

伯努利生成矩阵码中的统计力学性质

孟凡辉¹, 马 啸^{2,3*}

(1. 中山大学系统科学与工程学院, 广东广州 510006; 2. 中山大学计算机学院, 广东广州 510006;
3. 广东省信息安全技术重点实验室, 广东广州 510006)

摘要: 从统计物理的角度, 结合自旋玻璃理论与复杂网络理论, 系统地研究了伯努利系统低密度生成矩阵码的统计力学性质. 首先给出系统低密度生成矩阵码的伯努利构造、编译码框架, 并讨论节点度分布以及正规图与Erdős-Rényi (ER) 随机图的关系. 然后研究自旋玻璃理论框架下的编译码模型、码本与微观构型的关系、空腔方法与消息传递方程, 提出针对系统码的种群动力学算法来高效分析其渐近性能. 最后提出正规图配置模型 (Normal Graph Configuration Model, NGCM) 生成具有连接偏好性的正规图, 研究异配性对置信传播 (Belief Propagation, BP) 译码算法性能的影响, 并进一步分析其机理. 仿真结果表明, 种群动力学算法与BP译码算法本质上相同, 但前者不局限于某个具体的码, 因此在分析码集的渐近性能时更具优势. 此外, 适当的异配性能够显著提升BP算法在瀑布区的译码性能, 获得更低误码率 (Bit Error Rate, BER) 并且降低译码迭代次数 (复杂度).

关键词: 自旋玻璃; 复杂网络; 系统低密度生成矩阵码; 空腔法; 置信传播译码算法; 异配性

基金项目: 国家重点研发计划 (No.2021YFA1000500)

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2024)06-1869-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20230319

Statistical Mechanics Properties of Bernoulli Generator Matrix Codes

MENG Fan-hui¹, MA Xiao^{2,3*}

(1. School of Systems Science and Engineering, Sun Yat-Sen University, Guangzhou, Guangdong 510006, China;

2. School of Computer Science and Engineering, Sun Yat-Sen University, Guangzhou, Guangdong 510006, China;

3. Guangdong Province Key Laboratory of Information Security Technology, Guangzhou, Guangdong 510006, China)

Abstract: From the perspective of statistical physics, with the theory of spin glasses and complex networks, this paper systematically studies the statistical mechanics properties of Bernoulli systematic low-density generator matrix codes. First, we introduce Bernoulli construction of the systematic low-density generator matrix codes, encoding and decoding framework, and discuss the distribution of degree as well as the connection between normal graph and Erdős-Rényi (ER) random graphs. Then, we study the encoding and decoding model under the spin glasses theory, the association between codebook and configuration, cavity method and message-passing equation, and propose the population dynamics algorithm for systematic codes to perform asymptotic performance analysis efficiently. Finally, we propose the normal graph configuration model (NGCM) to generate normal graph with connection preference, study the effect of disassortativity on BP decoding performance and analyze the mechanism. The simulation results show that, although the population dynamics is essentially the same as the BP algorithm, the former is not limited to a concrete code, thus having an advantage in asymptotic analysis for code ensemble. In addition, appropriate disassortativity can significantly improve the BP decoding performance in the waterfall region, achieving lower bit error rate (BER) and reducing the iteration number of decoding (hence the complexity).

Key words: spin glasses; complex networks; systematic low-density generator matrix codes; cavity method; belief propagation decoding algorithm; disassortativity

Foundation Item(s): National Key Research and Development Program of China (No.2021YFA1000500)

1 引言

自旋玻璃 (Spin Glasses, SG) 理论由 Edwards 和 Anderson 于 1975 年首次提出, 最初希望用它来理解无序磁性材料玻璃态的物理本质^[1,2]. 此后, 为研究无序系统中复杂的自由能图景和丰富的动力学行为, 物理学家提出一系列解析方法^[2-4], 例如复本对称方法、复本对称破缺方法、空腔方法等. 经过近 50 年的发展, 该理论在众多领域得到广泛应用, 包括但不限于组合优化、信道编码、人工智能、量子计算、博弈论等. 1989 年, Sourlas 首次建立了纠错码和自旋玻璃模型之间的桥梁^[5], 从此开启了用统计物理方法研究信道编码的新篇章. 该项研究中的码起初被称为 Sourlas 码, 后来发展成现在的低密度生成矩阵 (Low Density Generator Matrix, LDGM) 码^[6]. 在此期间, 大多数研究集中在 Sourlas 码、低密度奇偶校验 (Low-Density Parity-Check, LDPC) 码和 MacKay-Neal 码上. Kabashima 等人^[7]以 Sourlas 码为研究对象, 对比分析了置信传播 (Belief Propagation, BP) 方程和 Thouless-Anderson-Palmer (TAP) 方程的等价性. 文献[8]和文献[9]利用复本对称方法, 研究 LDPC 码和 MacKay-Neal 码的节点度值对渐近性能的影响. Vincente 等人^[10]详细总结了从统计物理视角研究 LDPC 码的相关进展以及使用的理论方法. 2005 年, Montanari 基于自旋玻璃平均场模型, 利用“插值方法”推导出 LDPC 码和 LDGM 码关于最大后验概率 (Maximum A Posteriori, MAP) 译码算法的条件熵下界^[11]. 文献[12]推广了该“插值方法”, 使得推导 MAP 译码算法条件熵下界不再要求校验节点的度分布是凸函数. Migliorini 等人^[13]分析了 LDPC 码在低温下的译码性能相图, 基于复本对称破缺理论, 给出了比复本对称方法更逼近香农极限的仿真结果. Huang 等人^[14]以 Sourlas 码为研究对象, 基于空腔磁场的一阶修正项提出了“倏逝空腔磁场传播”方程, 进一步提升了译码性能. Aref 等人^[15]借助复本对称空腔方法和种群动力学算法, 证明了有损信源压缩中的空间耦合 LDGM 码能逼近率失真极限. Urbanke 等人^[16]将空间耦合看作一种证明技巧, 证明了复本对称方法推导的条件熵下界是精确的. Barbier 等人^[17]将“自适应路径插值方法”推广至稀疏因子图模型, 并验证了在二进制擦除 (Binary Erasure Channel, BEC) 信道下复本对称方法预测结果的准确性.

