

一种快速X射线脉冲星光子到达时间转换的 简化模型

张泽葳, 包为民, 方海燕*, 苏剑宇, 李小平, 姚云峰

(西安电子科技大学空间科学与技术学院, 陕西西安 710126)

摘要: 高精度X射线光子到达时间转换模型对脉冲星导航的精度至关重要, 针对目前完整模型复杂而简化模型精度有限的问题, 本文提出了一种精度不低于已有简化模型的快速简化模型. 通过对现有完整模型的推导, 从理论上分析了各延迟项对模型精度的影响, 指出罗曼延迟仍是影响简化模型精度的关键. 通过改变罗曼延迟的表达式及其二阶展开方式并考虑物理量的易获取度, 得到一种快速简化模型. 利用完整模型及所提简化模型对中子星内部组成探测器 (Neutron star Interior Composition Explorer, NICER) 和慧眼硬X射线调制望远镜 (Hard X-ray Modulation Telescope, HXMT) 的实测光子数据进行时间转换, 分析了所提模型的精度和计算效率; 利用数值仿真分析了轨道高度、脉冲星角位置测量误差对简化模型精度的影响, 讨论了不同高度地球轨道应用中该简化模型的精度及计算效率. 结果表明本文所提简化模型相比 Sheikh 简化模型和 fei 模型计算效率分别提高 50% 和 10%, 且未造成精度降低.

关键词: X射线脉冲星; 时间转换模型; 光子到达时间; 高精度简化模型

基金项目: 陕西省科技创新团队建设计划 (No.S2022-ZC-TD-0060)

中图分类号: P128.4; TN967.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2024)09-2939-11

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20221003

A Fast Simplified Model for X-ray Pulsar Photon Arrival Time Conversion

ZHANG Ze-wei, BAO Wei-min, FANG Hai-yan*, SU Jian-yu, LI Xiao-ping, YAO Yun-feng

(School of Aerospace Science and Technology, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710126, China)

Abstract: A high-precision X-ray photon arrival time conversion model is crucial to the accuracy of X-ray Pulsar-based Navigation. Aiming at the current problem that the complete model is complex and the simplified model has limited accuracy, a fast simplified model with accuracy no less than the existing simplified model is proposed in this paper. Through the derivation of the existing complete model, the influence of each delay item on the accuracy of the model is theoretically analyzed, and it is pointed out that the Roemer delay is still the key to the accuracy of the simplified model. A fast simplified model was obtained by changing the expression of the Roemer delay and its second-order expansion, and considering the ease of access to physical quantities in practical application. The accuracy and computational efficiency of the proposed model are analyzed by using the complete model and the proposed simplified model to time-transform the measured photon data of NICER (Neutron star Interior Composition Explorer) and HXMT (Hard X-ray Modulation Telescope) satellites. Furthermore, the influence of orbital altitude and pulsar angular position measurement errors on the accuracy of the simplified model is analyzed by numerical simulation, and the accuracy and computational efficiency of the simplified model in the application of Earth orbit at different altitudes are discussed. The results show that the computational efficiency of the simplified model proposed in this paper is improved 50% than that of the Sheikh's simplified model and 10% than the fei's model, without causing a decrease in accuracy.

Key words: X-ray pulsar; time conversion model; photon arrival time; high-precision simplified model

Foundation Item(s): Innovation Capability Support Program of Shaanxi Province, China (No.S2022-ZC-TD-0060)

1 引言

X 射线脉冲星导航(X-ray Pulsar-based Navigation, XPNAV)^[1-5]是一种新型自主导航方式,可为地球轨道和深空航天器提供位置、速度、时间等导航信息,实现航天器自主导航. XPNAV 精度的提高依赖于脉冲星信息的获取,比如:脉冲星的脉冲轮廓、计时模型及脉冲星到达时间(Time Of Arrival, TOA)等,而这些都离不开 X 射线光子到达时间转换模型^[6-9].

