

# 分段线性混沌系统的构造研究

李冠林,陈希有

(大连理工大学电气工程与应用电子技术系,辽宁大连 116023)

**摘 要:** 本文基于异宿轨道 Shilnikov 定理,研究了一类分段线性混沌系统的构造方法.这类混沌系统含有两个或两个以上平衡点,且在各个平衡点处具有相同的雅戈比矩阵.通过改变系统平衡点和转换平面的个数及相对位置,得到了这类混沌系统的若干形式.进一步地,将三维系统的构造推广到高维系统,又得到了四维混沌系统的若干形式.最后给出了具体的实现电路.

**关键词:** 混沌系统;分段线性;Shilnikov 定理;异宿轨道

**中图分类号:** TN710; O415.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 09-1814-05

## Design of Piecewise Linear Chaotic System

LI Guan-lin, CHEN Xi-you

(Department of Electrical and Electronics Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, China)

**Abstract:** The construction of a kind of piecewise linear chaotic system is investigated based on the heteroclinic shilnikov theorem. These systems have at least two equilibriums and at each equilibrium they have the same Jacobian matrix. According to the amount of the equilibriums and the relative positions of the separating planes, some different chaotic systems of this kind can be obtained. Furthermore, the proposed method is extended to the construction of the higher dimensional systems, and some 4-D chaotic systems are also obtained. Finally, the circuit implementation of the system is given.

**Key words:** chaotic system; piecewise linear; Shilnikov theorem; heteroclinic orbit

### 1 引言

自 20 世纪 60 年代 Lorenz 系统被发现以来,许多新颖的混沌系统相继被提出<sup>[1~4]</sup>.这些系统的提出,促使混沌理论研究不断深入,并为混沌在工程技术领域中的应用提供了支持.尽管目前已经有很多混沌系统被提出,但如何根据实际需要来构造所需的混沌系统仍然是十分值得研究的课题<sup>[5,6]</sup>.

构造混沌系统必须深入理解混沌产生的机制,Shilnikov 定理正是判断系统是否存在混沌现象的重要理论依据之一.由于 Shilnikov 定理揭示了混沌产生的机制,因此,它不仅可用于证明系统中是否存在混沌现象<sup>[7~9]</sup>,同时也可以作为构造混沌系统的依据<sup>[10]</sup>.

分段线性系统是一种特殊的非线性系统,在各个线性区域内系统的动力学行为按照线性规律变化.相对其它复杂非线性系统,分段线性系统的分析要相对简单.蔡氏电路是分段线性混沌系统研究的典范<sup>[11]</sup>.此外,利用其他分段线性函数,如阶跃函数,绝对值函数等也可以构造分段线性混沌系统<sup>[12~16]</sup>.文献<sup>[17]</sup>利用多段分

段线性函数实现了多涡卷混沌系统,文献<sup>[18]</sup>采用开关式分段线性控制器实现了线性系统的混沌化.

本文基于异宿轨道 Shilnikov 定理,提出了一类分段线性混沌系统的构造方法.在系统雅戈比矩阵不变的情况下,只需设计相应平衡点和转换平面就可以得到所需的混沌系统,构造方法简单,且容易电路实现.

### 2 Shilnikov 定理

Shilnikov 定理是研究动力系统混沌现象的有效工具<sup>[19]</sup>,本节将介绍该定理在三维耗散连续系统中的两种表述,关于更高维数系统的 Shilnikov 定理在文献<sup>[20]</sup>中有阐述.

考察一个三维自治动力系统:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), t \in R, x \in R^3 \quad (1)$$

其中,  $f: R^3 \rightarrow R^3$  属于  $C^r (r \geq 2)$ , 并且  $x_e \in R^3$  是系统的一个平衡点,  $f(x_e) = 0$ . 如果系统在  $x_e$  点的雅戈比矩阵  $J = Df(x_e)$  具有如下形式的特征值:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 且  $\lambda_1 < 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ , 其中,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  均为实数, 那么称该平衡点  $x_e$  为双

曲鞍焦点.