早期相关工作主要研究在不同码集和自旋玻璃模型之间如何建立映射, 以及利用信息论工具验证复本对称方法解的准确性. 近些年工作集中在用复本对称方法研究码集的统计特性, 例如译码阈值、阈值饱和现象、容量可达性证明等. 然而, 这些工作大都集中对现有的码进行理论推导证明, 并没有设计出新的码. 同时, 现有自旋玻璃模型大都针对非系统形式的码, 并且

假设粒子间的相互作用是随机的. 然而, 复杂网络理论揭示了物理世界网络中, 节点交互的异质性以及动力学过程的复杂性. 如何基于自旋玻璃理论, 同时结合复杂网络理论, 设计出性能更好的编译码方案, 是一个值得深入研究的方向. 系统 LDGM 码是一种由生成矩阵定义的信道编码, 其生成矩阵的稀疏性使得在 BP 迭代译码时能获得较好性能^[18]. 该码具有码率灵活、误码性能可预测、适用场景广泛等优点^[19,20], 并且对应的系统卷积低密度生成矩阵 (Systematic Convolutional Low Density Generator Matrix, SC-LDGM) 码在误比特率意义下是容量可达的^[21].

本文基于自旋玻璃理论和复杂网络理论, 分析了伯努利系统 LDGM 码的统计特性, 以及正规图的异配性对译码性能的影响. 首先给出系统 LDGM 码的伯努利构造和编译码框架, 以及正规图的拓扑特性, 包括度分布, 以及与 ER 随机图的关系. 然后研究自旋玻璃理论框架下对应的编译码模型, 给出码本的重量谱与微观构型的能量谱. 接着从“空腔法”推导并用磁场消息表征 BP 方程, 并提出针对系统 LDGM 码的种群动力学算法来分析渐近性能. 最后在原有配置模型的基础上, 提出正规图配置模型 (Normal Graph Configuration Model, NGCM) 来生成具有一定异配性的正规图, 进一步研究异配性对 BP 译码性能的影响, 并分析在瀑布区获得增益的机理. 仿真结果表明, 种群动力学算法能准确预测码集的平均性能, 可将其看作密度进化 (Density Evolution, DE) 的数值算法. 同时发现, 适当增加正规图的异配性能够显著提升 BP 译码性能, 并有效降低算法迭代次数.

2 伯努利系统低密度生成矩阵码

该部分首先介绍伯努利系统低密度生成矩阵码定义方式以及编译码框架, 然后研究正规图中节点的度分布, 最后给出正规图与 ER 随机图的关系.

2.1 生成矩阵和编译码框架

首先给出系统低密度生成矩阵码的构造. 令 $\mathbb{F}_2 \triangleq \{0, 1\}$ 是二元域, 线性分组码 $\mathcal{C}[n, k]$ 是定义在该二元域上一个 k 维子空间, 可由生成矩阵 (generator matrix) 或校验矩阵 (parity-check matrix) 刻画, 其中码长为 n , 维数为 k . 系统形式的码集 $\mathcal{C}_s[n, k]$ 可由生成矩阵 $\mathbf{G} = [\mathbf{I} \ \mathbf{P}]$ 定义, 其中, \mathbf{I} 是 k 阶单位阵, \mathbf{P} 是 $k \times (n-k)$ 的随机矩阵, 即

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{0,n-k-1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \cdots & P_{1,n-k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k-1,0} & P_{k-1,1} & \cdots & P_{k-1,n-k-1} \end{pmatrix}$$

矩阵中的每个元素 $P_{i,j}$ 依伯努利分布独立产生, 当 $\Pr\{P_{i,j} = 1\} = \rho \ll 1/2$ 时, 我们称该码集是系统低密度生

成矩阵码. 该码集中所有码的码率 $R = k/n$, 并且不依赖于 \mathbf{P} 的分布.

系统低密度生成矩阵码的编码过程如下: 发送端给定长度为 k 的信息序列 $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})^T \in \mathbb{F}_2^k$, 由生成矩阵 \mathbf{G} 得到长度为 n 的码字 $\mathbf{c} = \mathbf{u}\mathbf{G} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$, 其中 \mathbf{c} 的前 k 位是信息位, 后 $n-k$ 位是校验位. 译码过程如下: 将接收向量 \mathbf{y} 的前 k 位作为正规图上变量节点的半边输入, 后 $n-k$ 位作为校验节点的半边输入, 然后在正规图(如图 1 所示)上进行 BP 迭代译码, 得到估计码字 $\hat{\mathbf{c}}$ 和对应的信息位 $\hat{\mathbf{u}}$.

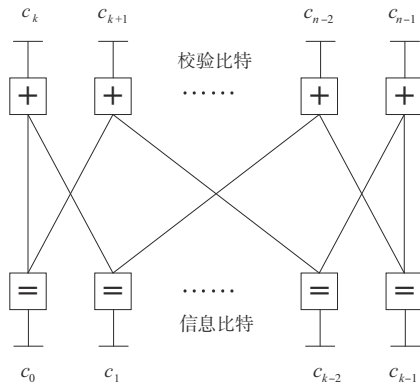


图1 系统低密度生成矩阵码的正规图表示

2.2 度分布

伯努利系统 LDGM 码的正规图可以看作是包含两类节点且同类节点不相连的二分图, 研究其度分布能帮助设计出性能更优的码. 定义 G_v 和 G_c 分别为变量节点和校验节点对应的图层, $p_v(i)$ 和 $p_c(j)$ 分别为对应图层的度分布(未归一化), 则有

$$\begin{cases} p_v(i) = \binom{n-k}{i} \rho^i (1-\rho)^{n-k-i}, 0 \leq i \leq n-k \\ p_c(j) = \binom{k}{j} \rho^j (1-\rho)^{k-j}, 0 \leq j \leq k \end{cases} \quad (1)$$

当 $n, k \rightarrow \infty, \rho \ll 1/2$ 时, 上述度分布近似 ER 网络的泊松分布^[22](未归一化), 即

$$\begin{cases} p_v(i) \approx \frac{[\rho(n-k)]^i}{i!} e^{-\rho(n-k)}, 0 \leq i \leq n-k \\ p_c(j) \approx \frac{(\rho k)^j}{j!} e^{-\rho k}, 0 \leq j \leq k \end{cases} \quad (2)$$

图 2 给出了码率 $R = 1/2, \rho = 0.01$, 不同码长的码中变量节点的度分布情况. 可以看出, 随着码长增加, 伯努利方式生成的结果越来越接近泊松分布.