高精度的 X 射线光子到达时间转换模型对导航精度的提高起着至关重要的作用. X 射线光子在空间传播时受到空间光线弯曲及时间上的相对论效应,即爱因斯坦、夏皮罗等时间延迟效应,因此在利用光子信息进行距离的获取时需要将光子到达时间序列进行校正^[10]. XPNAV 的时间校正通常包含 X 射线光子到达时间尺度转换和 X 射线光子到达时间转换模型,前者将航天器记录的任务时转化到地球时(Terrestrial Time, TT),再将其转化到太阳系质心力学时(Barycentric Dynamic Time, TDB),后者则是在 TDB 下利用 X 射线光子到达时间转换模型将航天器处的光子到达时间序列转换到太阳系质心(Solar System Barycenter, SSB)处^[11]. 本文重点对于转换模型进行研究,且考虑 NICER/HXMT 实测数据包记录时间为 TT 时,即任务时为 TT.

同时兼顾精度及计算效率的 X 射线光子到达时间转换模型是导航工程实现的重要影响因素之一^[12,13]. 针对高精度的完整 X 射线光子到达时间转换模型的理论推导,Sheikh 和 Hellings 推导了广义相对论效应下一阶和二阶的后牛顿度规(Post-Newtonian metric, PN)时间转换模型^[1-3],其结果也被国内学者广泛引用^[14-18]. 赵铭等指出理论模型中不应含有航天器和 SSB 两点的引力时延较差^[19,20],周庆勇基于赵铭的结论推导了 1PN 的转换模型^[21]. 费保俊则认为罗曼延迟(Roemer)是脉冲星到太阳系质心和航天器的欧式几何路径差的修正,不应与日心在太阳系质心天球参考系中的矢量有关系^[22,23]. 任红飞则推导了考虑天体四极矩和角动量的 2PN 转换模型,并对其中的相对论效应进行了数值分析^[24,25]. 但是上述高精度的理论模型均面临着计算复杂度高的问题,因此文献^[1~3]就给出一种便于计算的简化模型,目前国内外 XPNAV 所使用的简化模型均引证于此. 李小平等基于文献^[1]的模型使用罗西卫星的实测数据分析了各项对精度的影响^[26],给出了特定轨道上不同精度的简化模型.

高精度模型通常运算效率较低,因此在平衡计算精度和运算效率的基础上,寻找适用于工程实现的简化模型需求日益迫切. 本文首先通过对现有完整模型

的推导,给出了 2PN 下的积分求解结果以及完整 X 射线光子到达时间转换模型;然后提出了一种快速简化模型,该模型不仅计算效率高且精度不低于已有简化模型;最后利用 NICER 和 HXMT 卫星的实测数据分析了简化模型的精度及计算效率,利用仿真数据分析了不同脉冲星、轨道高度和脉冲星角位置测量误差对简化模型精度的影响.

2 2PN 完整 X 射线光子到达时间转换模型的完善与验证

2.1 2PN 完整 X 射线光子到达时间转换模型的完善

对于 TDB 下的 X 射线光子到达时间转换模型,当前模型主要来自 Sheikh 和 Hellings 的推导^[1-3],即在忽略天体形状和自转等影响的基础上,利用广义相对论框架下弱引力场中两个事件时空间隔的 2PN 方程^[27,28]和类光测地线运动方程^[1-3]来进行积分求解.

首先求解脉冲星发射光子时刻 t_T 与光子到达航天器(Spacecraft, SC)处时刻 t_{sc} 的差值. 在图 1 所示坐标系下,坐标轴的原点取光子传播路径距离太阳最近的时刻太阳质心所在的瞬时位置, x 轴取平行于光子传播路径,将空间映射到一个平面上,则 t_{sc} 与 t_T 的差值可通过式(1)所示积分求解^[1].