**定理 1(同宿轨道 Shilnikov 定理<sup>[19]</sup>):**给定如式(1)所示的三维自治系统,如果满足以下条件,则在系统式(1)及其相应的扰动系统中存在 Smale 马蹄混沌:

- (1) 平衡点  $x_e$  为鞍焦点,并且满足如下 Shilnikov 不等式,  $| \lambda_1 | > | \lambda_2 | > 0$ ;
- (2) 存在通过平衡点  $x_e$  的一条同宿轨道  $H$ .

**定理 2(异宿轨道 Shilnikov 定理<sup>[19]</sup>):**给定如式(1)所示的三维自治系统,令  $x_{e1}$  和  $x_{e2}$  分别为系统式(1)的两个不同的平衡点,如果满足以下条件,则式(1)所示系统及其扰动系统存在 Smale 马蹄混沌:

- (1)  $x_{e1}$  和  $x_{e2}$  均为鞍焦点,并且满足如下 Shilnikov 不等式,  $| \lambda_i | > | \lambda_j | > 0, (i=1,2)$ ,同时满足  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  或者  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ;
- (2) 存在连接  $x_{e1}$  和  $x_{e2}$  的异宿环(heteroclinic loop)  $H_i$ ,它是由两个异宿轨道  $H_i(i=1,2)$  构成的.

Shilnikov 定理是分析连续时间混沌系统的有效工具.分析中困难的是如何找到同宿轨道和异宿轨道.文献[9]研究了改进的分段线性 Lorenz 系统中存在同宿轨道和异宿轨道的条件,为寻找和构造这两种轨道提供了一定的依据.

假定分段线性系统中存在两个平衡点  $P^+$  和  $P^-$ ,它们具有相同的特征矩阵,并且在平衡点处具有一个负实根和两个正实部的共轭复根.  $S$  为转换平面,  $P^+$  和  $P^-$  对称分布在  $S$  两侧,  $E^u(P^\pm)$  为过平衡点的二维不稳定子空间,  $E^s(P^\pm)$  为过平衡点的一维稳定子空间,  $l$  为  $E^u(P^+)$  与平面  $S$  的交线,  $h$  为  $E^u(P^-)$  与平面  $S$  的交线;  $M$  为  $E^u(P^+)$  与转换平面  $S$  的交点,  $N$  为  $E^u(P^-)$  与转换平面  $S$  的交点,如图 1 所示.

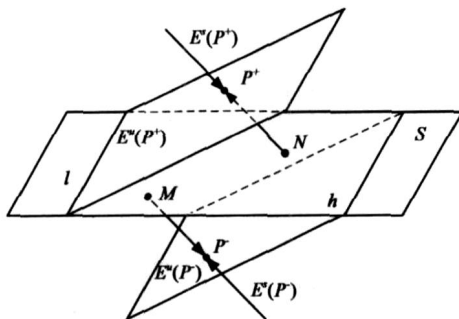


图 1 系统在平衡点处的特征空间示意图

如果存在参数能够满足点  $M$  在交线  $l$  上,那么通过累试法总可以找到从  $P^+$  到  $P^-$  的一条异宿轨道<sup>[9]</sup>.同理由于对称性,如果存在参数能够满足点  $N$  在交线  $h$  上,也可以找到从  $P^-$  到  $P^+$  的异宿轨道.在满足 Shilnikov 不等式条件下,可以证明系统在 Shilnikov 意义下是混沌的.显然寻找异宿轨道的方法,可以用于构造异宿轨道.

### 3 混沌系统构造

本节根据 Shilnikov 定理,通过寻找异宿轨道,构造了一类分段线性混沌系统.