2.3 正规图与 ER 随机图

ER 随机图^[22]与正规图有深刻的联系, 其节点度分布近似为泊松分布. 如果只关注正规图中变量节点的相关性, 则可以将其映射成只包含 k 个变量节点的 ER

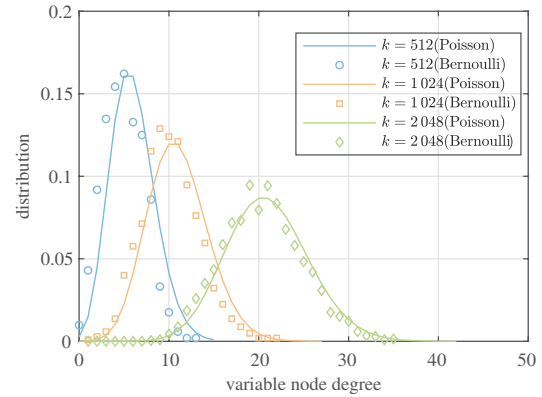


图2 正规图中变量节点的度分布(数据点表示以伯努利方式生成的结果, 实线表示对应 ER 网络的泊松分布)

随机图系综 $\mathcal{A}(k, \rho)$. 映射方式为: 若任意两个变量节点 i 和 j 连到同一校验节点 a , 则认为 i 和 j 之间存在一条连边, 如图 3 所示. 映射后的所有节点及其连边组成了一个 ER 随机网络, 其中连边概率:

$$p = 1 - (1 - \rho^2)^{n-k} \quad (3)$$

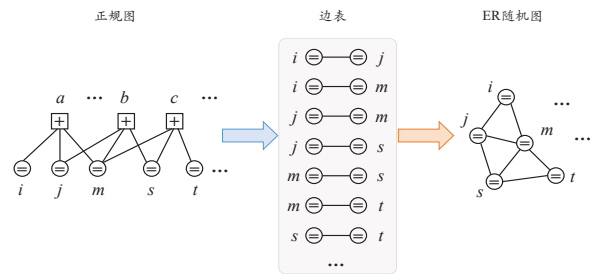


图3 将正规图映射成 ER 随机图

3 自旋玻璃理论

该部分首先介绍自旋玻璃理论框架下的编译码模型, 然后给出码本重量谱与微观构型能量谱, 接着介绍“空腔法”推导消息传递方程, 最后给出分析系统 LDGM 码渐近性能的种群动力学算法.

3.1 编译码模型

数字通信系统模型中, 发送方将信息序列编码、调制, 然后经信道传输. 由于信道存在噪声, 接收方在解调制后要利用译码算法尽可能准确地恢复原始信息序列. 该过程涉及的模块组成一个典型的“无序系统”, 即每次相同的输入会得到不同的输出. 自旋玻璃理论专门研究这类“无序系统”的理论工具, 将信息序列中的 0/1 比特映射成方向朝上/朝下磁针 s , 一个校验方程对应一组磁针间的相互作用. 编码过程为: 从待传输的信息序列 \mathbf{u} 中按某种方式挑选出一组比特, 记为 (u_1, u_2, \dots, u_r) , 然后按照 $s_i = (-1)^{u_i}$ 将其映射成磁针序列 (s_1, s_2, \dots, s_r) , 并计算该组磁针序列的耦合常数

$J_{(s_1, s_2, \dots, s_r)}^0 = s_1 s_2 \dots s_r$, 对应一个校验方程的结果. 码字经过信道时, J^0 可能发生翻转, 记为 J . 译码过程: 基于接收向量 J 寻找系统基态, 系统在该状态对应的磁针微观构型 (configuration) 则对应译码结果. 一般用哈密顿量表示系统的能量, 即

$$H(\mathbf{s}) = - \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_r)} J_{s_1, s_2, \dots, s_r} s_1 s_2 \dots s_r - \sum_{i=1}^N h_i^0 s_i \quad (4)$$

其中, N 表示磁针序列长度, 对应码的维数 k , h_i^0 表示用在磁针 s_i 的外磁场强度.

除使用模拟退火 (Simulated Annealing, SA) 算法寻找系统基态进行译码外^[10], 物理学家提出了与 BP 方程类似的 TAP 方程^[7]. 不同之处在于前者在概率域上更新, 后者在磁场域上更新. TAP 方程为

$$\begin{cases} \delta r_{a \rightarrow i} = \tanh(\beta J_a) \prod_{i \in \partial^+ a} \delta q_{i \rightarrow a} \\ \delta q_{i \rightarrow a} = \tanh\left(\sum_{b \in \partial^+ i} \tanh^{-1}(\delta r_{b \rightarrow i}) + \beta F\right) \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\delta r_{a \rightarrow i}$ 和 $\delta q_{i \rightarrow a}$ 表示对称差, β 为热力学逆温度. 实际译码过程在“西森温度”^[7]下才能达到与 BP 算法相同的性能, AWGN 信道下 $\beta = 10^{\text{SNR}/10}$.

3.2 码本与微观构型

码本的重量谱与微观构型的能量之间有紧密的联系. 对于码长为 n , 维数为 k 的线性分组码, 码本中有 2^k 个合法码字, 对应自旋玻璃模型中 2^k 个微观构型. 由重量枚举函数得出重量谱^[21], 即

$$A_{ij} = \binom{k}{i} \binom{n-k}{j} \rho_i^i (1-\rho_i)^{n-k-j}, 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq n-k \quad (6)$$

其中, $\rho_i = [1 - (1 - 2\rho)^i]/2$. 码本中的每个码字对应一个微观构型, 对于重量为 w 的码字为其赋予一个能级 $E_w = w^2$, 则整个码本 C 的能量可表示为

$$E(C) = \sum_{w=0}^{w_{\max}} A_w E_w \quad (7)$$

其中, w_{\max} 是码本的最大重量, A_w 是能级为 E_w 的微观构型数. 特别地, 码本最小重量对应系统的基态. 图 4 给出了 $n=32, k=16, \rho=0.1$ 时系统 LDGM 码本的重量谱和微观构型的能量谱.