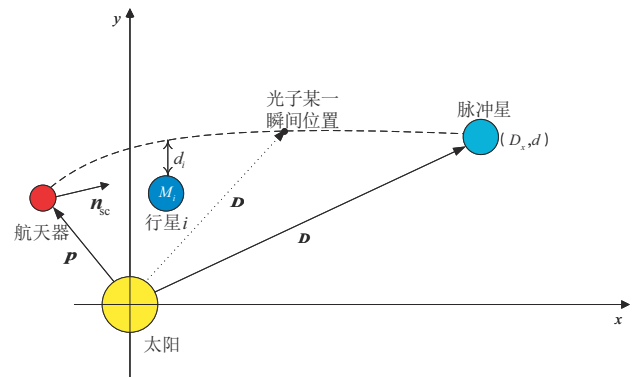


图 1 X 射线光子传播路径示意图

$$c(t_{sc} - t_T) = \int_{D_i}^{p_x} \left\{ 1 + \frac{2GM}{c^2 \sqrt{x^2 + d^2}} + \frac{7G^2 M^2}{4c^4 (x^2 + d^2)} + \sum_{i \neq \text{sun}} \left(\frac{2GM_i}{c^2 \sqrt{(x - x_{M_i})^2 + d_i^2}} \right) + \frac{4G^2 M^2}{2 \cdot d^2 c^4} \left[\frac{D_x^2}{D^2} - \frac{2D_x}{D} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} + \frac{x^2}{x^2 + d^2} \right] \right\} dx \quad (1)$$

对式(1)积分进行求解即可得 t_{sc} 与 t_T 的差值:

$$\begin{aligned}
 (t_{sc} - t_T) = & \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p})}{c} - \sum_i \frac{2GM_i}{c^3} \ln \left(\frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{p}_i + p_i}{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}_i + D_i} \right) \\
 & + \frac{2G^2 M^2}{d_{ysun}^2 c^5} (\mathbf{n}_{sc} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p})) \left[1 + \frac{(\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D})^2}{D^2} \right] \\
 & - 2 \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}}{D} (D - p) + \frac{15}{8} d_{ysun} \left(\arctan \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}}{d_{ysun}} \right. \\
 & \left. - \arctan \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{p}}{d_{ysun}} \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中第一项是罗曼 (Roemer) 延迟, 第二项是太阳系各天体的夏皮罗 (Shapiro) 延迟, 第三项是太阳引力场光线弯曲高阶改正项. 其中 \mathbf{n}_{sc} 表示航天器到脉冲星的单位矢量, \mathbf{p} 和 p 是航天器相对太阳质心的位置矢量和标量, \mathbf{D} 和 D 是脉冲星相对太阳质心的位置矢量和标量, \mathbf{p}_i 和 p_i 是航天器相对天体 i 中心的位置矢量和标量, \mathbf{D}_i 和 D_i 是脉冲星相对天体 i 中心的位置矢量和标量. 为与后文符号区分, 用 d_{ysun} 表示太阳质心与光子到航天器运动轨迹的距离.

而对式 (1) 的积分进行求解, 文献 [1] 给出了式 (3) 所示结果:

$$\begin{aligned}
 (t_{sc} - t_T) = & \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p})}{c} - \sum_i \frac{2GM_i}{c^3} \ln \left(\frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{p}_i + p_i}{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}_i + D_i} \right) \\
 & + \frac{2G^2 M^2}{d_{ysun}^2 c^5} (\mathbf{n}_{sc} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p})) \left[1 + \frac{(\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D})^2}{D^2} - \frac{2d_{ysun}^2}{pD} \right] \\
 & - 2 \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}}{D} (D - p) + \frac{15}{8} d_{ysun} \left(\arctan \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}}{d_{ysun}} \right. \\
 & \left. - \arctan \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{p}}{d_{ysun}} \right) \quad (3)
 \end{aligned}$$

对比式 (2) 与式 (3) 可见, 第三项的第一部分有区别, 通过积分推导过程可知显然没有可以得到 $\mathbf{n}_{sc} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p}) \frac{2d_{ysun}^2}{pD}$ 这一项的途径, 因此本文推导采用式 (2) 计算.