假定系统在各个平衡点处的雅戈比矩阵相同,形式如下:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (2)$$

选择合适的参数  $a$  和  $b$ ,使系统在平衡点处的特征值和  $\pm i$  满足  $< 0, > 0, | \lambda_1 | > | \lambda_2 |$ . 假定  $u, v$  和  $w$  分别为平衡点处相应于  $\pm i$  的特征向量.令  $n = v \times w$ ,  $n$  为  $v$  和  $w$  所构成平面的法相量.特征向量  $u$  及法相量  $n$  分别为  $(I - J)u = 0, n^T(I - J) = 0$ , 计算得,

$$u = [0, 0, 1]^T, \quad n = [0, 0, 1]^T \quad (3)$$

由式(3)可以确定系统在平衡点  $P_i(i=1,2, \dots)$  处相应于  $\pm i$  的一维稳定子空间  $E^s(P_i)$  为过平衡点  $P_i$  与  $z$  轴平行的直线,而相应于  $\pm i$  的二维不稳定子空间  $E^u(P_i)$  为过平衡点  $P_i$  与  $z$  轴垂直的平面.

若选择两个平衡点  $P_1(0, 1, 1), P_2(1, 0, 0)$ , 则  $E^u(P_1)$  与  $E^s(P_2)$  交于点  $A(1, 0, 1)$ ,  $E^u(P_2)$  与  $E^s(P_1)$  交于点  $D(0, 1, 0)$ . 过点  $A, D$  及点  $E(0, 0, 1)$  作转换平面  $S$ , 平面方程为  $y + z = 1$ .

$$E^u(P_1) \cap S = AE, \quad E^s(P_2) \cap S = A; \quad E^u(P_2) \cap S = CD, \quad E^s(P_1) \cap S = D.$$

显然,点  $A$  在  $S$  与  $E^u(P_1)$  的交线上,点  $D$  在  $S$  与  $E^u(P_2)$  的交线上,可以确定,在一定参数下存在连接  $P_1$  和  $P_2$  的异宿轨道.因此,该系统在参数满足 Shilnikov 不等式的条件下,存在 Smale 马蹄混沌.

根据上述方法确定的系统方程形式如下,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - f \quad (4)$$

$$\text{其中, } f = \begin{cases} [0, 1, 1]^T, & y + z \geq 1 \\ [1, 0, 0]^T, & y + z < 1 \end{cases} \quad (5)$$

当参数  $a = 0.2, b = -1$  时系统的 Lyapunov 指数为  $(0.11, 0, -1.14)$ , 有一个指数为正,系统处于混沌状态,其混沌吸引子如图 2(a) 所示.

可见,该系统在形式上分两部分:一部分决定系统在平衡点处的雅戈比矩阵,另一部分决定系统的平衡点及相应转换平面.改变平衡点位置及相应的转换平面,可以得到混沌系统的其它形式.若增加平衡点的个数,必须相应的改变转换平面,以便将每个平衡点分隔在不同的区域内.混沌系统的方程如式(4)所示,其中的控制项  $f$  随平衡点和转换平面的不同可以有不同的形式,见表 1,相应的混沌系统轨迹如图 2 所示.