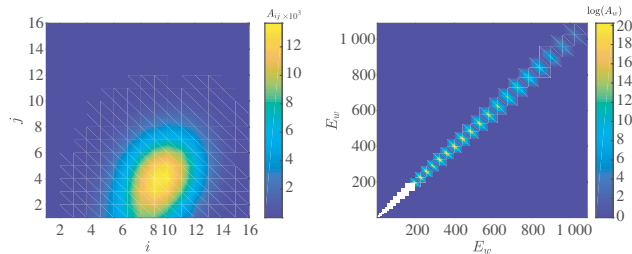


图 4 码本的重量谱和微观构型的能量谱

3.3 空腔法与消息传递方程

空腔方法最早由 Parisi 等人于 1987 年提出, 主要用来求解无序系统中的平均场模型^[2]. 通过引入 Bethe-Peierls 近似, 空腔方法可推导出消息传递方程. Bethe-Peierls 近似的核心思想是: 用一组单磁针自旋概率分布函数的乘积来代替其联合概率分布函数. 以图 5 为例, 对于变量节点 i , 定义 $p_{a \rightarrow i}(s)$ 为 i 只受到校验节点 a 的影响, 其微观状态取值为 s 的概率, $q_{i \rightarrow a}(s)$ 为 i 不受检验节点 a 的影响, 其微观状态取值为 s 的概率. 概率分布函数 $p_{a \rightarrow i}(s)$ 和 $q_{i \rightarrow a}(s)$ 分别可用磁场 $u_{a \rightarrow i}$ 和 $h_{i \rightarrow a}$ 完全表征:

$$\begin{cases} p_{a \rightarrow i}(s) = \frac{e^{\beta u_{a \rightarrow i} s}}{2 \cosh(\beta u_{a \rightarrow i})} \\ q_{i \rightarrow a}(s) = \frac{e^{\beta h_{i \rightarrow a} s}}{2 \cosh(\beta h_{i \rightarrow a})} \end{cases} \quad (8)$$

其中, $u_{a \rightarrow i}$ 被称为空腔偏差, $h_{i \rightarrow a}$ 被称为空腔磁场. 根据空腔法计算配分函数的过程^[23], 可推导出以下空腔磁场传播方程:

$$\begin{cases} h_{i \rightarrow a} = h_i^0 + \sum_{b \in \partial^+ i} u_{b \rightarrow i} \\ u_{a \rightarrow i} = \frac{1}{\beta} \tanh^{-1} \left[\tanh(\beta J_a) \prod_{j \in \partial^+ a} \tanh(\beta h_{j \rightarrow a}) \right] \end{cases} \quad (9)$$

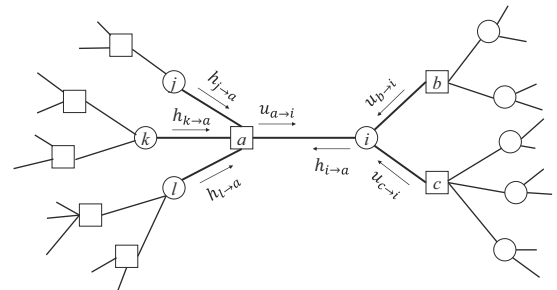


图 5 空腔偏差/磁场传播示意图(圆圈为变量节点, 方框为校验节点)

3.4 种群动力学

一般而言, 上述空腔磁场传播方程没有闭式解, 因此要用数值方法估计消息变量的分布. 该数值方法在不同领域叫法不一, 但思想本质上相同^[4]. 编码领域叫做“密度进化算法”或“蒙特卡洛采样方法”, 而统计物理领域叫做“种群动力学算法”. 种群动力学算法的核心思想是: 用一组独立同分布的样本表示一个种群, 在种群演进并达到稳态后, 用其经验分布近似真实分布^[23,24]. 随着种群规模变大, 经验分布越来越接近真实分布.

在系统 LDGM 码集 $C_s[n, k]$ 上执行种群动力学算法过程如下: 首先定义四个大小为 N 的种群 $P_v(\mathbf{h}), P_c(\mathbf{u}), P_v^{(t)}(\mathbf{h}), P_c^{(t)}(\mathbf{u})$, N 的取值要充分大以保证经验分布接近真实分布^[23], 一般取 10^4 或 10^5 . 种群中的个体分别表示

正规图中变量节点和校验节点对应的半边先验磁场信息 h_i^0 和 u_a^0 , 以及二者间的连边在第 t 轮迭代更新的磁场消息 $h_{i \rightarrow a}^{(t)}$ 和 $u_{a \rightarrow i}^{(t)}$. 然后随机地选择一条边 (i, a) , 依概率 ρ 分别产生其两端变量节点的度值 k_i 和校验节点的度值 k_a ; 接着分别从对应的种群中随机选择 $k_i - 1$ 个空腔偏差和 $k_a - 1$ 个空腔磁场, 按照式(9)得到更新之后的空腔磁场/偏差, 并用其随机替换对应种群中的一个个体. 重复上述过程, 直到相邻两次的迭代误差 $\delta_h^{(t)}$ 小于最小迭代误差 ϵ 或达到最大迭代次数 T_{\max} , 终止算法. 在得到稳态分布的种群后, 便可分析码集的渐近性能. 具体过程如算法 1 所示. 定义相邻两次的迭代误差

$$\delta_h^{(t)} = \langle \varphi^{(t)} \rangle - \langle \varphi^{(t-1)} \rangle \quad (10)$$

其中, $\langle \varphi^{(t)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tanh(h_{i \rightarrow a}^{(t)})$. 最大迭代次数要保证算法收敛到可接受的误差范围, 一般取 $T_{\max} = 10^3$, $\epsilon \sim 1/\sqrt{N}$.