类似可利用式 (2) 求解 t_T 与光子到达 SSB 处的时刻 t_{ssb} 的差值, 理论上将式 (2) 中 SC 相关项替换为 SSB 的相关项即可:

$$\begin{aligned}
 t_{ssb} - t_T = & \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{b})}{c} - \sum_i \frac{2GM_i}{c^3} \ln \left(\frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{b}_i + b_i}{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}_i + D_i} \right) \\
 & + \frac{2G^2 M^2}{d_{yssb}^2 c^5} (\mathbf{n}_{ssb} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{b})) \left[1 + \frac{(\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D})^2}{D^2} \right] \\
 & - 2 \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}}{D} (D - b) + \frac{15}{8} d_{yssb} \left(\arctan \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}}{d_{yssb}} \right. \\
 & \left. - \arctan \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{b}}{d_{yssb}} \right) \quad (4)
 \end{aligned}$$

式中 \mathbf{n}_{ssb} 表示 SSB 到脉冲星的单位矢量, \mathbf{b} 和 b 表示 SSB 相对太阳质心的位置矢量和标量, \mathbf{b}_i 和 b_i 表示 SSB 相对天体 i 中心的位置矢量和标量, d_{yssb} 表

示太阳质心到光子去往 SSB 路径的运动轨迹的距离.

在计算式 (4) 中第二项各天体的 Shapiro 延迟时, 由于 SSB 通常在太阳内部, SSB 处的引力延迟本身并无物理意义, 所以计算 t_{ssb} 与 t_T 的差值时可用一个天文单位 (Astronomical Unit, AU) 来使 Shapiro 延迟的对数项无量纲化^[16-18], 即:

$$\begin{aligned}
 t_{ssb} - t_T = & \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{b})}{c} + \sum_i \frac{2GM_i}{c^3} \ln \left(\frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}_i + D_i}{\text{AU}} \right) \\
 & + \frac{2G^2 M^2}{d_{yssb}^2 c^5} \mathbf{n}_{ssb} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{b}) \left[1 + \frac{(\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D})^2}{D^2} \right] \\
 & - 2 \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}}{D} (D - b) + \frac{15}{8} d_{yssb} \left(\arctan \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}}{d_{yssb}} \right. \\
 & \left. - \arctan \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{b}}{d_{yssb}} \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

最后, 将式 (2) 与式 (5) 作差即可得到 t_{sc} 与 t_{ssb} 的转换模型:

$$\begin{aligned}
 t_{ssb} - t_{sc} = & \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{b}) - \mathbf{n}_{sc} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p})}{c} \\
 & + \sum_i \frac{2GM_i}{c^3} \ln \left| \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{p}_i + p_i}{\text{AU}} \cdot \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}_i + D_i}{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}_i + D_i} \right| \\
 & + \frac{2G^2 M^2}{d_{yssb}^2 c^5} (\mathbf{n}_{ssb} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{b})) \left[1 + \frac{(\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D})^2}{D^2} \right] \\
 & - 2 \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}}{D} (D - b) + \frac{15}{8} d_{yssb} \left(\arctan \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{D}}{d_{yssb}} \right. \\
 & \left. - \arctan \frac{\mathbf{n}_{ssb} \cdot \mathbf{b}}{d_{yssb}} \right) - \frac{2G^2 M^2}{d_{ysun}^2 c^5} (\mathbf{n}_{sc} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p})) \\
 & \cdot \left[1 + \frac{(\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D})^2}{D^2} \right] - 2 \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}}{D} (D - p) \\
 & + \frac{15}{8} d_{yssb} \left(\arctan \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{D}}{d_{ysun}} - \arctan \frac{\mathbf{n}_{sc} \cdot \mathbf{p}}{d_{ysun}} \right) \quad (6)
 \end{aligned}$$

式 (6) 就是完善后的广义相对论框架下 2PN 完整 X 射线光子到达时间转换模型.

2.2 2PN 完整 X 射线光子到达时间转换模型的验证

对本文的完整 X 射线光子到达时间转换模型式 (6) 验证正确性: 分别使用式 (6) 和文献 [1] 中 Sheikh 的完整模型对目前在轨 X 射线探测卫星 NICER 和 HXMT 的实测数据包的光子数据 (获取地址为 <https://heasarc.gsfc.nasa.gov/FTP/nicer/data/>. 及 <http://archive.hxmt.cn/proposal>. 进行转换后折叠出 SSB 处的观测轮廓, 数据包信息如表 1 所示.

