	1.6396	2.0162
0.7	1.2655	1.4193	1.6647	1.3532	1.5588	1.8892
0.6	1.2271	1.3608	1.5706	1.3028	1.4805	1.7593
0.5	1.1898	1.2991	1.4755	1.2527	1.4004	1.6351
0.4	1.1516	1.2397	1.3790	1.2019	1.3197	1.5070
0.3	1.1131	1.1794	1.2867	1.1510	1.2397	1.3807
0.2	1.0759	1.1196	1.1912	1.1010	1.1611	1.2529
0.1	1.0377	1.0598	1.0954	1.0502	1.0797	1.1264
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表 2 对照表构造过程

(1)	设定所需参数:压缩率 ρ 与信噪比 p ;
(2)	根据式(19)计算采样协方差矩阵 Stieltjes 变换 $S_{\hat{R}_Y}(z)$;
(3)	利用式(22)得到特征值期望 $E_{\hat{R}_Y}(\lambda)$,即观测信号能量 E_Y ;
(4)	针对不同稀疏率 $\sigma \in [0,1]$,重复步骤(2)、步骤(3);
(5)	存储针对不同稀疏率 σ 得到的所有特征值期望 $E_{\hat{R}_Y}(\lambda)$,例如表 1;

表 3 稀疏度估计过程

(1)	计算观测信号 \mathbf{Y} 平均能量 $E_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Y_{ij} ^2$;
(2)	通过查表选择与观测信号能量 E_Y 对应的稀疏率 σ ;
(3)	利用均匀插值算法计算不在对照表中的能量 E_Y 对应的稀疏率 σ ;
(4)	得到稀疏信号稀疏度估计值 $K = N \cdot \sigma$;

在稀疏度估计过程中,假设信噪比 p 和压缩率 ρ 已知. 在实际应用中,信噪比 p 可以利用一系列 SNR 估计算法^[16,17]得到. 压缩率 ρ 与观测数据量有关,表示采样开销的大小,可以人为设定. 较低的采样开销意味着较大的稀疏度估计误差,这在后续实验中有所体现. 这里通过一个简单的例子说明稀疏度估计过程. 假设已知压缩率 $\rho=0.8$,SNR=2dB,原始信号维度 $N=200$,若观测信号能量 E_Y 为 1.7593,则通过查表可知稀疏信号稀疏率为 0.6,稀疏度估计值为 $N \times 0.6 = 120$. 根据稀疏度估计值可进一步优化采样率,降低采样开销.

4 实验结果与分析

本文应用归一化均方误差(Normalized Mean Square Error, NMSE)验证稀疏度估计算法性能,其定义如下

$$\text{NMSE} = E \left[\frac{(\hat{\sigma} - \sigma)^2}{\sigma} \right] \quad (26)$$

其中, $\hat{\sigma}$ 表示稀疏率估计值, σ 表示真实稀疏率, $E[\cdot]$ 表示取期望值,实验结果由 1000 次 Monte Carlo 实验求平均得到.

为验证 3.2 节理论推导的正确性,图 1 给出了采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 极限特征值概率密度函数的理论推导结果与仿真结果,其中各参数设定如下: $\rho=0.8$, $\sigma=0.6$, $N=128$, SNR=0dB,理论推导结果由式(5)和式(19)联合求解所得. 从图 1 可以看出,仿真结果与理论推导结果基本一致.

当信噪比 SNR=0dB,压缩率 $\rho=0.8$ 时,本文算法与文献[10]算法在不同稀疏率条件下的稀疏度估计性能对比如图 2 所示. 可以看出,随着稀疏率 σ 变大,本文算法和文献算法稀疏度估计性能都有所提升. 本文算法稀疏度估计性能明显优于文献算法. 当稀疏率 σ 为 0.5 时,文献算法估计误差 $\text{NMSE} = 5.5 \times 10^{-3}$,而本文算法估计误差仅为其 50%, $\text{NMSE} = 2.7 \times 10^{-3}$,这主要因为文献算法仅考虑了采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y(N)$ 的最大特征值,而本文算法综合考虑了 $\mathbf{R}_Y(N)$ 极限特征值

概率分布的整体情况. 另外,在计算复杂度方面,本文算法也明显优于文献算法,文献算法既要计算观测信号采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_y(N)$,又要在此基础上计算其最大特征值 λ_{\max} ,求取矩阵特征值本身就是一个计算复杂度较高的过程,而本文算法仅需计算观测信号能量,就可查表得到稀疏率估计值 $\hat{\sigma}$. 图 3 表示的是信噪比对不

同稀疏度估计算法性能的影响. 可以看出,不同信噪比下本文算法依然优于文献算法,且信噪比对文献算法影响较大,而对本文算法影响较小,这主要因为本文算法在稀疏度估计过程中充分考虑了信噪比的影响,信噪比对本文算法的影响主要集中在信噪比估计精度上.