算法 1 伯努利系统 LDGM 码的种群动力学

输入: 码长 n , 维数 k , 概率 ρ , 种群规模 N , 最大迭代次数 T_{\max} , 最小迭代误差 ϵ

输出: 变量节点对应的种群 $P_v^{(0)}(\mathbf{h})$

1. 初始化种群: $P_v(\mathbf{h}) = \{h_i^0\}$, $P_c(\mathbf{u}) = \{u_a^0\}$, $P_v^{(0)}(\mathbf{h}) = P_c^{(0)}(\mathbf{u}) = 0$
2. FOR $t = 1$ TO T_{\max} DO
3. FOR $e = 1$ TO N DO
4. 随机选择一条边 (i, a) , 依概率 ρ 产生对应的度值 k_i 和 k_a ;
5. 分别从种群 $P_v(\mathbf{h})$ 和 $P_c(\mathbf{u})$ 中随机选择一个个体 h_i^0 和 u_a^0 ;
6. 分别从种群 $P_v^{(e-1)}(\mathbf{h})$ 和 $P_c^{(e-1)}(\mathbf{u})$ 中随机选择 $k_a - 1$ 个个体 h_i 和 $k_i - 1$ 个个体 u_a ;
7. 按照式(9)更新 $h_{i \rightarrow a}^{(e)}$ 和 $u_{a \rightarrow i}^{(e)}$;
8. 分别用 $h_{i \rightarrow a}^{(e)}$ 和 $u_{a \rightarrow i}^{(e)}$ 随机替换种群 $P_v^{(e)}(\mathbf{h})$ 和 $P_c^{(e)}(\mathbf{u})$ 中的一个个体;
9. END
10. 按照式(10)计算迭代误差 $\delta_h^{(t)}$;
11. IF $|\delta_h^{(t)}| < \epsilon$ THEN BREAK;
12. END

4 正规图的度相关性

该部分研究异配性(disassortativity)对 BP 译码算法性能的影响. 许多真实网络中节点间的连接方式呈现一定偏好性^[25], 例如科研合作网络呈现同配性(assortativity), 即度值相近的学者倾向相互合作, 而蛋白质交互网络和社交网络呈现异配性, 即度值差异较大的节点倾向于相互连接. 对于这类可用网络进行建模的复杂系统, 复杂网络理论一般用同配系数衡量系统节点间交互的偏好性.

定义联合度分布为在正规图中任意选取的一条边的两个端点的度分别为 j 和 k 的概率, 即

$$P_{jk} = \frac{m(j, k)}{2M} \quad (11)$$

其中, $m(j, k)$ 表示度为 j 的变量节点和度为 k 的校验节点间的连边数, M 表示正规图中的总边数. 定义余度分布为在正规图中随机选取的一个节点随机选取的一个邻节点的度为 k 的概率, 即

$$q_k = kp_k/c \quad (12)$$

其中, c 为正规图的平均度, p_k 为变量节点或校验节点的度分布. 同配系数定义为

$$r = \frac{1}{\sigma_q^2} \sum_{j, k} jk(P_{jk} - q_j q_k) \quad (13)$$

当 $r = 0$ 时, 正规图不具有度相关性. 当 $r > 0$ 时, 正规图具有正相关性(“同配”), 即度值相当的节点倾向于相互连接. 当 $r < 0$ 时, 正规图具有负相关性(“异配”), 即度值差异较大的节点倾向于相互连接.

原始生成矩阵 \mathbf{G} 中的 \mathbf{P} 矩阵是随机生成的, 因此节点之间不具备度相关性. 为了研究异配性对 BP 译码性能的影响, 我们在原始配置模型(Configuration Model, CM)基础上^[26], 提出正规图配置模型(Normal Graph Configuration Model, NGCM)来生成符合要求的正规图. 该算法的输入为两个度序列和联合度分布, 输出为具有一定同配系数的正规图, 具体过程如算法 2 所示. 考虑到连边两端节点的度值差异大小决定了网络的异配性程度, 因此本文提出如下形式的 P_{jk} 来控制目标同配系数 r^* 的大小:

算法 2 正规图配置模型

输入: 变量节点度序列 \mathbf{DV} , 校验节点度序列 \mathbf{DC} , 联合度分布 P_{jk} , 最大尝试连接次数 T_{\max}

输出: 具有一定异配性的 \mathbf{P} 矩阵

1. 初始化: flag = 1;
2. WHILE flag == 1 DO
3. 设置 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, flag = 0, HV = [], HC = [];
4. 对于 \mathbf{DV} 中的每个索引 i , 添加 $\mathbf{DV}[i]$ 个 i 到 HV 中;
5. 对于 \mathbf{DC} 中的每个索引 j , 添加 $\mathbf{DC}[j]$ 个 j 到 HC 中;
6. WHILE |HV| > 0 AND |HC| > 0 DO
7. 设置 $t = 0$;
8. WHILE $t < T_{\max}$ DO
9. 分别从 HV 和 HC 中随机地选择两个元素, 记为 x, y ;
10. IF $\mathbf{P}(x, y) = 0$ THEN 生成随机数 r ;
12. IF $r < P_{jk}(\mathbf{DV}[x], \mathbf{DC}[y])$ THEN
13. $\mathbf{P}(x, y) = 1$, 并将 x 和 y 分别从 HV 和 HC 中移除;
14. BREAK;
15. $t = t + 1$;
16. END
17. IF $t \geq T_{\max}$ THEN
18. 设置 flag = 1;
19. BREAK;
20. END
21. END

$$P_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{Z}|j-k|^\alpha, r^* < 0 \\ 1 - \frac{1}{Z}|j-k|^\alpha, r^* > 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中, j 和 k 为连边两端节点的度值, Z 为归一化因子, 参数 α 控制目标同配系数 r^* 大小, 一般先根据经验确定 α 的取值区间, 然后采用二分查找法基于蒙特卡罗仿真实验生成符合要求的正规图。

5 仿真结果分析

这一节首先给出信道模型和性能度量指标, 然后结合 BP 译码结果分析种群动力学算法的渐近性能, 接着根据算法 2 生成具有不同异配程度的正规图, 并在不同信道模型下对比不同异配程度正规图的 BP 译码性能, 最后基于复杂网络理论分析异配性能改善瀑布区性能而无法提升平层区性能的机理。

5.1 信道模型

本文我们主要考虑加性高斯白噪声 (Additive White Gaussian Noise, AWGN) 信道和瑞利衰落 (Rayleigh Fading) 信道. 对于 AWGN 信道, 设码字 \mathbf{c} 经二进制相移键控 (Binary Phase Shift Keying, BPSK) 调制后进入 AWGN 信道, 接收序列为 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w}$, 其中, $x_i = (-1)^{c_i}$, $w_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 为白高斯噪声的方差. 对于瑞利衰落信道, 接收序列为 $\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{x} + \mathbf{w}$, 其中, h_i 是乘性因子, 服从 $E[h_i^2] = 1$ 且时间独立的瑞利分布. 信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR) 定义为 $10 \log_{10}(1/\sigma^2)$ dB.