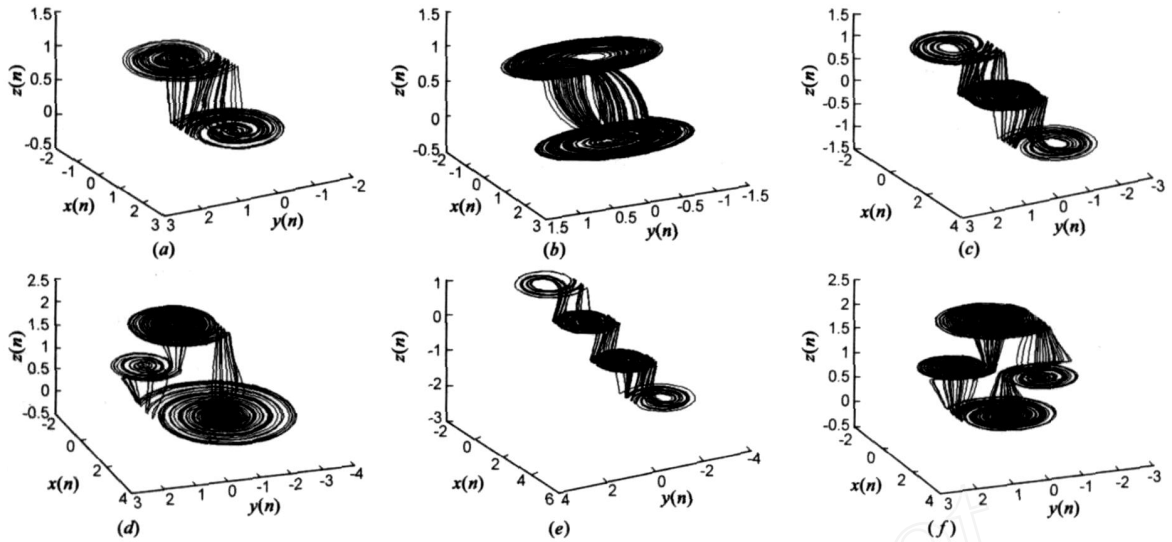


图2 混沌系统(4)在不同的控制项  $f$  作用下的相轨迹

表1 控制项  $f$  的不同形式及相应混沌系统的参数值

平衡点	转换平面	控制项 $f$	参数值	相图
2个	$x - z = 0$	$f = \begin{cases} [0, 0, 1]^T, x - z < 0 \\ [1, 0, 0]^T, x - z \geq 0 \end{cases}$	$a = 0.1$ $b = -1$	图2(b)
3个	$y + z = 1$ $y + z = -1$ 相互平行	$f = \begin{cases} [0, 0, 1]^T, y + z \geq 1 \\ [1, 0, 0]^T, -1 \leq y + z < 1 \\ [2, -1, -1]^T, y + z < -1 \end{cases}$	$a = 0.2$ $b = -1$	图2(c)
3个	$z - 0.5y = 0.9$ $y + z = 1$ 平面相交	$f = \begin{cases} [0.5, 0.2, 2]^T, y + z > 1 \& z - 0.5y \geq 0.9 \\ [0, 1, 1]^T, y + z > 1 \& z - 0.5y < 0.9 \\ [1, -1, 0]^T, y + z \leq 1 \end{cases}$	$a = 0.12$ $b = -1$	图2(d)
4个	$y + z = 1$ $y + z = -1$ $y + z = -3$ 相互平行	$f = \begin{cases} [0, 1, 1]^T, y + z > 1 \\ [1, 0, 0]^T, -1 \leq y + z < 1 \\ [2, -1, -1]^T, -3 \leq y + z < -1 \\ [3, -2, -2]^T, y + z < -3 \end{cases}$	$a = 0.2$ $b = -1$	图2(e)
4个	$z - 0.5y = 0.9$ $y + z = 1$ 平面相交	$f = \begin{cases} [0.5, 0.2, 2]^T, y + z > 1 \& z - 0.5y \geq 0.9 \\ [0, 1, 1]^T, y + z > 1 \& z - 0.5y < 0.9 \\ [1, -1, 0.8]^T, y + z \leq 1 \& z - 0.5y \geq 0.9 \\ [0.5, -0.2, 0]^T, y + z \leq 1 \& z - 0.5y < 0.9 \end{cases}$	$a = 0.15$ $b = -1$	图2(f)

上述构造系统含有两个参数  $a$  和  $b$ , 分别决定了系统在平衡点处的特征值, 即  $\lambda_1 = b, \lambda_2 = a/2$ . 为满足 shilnikov 不等式, 参数  $a$  和  $b$  应满足  $|b| > |a|/2, ab < 0$ . 当参数  $a$  和  $b$  的取值在一定范围变化时, 所构造系统仍能处于混沌状态, 系统具有结构稳定性. 控制项  $f$  决定了系统的平衡点的位置, 平衡点被各个转换平面分隔在不同的线性区域.