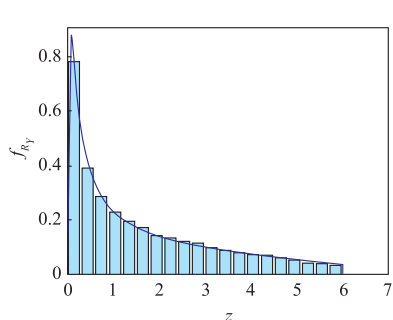


图1 协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_y(N)$ 的理论及仿真特征值分布

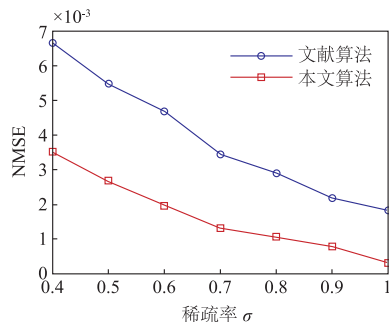


图2 不同算法稀疏度估计性能与稀疏度的关系

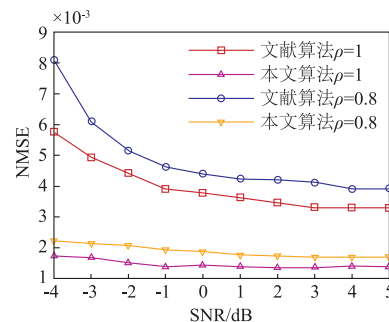


图3 不同算法稀疏度估计性能与信噪比的关系

下面测试观测数据量对本文算法稀疏度估计性能的影响,结果如图 4 所示. 可以看出,随着观测数据量的增加,算法估计性能明显改善. 大维随机矩阵理论指出,随着随机矩阵维数的增大,其经验谱分布会收敛于极限谱分布函数,本文稀疏度估计算法便基于此,所以随着数据量的增大,采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_y(N)$ 的特征值概率分布收敛于极限谱分布函数,稀疏度估计性能越来越好. 同时,通过图 4 还可以看出压缩率对估计性能的影响,压缩率越大,估计性能越好. 这是因为压缩率越大,观测数据包含的信息量越大. 该结论表明,本文算法可通过增大采样开销降低稀疏度估计误差. 图 5 也验证了这一结论.

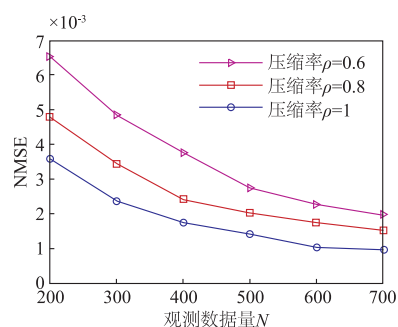


图4 本文算法稀疏度估计性能与观测数据量的关系

5 结论

信号的稀疏度直接关系到压缩采样率的设定、测量矩阵的构造以及信号的精确重构,但该先验信息往往受限,且针对稀疏度估计的研究还较少. 本文从大维随机矩阵谱分析理论出发,针对观测数据的随机性,理论分析了采样协方差矩阵的极限特征值概率分布,推

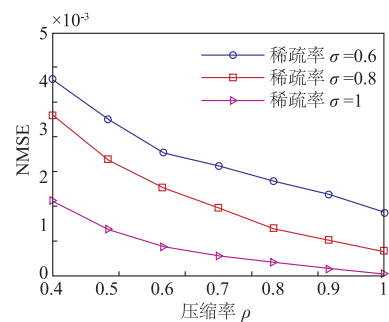


图5 本文算法稀疏度估计性能与压缩率的关系

导得到观测信号能量与压缩率 ρ 、稀疏率 σ 和信噪比 SNR 之间的对应关系,并在此基础上提出一种基于观测信号能量的稀疏度估计算法,相对于已有稀疏度估计算法,该算法仅需计算观测信号能量,故计算复杂度较低,且本文算法综合考虑了采样协方差矩阵的极限特征值概率分布特征,故稀疏度估计性能较好,以上结论在仿真实验中得到有效验证.