5.2 性能度量

我们采用 BER 和平均迭代次数衡量 BP 迭代译码性能. 一次 BP 译码迭代中, “加号”节点和“等号”节点总计的复杂度是恒定值. 记一次“加法”或“乘法”运算的复杂度为 $O(c)$, 所有“加号”节点的运算复杂度为

$$O(S) = \sum_{a=1}^{n-k} k_a O(c) \quad (15)$$

所有“等号”节点的运算复杂度为

$$O(E) = \sum_{i=1}^k k_i O(c) \quad (16)$$

则一次 BP 迭代的复杂度为

$$O(D) = O(S) + O(E) = O(c) \left(\sum_{a=1}^{n-k} k_a + \sum_{i=1}^k k_i \right) \quad (17)$$

5.3 种群动力学算法渐近性能分析

例 1 图 6 给出了系统 LDGM 码 $C[2048, 1024]$, $\rho = 0.01$, 在 BPSK-AWGN 信道下, BP 译码算法和种群动力学算法的译码性能对比. 设定发送全零码字, BP 译码算法最大迭代次数为 50 次, 种群动力学算法 $N = 10^4$, $T_{\max} = 10^3$, $\epsilon = 1/N$, 最大错误帧数均为 10^3 帧. 可以看出, 二者的曲线贴合, 且均在 2.5 dB 之后达到 MAP 译码性

能下界^[21], 说明种群动力学算法较为真实地预测了 BP 译码算法的性能. 作为一种分析工具, 种群动力学算法不局限于在某个具体的正规图上译码, 而是从统计特性角度研究整个码集的平均性能, 因此更具一般性.

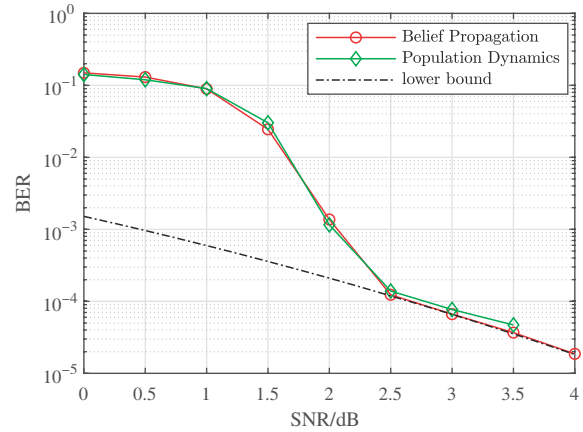


图 6 系统 LDGM 码, BP 译码与种群动力学算法性能对比

5.4 正规图的度相关性

例 2 图 7 给出了系统 LDGM 码 $C[2048, 1024]$, $\rho = 0.01$, 以及根据算法 2 生成相应的同配性 ($r = +0.5$) 和异配性 ($r = -0.5$) 正规图, 三者联合度分布 P_{jk} 的对比结果. 算法 2 中设置最大尝试连接次数 $T_{\max} = 10k\rho$. 从图 7(a) 可以看出, 原始 LDGM 码的 \mathbf{P} 矩阵节点之间不具有度相关性, 即连边是完全随机的, 因此 $r \approx 0$. 从图 7(b) 可以看出, 具有同配性的 \mathbf{P} 矩阵节点之间具有较强的度相关性, 即度值接近的节点更倾向于连接. 而具有异配性的 \mathbf{P} 矩阵节点之间的度相关性则体现在度值差异较大的节点连接概率更大, 如图 7(c) 所示.

5.5 不同信道模型下性能分析

例 3 AWGN 信道下仿真结果. 给定系统 LDGM 码 $C[2048, 1024]$, $\rho = 0.01$, 根据算法 2 生成具有不同同配系数的正规图, 并对比 BP 译码性能. 图 8 给出了 \mathbf{P} 矩阵具有不同度相关性时, BER 性能对比结果. 可以看出, 相较于原始正规图 ($r \approx 0$), 同配性会降低译码性能, 但异配性则会大大改善译码性能. 在低信噪比区域, 随着异配性程度增大, 误码率显著降低, 例如当 $r = -0.5$ 时, 在 10^{-3} 处有大约 0.5 dB 的增益. 图 9 给出了 BP 译码的平均迭代次数, 可以看出在低信噪比区域, 随着异配程度增大, 译码的收敛速度变快. 但是过度的异配性会导致外信息传递受限, 尽管能够达到较低的误码率, 但需要更多的迭代次数. 例如, 在超过 1.25 dB 时, $r = -0.5$ 的正规图比其他的正规图 BP 译码迭代次数稍微大一些.

例 4 瑞利衰落信道下仿真结果. 给定 LDGM 码 $C[2048, 1024]$, $\rho = 0.01$, 图 10 和图 11 分别给出了 \mathbf{P} 矩阵