处理的光子数据量为每个数据包中的 100 万光子, 折叠的轮廓为归一化轮廓. 结果如图 2 和图 3 所示, 其中 NICER 卫星数据包结果如图 2 所示, HXMT 卫星数据包结果如图 3 所示, Sheikh 完整模型转换后历

元折叠的结果如图 2(a)和图 3(a)所示,本文完整模型转换后历元折叠的结果如图 2(b)和图 3(b)所示,经降噪处理^[29]后高信噪比的轮廓对比结果如图 2(c)和图 3(c)所示.

由图(2)和图(3)对比可知,两种完整模型获取

的轮廓并无较大差别,只有 10^{-5} 量级的相位差,与两者理论差值主要由 Shapiro 延迟计算方法不同引起相吻合,计算表明本文完整模型所得轮廓与标准轮廓的相关系数大于 0.98,这也就表明了该模型的正确性.

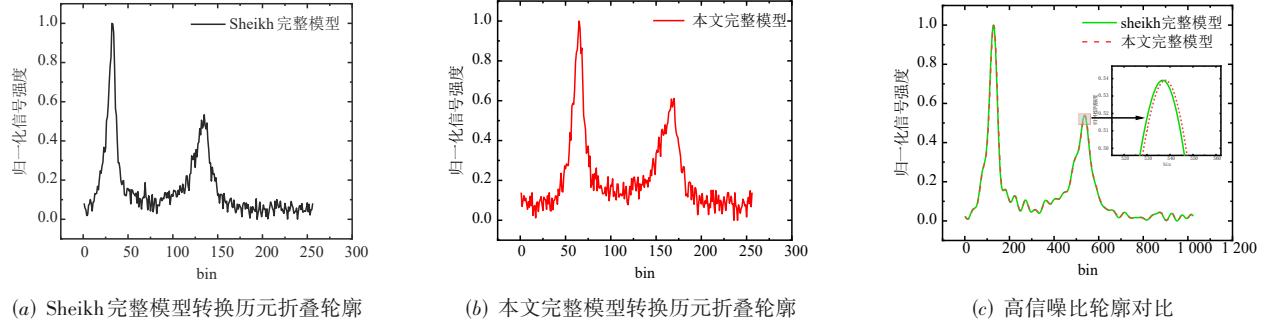


图 2 NICER 数据完整模型折叠轮廓对比

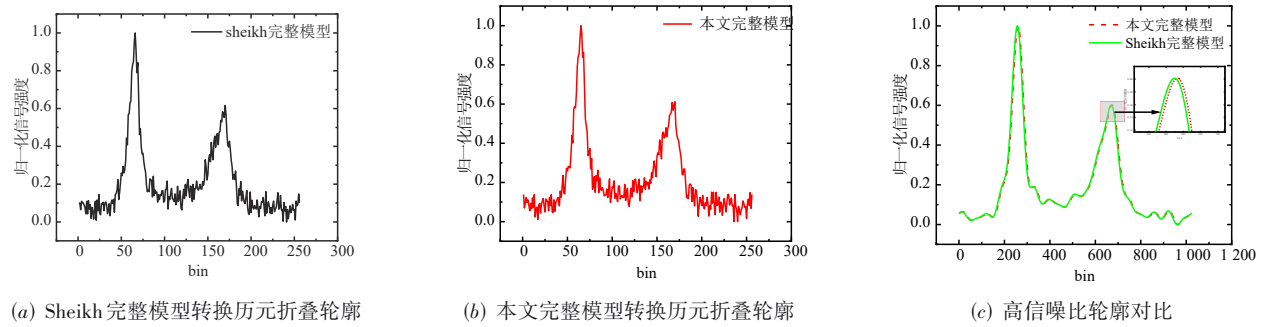


图 3 HXMT 数据完整模型折叠轮廓对比

表 1 本文采用的 NICER 和 HXMT 的实测数据包信息

参数	NICER 数据包	HXMT 数据包
观测卫星	Crab 脉冲星	Crab 脉冲星
观测数据包	ni1011010101	P0111605063 LE 包
观测时间段	2017-8-15 19:39~20:23	2018-8-30 7:05~11:30
观测流量/(ph \times s $^{-1}$ \times cm $^{-2}$)	0.970 423	0.435 57
轨道高度/km	423.566	561.139
光子总数/ph	3 825 408	1 846 550