#### 4 高维混沌系统

依据所得到的三维混沌系统, 向四维系统进行拓展, 得到若干分段线性四维混沌系统. 下面给出一个四维混沌系统方程,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} - f_h \quad (6)$$

其中控制项  $f_h$  决定系统平衡点及转换平面,

$$f_h = \begin{cases} [0, 1, 1, 1]^T, y + z \geq 1 \\ [1, 0, 0, 0]^T, y + z < 1 \end{cases} \quad (7)$$

当参数  $a = b = 0.18$  时, 系统的 Lyapunov 指数为  $(0.11, 0, -0.04, -1.1)$ , 有一个指数为正, 系统处于混沌状态, 其相轨迹如图3所示. 对比式(6)和式(4), 可以发现两式的雅戈比矩阵的特征值具有某些联系, 两个系统的实部为正的共轭复特征值是完全相同的, 而式(4)的负的实特征值由式(6)的实部为负的共轭复特征值取代. 对比式(7)和式(5)可以看到, 四维混沌系统的控制项  $f_h$  是三维系统控制项

$f$  的扩展. 显然, 控制项  $f_h$  还可以有许多其它的形式, 对应不同的四维混沌系统, 见表2.

表2 控制项  $f_h$  的不同形式及系统参数值

控制项 $f_h$	参数值
$f_h = \begin{cases} [0, 1, 1, 1]^T, y + z \geq 1 \\ [1, 0, 0, 0]^T, y + z < 1 \end{cases}$	$a = 0.18$ $b = 0.2$
$f_h = \begin{cases} [0, 1, 1, 1]^T, y + z \geq 1 \\ [1, 0, 0, 0]^T, -1 \leq y + z < 1 \\ [2, -1, -1, -1]^T, y + z < -1 \end{cases}$	$a = 0.16$ $b = 0.16$
$f_h = \begin{cases} [0.5, 0.2, 2, 1]^T, y + z > 1 \& z - 0.5y \geq 0.9 \\ [0, 1, 1, 1]^T, y + z > 1 \& z - 0.5y < 0.9 \\ [1, -1, 0, 1]^T, y + z \leq 1 \end{cases}$	$a = 0.15$ $b = 0.15$
$f_h = \begin{cases} [0, 0, 1, 1]^T, y + z \geq 1 \\ [1, 0, 0, 0]^T, -1 \leq y + z < 1 \\ [2, -1, -1, -1]^T, -3 \leq y + z < -1 \\ [3, -2, -2, -2]^T, y + z < -3 \end{cases}$	$a = 0.15$ $b = 0.15$

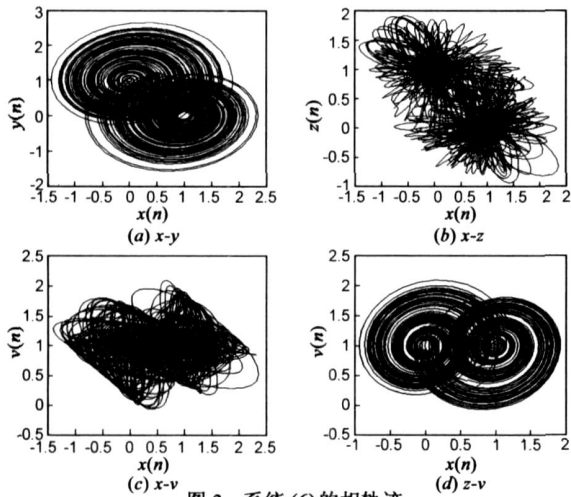


图3 系统(6)的相轨迹

### 5 混沌系统电路实现

根据系统方程形式,其电路实现可分为两部分,主电路和控制电路.当各系统的雅戈比矩阵形式相同时,主电路结构一致.不同的控制电路对应不同的平衡点及相应的转换平面.

本文给出四维混沌系统(6)的电路实现,如图4所示.其中,图4(a)为系统的主电路,图4(b)为系统的控制电路, $x, y, z, v$ 为系统的状态变量, $m, n, p$ 为控制电路的输出信号, $f_1$ 为开关 $S_1$ 的控制信号.电路实现中采用的运放为LM324,电压比较器为LM311,开关为CD4066B.电路参数如图4所示,对应系统参数为 $a = b = 2$ ,实测得到的相轨迹如图5所示.