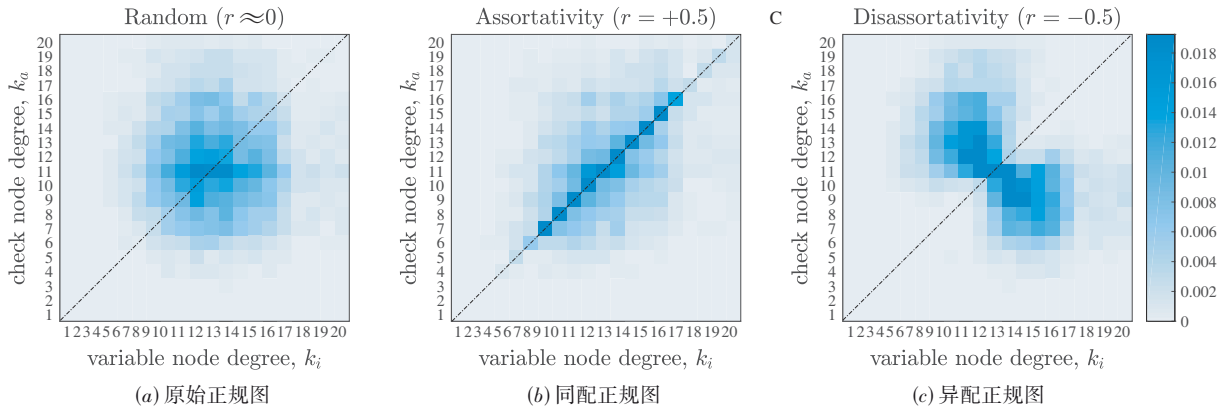


图7 正规图的联合度分布

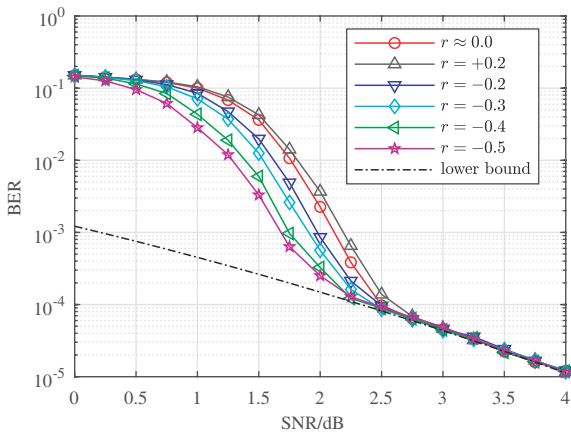


图8 AWGN信道下,不同同配系数的正规图,BP译码算法的BER对比

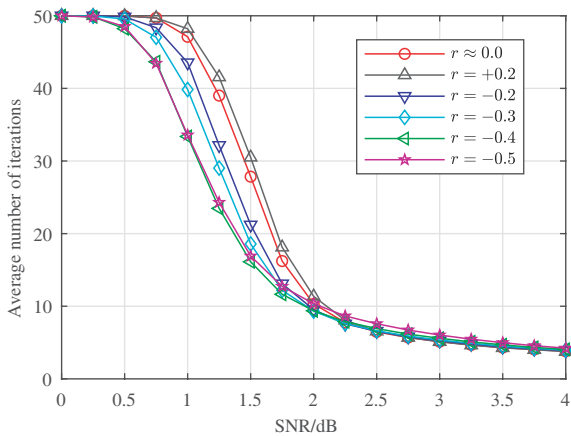


图9 AWGN信道下不同同配系数的正规图,BP译码算法平均迭代次数对比

具有不同度相关性时,BP迭代译码的BER性能和平均迭代次数.可以看到,与AWGN信道下的结果类似,在低信噪比区域,适当提高异配性能能够提升译码性能,当 $r=-0.5$ 时,在 10^{-3} 处有超过0.75 dB的增益,在高信噪比区域BER性能则逼近MAP下界.我们同样也观察到,过度的异配性会导致平均迭代次数在高信噪比区域有所增加.例如,在超过4 dB时, $r=-0.5$ 的正规图相

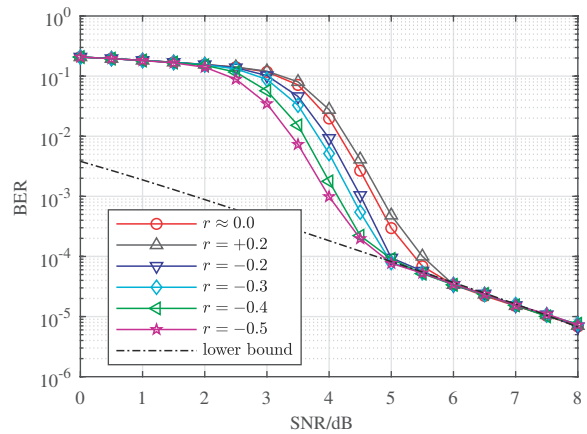


图10 瑞利衰落信道下不同同配系数的正规图,BP译码算法的BER对比

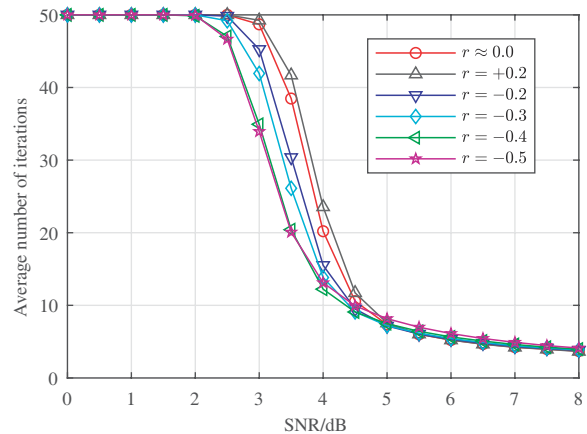


图11 瑞利衰落信道下不同同配系数的正规图,BP译码算法平均迭代次数对比

比其他正规图,平均迭代次数都要大一些.

5.6 异配性增益的理论解释

仿真结果表明,异配性可显著提升BP译码性能,在瀑布区增益明显,到平层区增益消失,可以从复杂网络角度看待这个问题.首先,异配性使度值差异较大的节点倾向连接,导致译码过程中外信息更容易跨越不

同类型的节点传播,提高了外信息的聚集效率,因此译码能快速收敛.其次,在低信噪比区域,异配性使得可靠性高的节点(度值较大的变量节点和度值较小的校验节点)连接在一起,进一步降低了译码错误率.同时也将可靠性低的节点(度值较小的变量节点和度值较大的校验节点)连接在一起,限制了错误传播范围.因此,异配性使得BP译码在瀑布区有显著增益.然而在高信噪比区域,尽管译码过程中变量节点呈现相关性^[23],但是由于度值较大的变量节点几乎不会被译错,因此不可靠节点间的相关性会被“阻断”,这一现象可看作移除这些度值较大的变量节点及其连边后,对应的正规图中形成多个连通块.这些连通块之间无法相互影响,且内部近似“树形”结构,因此平层区BP译码性能近似MAP译码性能,贴近性能下界.但是由于异配性调整并没有改变原始矩阵的行重,因此在平层区并不会增加变量节点可靠性,BP译码性能也就不会有增益.图12给出了码率 $R=1/2$, $\rho=0.01$, k 取不同值时,在正规图中删除度值大于阈值 k_i^T 的变量节点后,其密度(边数/点数)的变化情况.可以看出,随着阈值 k_i^T 减小,正规图密度迅速接近1(近似树形结构),此时进行BP译码,性能可逼近MAP译码性能.