参考文献

- [1] Sun H, Nallanathan A, Wang C X. Wideband spectrum sensing for cognitive radio networks: a survey [J]. IEEE Wireless Communications, 2013, 20(2): 74-81.
- [2] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [3] Elzanati A M, Abdelkader M F, Seddik K G. Adaptive spectrum hole detection using sequential compressive sensing [A]. 2014 International Wireless Communications and Mobile Computing Conference [C]. Nicosia: IEEE, 2014. 1081-1086.
- [4] 王强, 李佳, 沈毅. 压缩感知中确定性测量矩阵构造算法

- 综述[J]. 电子学报, 2013, 41(10): 2041–2050.
Wang Qiang, Li Jia, Shen Yi. A survey on deterministic measurement matrix construction algorithms in compressive sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10): 2041–2050. (in Chinese)
- [5] 王伟刚, 杨震, 顾彬. 基于观测矩阵优化的自适应压缩频谱感知[J]. 通信学报, 2014, 35(8): 33–39.
Wang Wei-gang, Yang Zhen, Gu Bin. Adaptive compressed spectrum sensing based on optimized measurement matrix[J]. Journal on Communications, 2014, 35(8): 33–39. (in Chinese)
- [6] 田文彪, 康健, 张洋, 芮国胜, 张海波. 基于卡尔曼滤波的压缩感知弱匹配去噪重构[J]. 电子学报, 2014, 42(6): 1061–1067.
Tian Wen-biao, Kang Jian, Zhang Yang, Rui Guo-sheng, Zhang Hai-bo. Weakly matching pursuit denoising recovery for compressed sensing based on kalman filtering[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(6): 1061–1067. (in Chinese)
- [7] Jin S, Zhang X. Collaborative compressive spectrum sensing with missing observations for cognitive radio networks [A]. 2014 IEEE Global Communications Conference[C]. Austin; IEEE, 2014. 828–833.
- [8] Malioutov D M, Sanghavi S R, Willsky A S. Compressed sensing with sequential observation [A]. 2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing[C]. Las Vegas; IEEE, 2008. 3357–3360.
- [9] Wang Y, Tian Z, Feng C Y. Sparsity order estimation and its application in compressive spectrum sensing for cognitive radios[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2012, 11(6): 2116–2125.
- [10] Sharma S K, Chatzinotas S, Ottersten B. Compressive sparsity order estimation for wideband cognitive radio receiver [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(19): 4984–4996.
- [11] Jin Y, Rao B D. Support recovery of sparse signals in the presence of multiple measurement vectors [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(5): 3139–3157.
- [12] Tulino A M, Verdu S. Random matrix theory and wireless communications[J]. Foundations and Trends in Communications and Information Theory, 2004, 1(1): 1–182.
- [13] Zeng Y, Liang Y C. Eigenvalue based spectrum sensing algorithms for cognitive radio[J]. IEEE Transactions on Communications, 2009, 57(6): 1784–1793.
- [14] Voiculescu D. Multiplication of certain non-commuting random variables[J]. Journal of Operator Theory, 1987, 18(2): 223–235.
- [15] Voiculescu D. Addition of certain non-commuting random variables [J]. Journal of Functional Analysis, 1986, 66(3): 323–346.
- [16] Stathakis E, Jalden J, Rasmussen L K. Uniformly improving maximum likelihood SNR estimation of known signals in gaussian channels [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(1): 156–167.
- [17] Sharma S K, Chatzinotas S, Ottersten B. Eigenvalue based sensing and SNR estimation for cognitive radio in presence of noise correlation [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2013, 62(8): 3671–3684.

作者简介



裴立业 (通信作者) 男, 1987 年生于河北石家庄. 现为信息工程大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为压缩感知、宽带信号检测与通信信号盲处理.
E-mail: ly_wei@yeah.net



江桦 男, 1956 年生于江苏南通. 信息工程大学信息工程学院教授、博士生导师. 主要研究方向为通信信号处理、认知无线电.