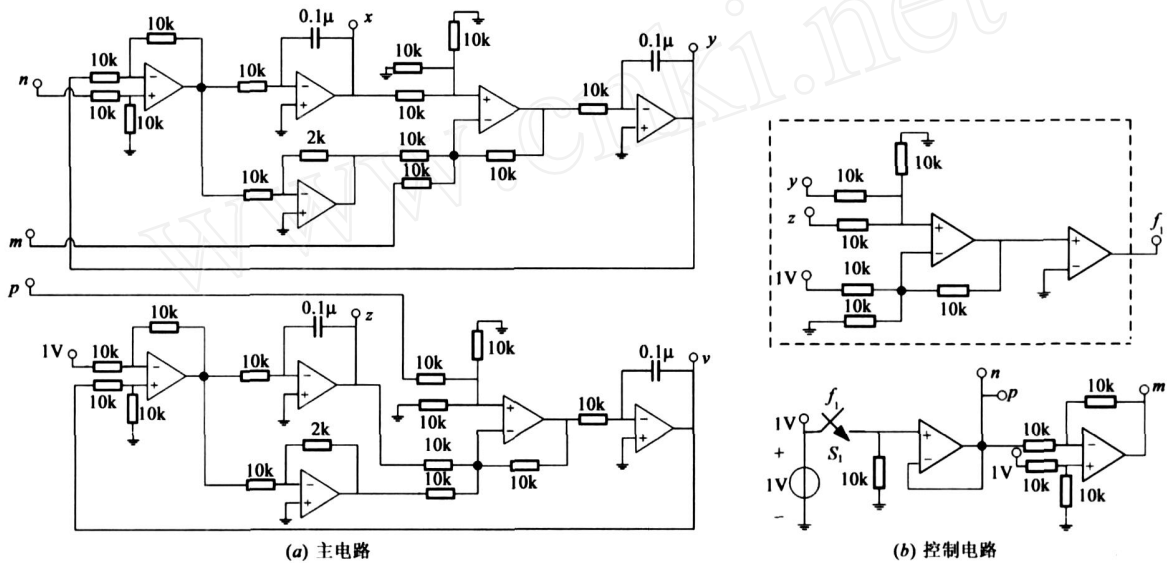


图4 混沌系统(6)的电路实现

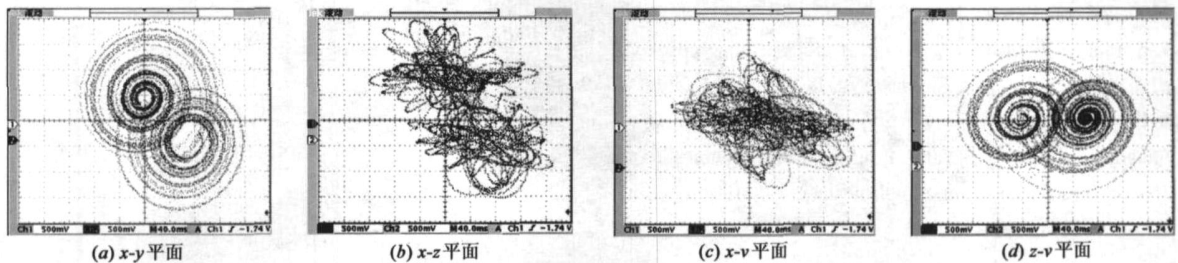


图5 电路实现系统(6)的相轨迹

### 6 结论

本文基于 Shilnikov 异宿轨道定理,提出了一类分段线性混沌系统的构造方法.由于假定系统在各个平衡点处的雅戈比矩阵相同,因此只要确定平衡点及相应转换平面即可实现所需混沌系统.文中进一步将此方法向高维系统推广,给出了四维混沌系统的若干形式.根据所构造系统方程的形式,这类混沌系统的电路实

现可以分为两部分,一部分是系统的主电路,用于实现系统的雅戈比矩阵部分;另一部分是控制电路,用于实现系统的平衡点在各个转换平面之间的转换.若所构造系统的雅戈比矩阵相同,则只需改变相应控制电路即可,从而使得电路实现更加简明而系统化.