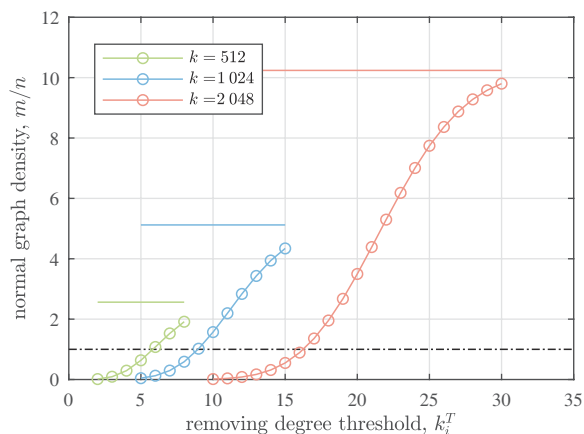


图12 不同维数的LDGM码,变量节点移除阈值与正规图密度的关系(实线表示删除前的密度,数据点表示删除后的密度,每个数据点为仿真1000个正规图取平均后的结果)

6 结束语

本文结合自旋玻璃理论和复杂网络理论,从统计物理的角度分析了伯努利系统LDGM码的统计物理特性.首先给出了系统LDGM码的伯努利构造,以及对应的编译码框架,同时分析了正规图的度分布以及与ER随机图的关系.然后研究了自旋玻璃理论框架下的编译码模型、码本重量谱与微观构型能量谱、空腔法推导消息传递方程,并提出针对系统码的种群动力学算法来分析码集的渐近性能.最后提出生成具有连接偏好性

的正规图配置模型,研究异配性对BP译码算法性能的影响,并从复杂网络视角给出异配性能提升瀑布区性能,但在平层区增益消失的理论解释.仿真结果表明,种群动力学算法与BP译码算法本质相同,但前者更具一般性,能够方便分析码集的渐近性能.同时,在具有异配性的正规图上面执行BP译码时,在低信噪比区域有显著增益,并且算法能快速收敛.

参考文献

- [1] EDWARDS S F, ANDERSON P W. Theory of spin glasses[J]. Journal of Physics F: Metal Physics, 1975, 5(5): 965-974.
- [2] MEZARD M, PARISI G, VIRASORO M. Spin Glass Theory and Beyond[M]. Singapore: World Scientific, 1986.
- [3] NISHIMORI H. Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction[M]. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [4] MEZARD M, MONTANARI A. Information, Physics, and Computation[M]. Oxford: Oxford University Press, 2009.
- [5] SOURLAS N. Spin-glass models as error-correcting codes[J]. Nature, 1989, 339(6227): 693-695.
- [6] RICHARDSON T, URBANKE R. Modern Coding Theory[M]. New York: Cambridge University Press, 2008.
- [7] KABASHIMA Y, SAAD D. Belief propagation vs. TAP for decoding corrupted messages[J]. Europhysics Letters, 1998, 44(5): 668-674.
- [8] VICENTE R, SAAD D, KABASHIMA Y. Finite-connectivity systems as error-correcting codes[J]. Physical Review E, 1999, 60(5): 5352-5366.
- [9] KABASHIMA Y, MURAYAMA T, SAAD D. Typical performance of Gallager-type error-correcting codes[J]. Physical Review Letters, 2000, 84(6): 1355-1358.
- [10] VICENTE R, SAAD D, KABASHIMA Y. Low-density parity-check codes—A statistical physics perspective[M]// Advances in Imaging and Electron Physics. Amsterdam: Elsevier, 2003: 231-353.
- [11] MONTANARI A. Tight bounds for LDPC and LDGM codes under MAP decoding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(9): 3221-3246.
- [12] KUDEKAR S, MACRIS N. Sharp bounds for optimal decoding of low-density parity-check codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(10): 4635-4650.
- [13] MIGLIORINI G, SAAD D. Finite-connectivity spin-glass phase diagrams and low-density parity check codes[J]. Physical Review E, 2006, 73(2): 026122.
- [14] HUANG H, ZHOU H. Cavity approach to the Surlas

code system[J]. *Physical Review E*, 2009, 80(5): 056113.

- [15] AREF V, MACRIS N, VUFFRAY M. Approaching the rate-distortion limit with spatial coupling, belief propagation, and decimation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(7): 3954-3979.
- [16] GIURGIU A, MACRIS N, URBANKE R. Spatial coupling as a proof technique and three applications[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2016, 62(10): 5281-5295.
- [17] BARBIER J, CHAN C L, MACRIS N. Adaptive path interpolation method for sparse systems: Application to a censored block model[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2021, 67(4): 2093-2114.
- [18] MA X. Coding theorem for systematic low density generator matrix codes[C]//2016 9th International Symposium on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC). Piscataway: IEEE, 2016: 11-15.
- [19] 王翌昕, 蔡穗华, 马啸. 基于 SC-LDGM 码的随机混合业务传输方案[J]. *电子学报*, 2022, 50(10): 2305-2310.
WANG Y X, CAI S H, MA X. A scheme for transmission of random hybrid services based on SC-LDGM codes[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2022, 50(10): 2305-2310. (in Chinese)
- [20] 李建东, 郭凯, 陈彦辉. 一种基于之型分量码的系统 GLDPC 码[J]. *电子学报*, 2011, 39(1): 178-183.
LI J D, GUO K, CHEN Y H. Systematic GLDPC codes with zigzag component codes[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(1): 178-183. (in Chinese)
- [21] CAI S, LIN W, YAO X, et al. Systematic convolutional low density generator matrix code[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2021, 67(6): 3752-3764.
- [22] BOLLOBÁS B. *Random Graphs*[M]. New York: Springer, 1998.
- [23] 周海军. *自旋玻璃与消息传递*[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
ZHOU H J. *Spinning Glass and Message Transmission*[M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese)
- [24] MÉZARD M, PARISI G. The Bethe lattice spin glass revisited[J]. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 2001, 20: 217-233.
- [25] NEWMAN M E J. Assortative mixing in networks[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(20): 208701.
- [26] BARABÁSI A L. Network science[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2013, 371(1987): 20120375.

作者简介



孟凡辉 男, 1993年生, 山东聊城人. 中山大学博士研究生. 主要研究方向为复杂网络、自旋玻璃、信道编码等.



马啸 男, 1968年生, 河南焦作人. 博士. 中山大学教授、博士生导师. 主要研究方向为信息与编码理论、编码调制技术、无线通信、光通信等. 中国电子学会会员编号: E190005835M. E-mail: maxiao@mail.sysu.edu.cn