### 参考文献:

[1] Rossler O E. An equation for continuous chaos[J]. Phys Lett

- A, 1976, 57(5) :397 - 398.
- [2] Chua L O, Lin G N. Canonical realization of Chua's circuit family[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1990, 37(7) :885 - 902.
- [3] Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1999, 9(7) :1465 - 1466.
- [4] Qi G, Chen G. Analysis of a new chaotic system[J]. Physic A, 2005, 352(2-4) :295 - 308.
- [5] 李清都, 杨晓松. 二维混沌信号产生器的设计[J]. 电子学报, 2005, 33(7) :1299 - 1302.  
LI Qing-du, YANG Xiao-song. 2D chaotic signals generator design [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(7) :1299-1302. (in Chinese)
- [6] 李清都, 杨晓松. 三维混沌信号产生器的设计[J]. 电子学报, 2007, 35(3) :497 - 500.  
LI Qing-du, YANG Xiao-song. 3D chaotic signals generator design [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(3) :497-500. (in Chinese)
- [7] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T. The double scroll family [J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1986, 33(11) :1073 - 1118.
- [8] Tokunaga R, Matsumoto T, Chua L O. The piecewise-linear Lorenz circuit is chaotic in the sense of shilnikov [J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1990, 37(6) :766 - 786.
- [9] Li Z, Chen G R, Halang W A. Homoclinic and heteroclinic orbits in a modified Lorenz system [J]. Information Sciences, 2004, 165(3-4) :235 - 245.
- [10] Tinsu Zhou, Guanrong Chen, Qigui Yang. Constructing a new chaotic system based on the Silnikov criterion[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2004, 19(4) :985 - 993.
- [11] L P Shil'nikov. Chua's circuit: rigorous results and future problems[J]. IEEE Trans Circuits Syst I. 1993, 40(10) :784 - 786.
- [12] J C Sprott. A new class of chaotic circuit [J]. Phys Lett A, 2000, 266(1) :19 - 23.
- [13] K S Tang, K F Man, G Q Zhong, et al. Generating chaos via  $x| x|$  [J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 2001, 48(5) :636 - 641.
- [14] Qingdu Li, Xiao-Song Yang, Fangyan Yang. Multiple-scrolls chaotic attractor and circuit implementation[J]. Electron Lett, 2003, 39(18) :1306 - 1307.
- [15] Simin Yu, Jinhua Lü, Guanrong Chen. A family of  $n$ -scroll hyperchaotic attractors and their realization [J]. Phys Lett A, 2007, 364(3-4) :244 - 251.
- [16] 禹思敏, 丘水生.  $N$ -涡卷超混沌吸引子产生与同步的研究[J]. 电子学报, 2004, 32(5) :814 - 818.  
Yu Si-min, Qiu Shui-sheng. Study on generation and synchronization of  $n$ -scroll hyperchaotic attractors [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(5) :814 - 818. (in Chinese)
- [17] M E Yalcin, S Ozoguz, J A K Suykens, et al.  $N$ -scroll chaos generators: a simple circuit model [J]. Electron Lett, 2001, 37(3) :147 - 148.
- [18] J L Ü T Zhou, G Chen, et al. Generating chaos with a switching piecewise-linear controller [J]. Chaos, 2002, 12(2) :344 - 349.
- [19] Silva C P. Shilnikov's theorem—a tutorial [J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1993, 40(10) :675 - 682.
- [20] S Wiggins. Global bifurcation and chaos: applied mathematical sciences [M]. New York: Springer-Verlag, 1988. 73.

#### 作者简介:



**李冠林** 女, 1979年3月生于吉林省吉林市. 2002年, 2004年和2008年分别获哈尔滨工业大学工学学士、硕士和博士学位. 现为大连理工大学讲师. 主要研究方向为混沌理论及其在电能变换中的应用.

E-mail: lghit@yahoo.com.cn



**陈希有** 男, 1962年1月生于黑龙江省肇东市. 分别于1982, 1985和2000年, 在哈尔滨工业大学获得学士、硕士和博士学位. 现任大连理工大学教授, 博士生导师. 主要研究方向: 绿色电能变换技术, 现代电气传动技术.

E-mail: chenxy@dlut.edu.cn