3 X 射线光子到达时间转换模型的简化

上述 X 射线光子到达时间转换模型精度很高,但是数学形式过于复杂,为了便于应用对其进行简化.

在该模型延迟项中影响最大的是 Roemer 延迟^[26],因此在文献[1~3]中,Sheikh 略去光线弯曲高阶改正项以及太阳系中除太阳外天体的引力延迟这些量级较小的高阶项,将式(6)模型简化为:

$$t_{\text{ssb}} - t_{\text{sc}} = \frac{n_{\text{ssb}}(D-b) - n_{\text{sc}}(D-p)}{c} + \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln \left| \frac{n_{\text{sc}} \cdot p + p}{\text{AU}} \cdot \frac{n_{\text{ssb}} \cdot D + D_i}{n_{\text{sc}} \cdot D + D_i} \right| \quad (7)$$

考虑到使用式(7)第一项的 Roemer 延迟进行展开简化会引入 b 、 $(p-b)$ 交叉项从而增加计算复杂度,区别于 Sheikh 简化,本文改变了 Roemer 延迟展开前的表达式.考虑到在地球轨道航天器的实际应用中更常使用地球质心坐标系,本文使用脉冲星相对地球质心的矢量 D_{ca} 、地球相对 SSB 的矢量 $r_{\text{ca-ssb}}$ 和航天器相对地球的矢量 $r_{\text{sc-ca}}$ 将 Roemer 延迟表达为:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Roemer}} &= \frac{n_{\text{ssb}}(D-b) - n_{\text{sc}}(D-p)}{c} \\ &= \frac{|D-b| - |D-p|}{c} \\ &= \frac{|D_{\text{ca}} + r_{\text{ca-ssb}}| - |D_{\text{ca}} - r_{\text{sc-ca}}|}{c} \end{aligned} \quad (8)$$

显然从数学上而言,式(8)所表示的几种 Roemer 延

迟表达形式都是将光子运动轨迹近似为直线的结果,且式中 \mathbf{D} 、 \mathbf{D}_{ea} 均省略了角标 N , 即脉冲星发射第 N 个光子时刻时相对太阳质心、SSB 和地球的位置矢量. 对式 (8) 的后续简化需假设脉冲星发送光子的时间间隔与飞行器接收光子的时间间隔相等^[1]: 考虑脉冲星相对地球的初始位置 \mathbf{D}_0 和自行影响 \mathbf{V} , 用 t_{sc_N} 表示航天器接收到第 N 个光子的时刻, 用 t_{sc_0} 表示航天器开始接收光子的时刻, 则可知脉冲星发射 N 个光子后相对于地球质心的位置为:

$$\mathbf{D}_{ea} \approx \mathbf{D}_0 + \mathbf{V}(t_{sc_N} - t_{sc_0}) = \mathbf{D}_0 + \mathbf{V}\Delta t_N \quad (9)$$

将式(9)代入式(8), 由于公式较长, 这里先分别给出式(8)分子部分的推导过程, 第一部分为:

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}_{ea} + \mathbf{r}_{ea-ssb}| &= |\mathbf{D}_0 + \mathbf{V}\Delta t_N + \mathbf{r}_{ea-ssb}| \\ &= \left[|\mathbf{D}_0 + \mathbf{V}\Delta t_N + \mathbf{r}_{ea-ssb}| \cdot |\mathbf{D}_0 + \mathbf{V}\Delta t_N + \mathbf{r}_{ea-ssb}| \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (D_0^2 + (\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 + (\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 + 2\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N \\ &\quad + 2(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb}) + 2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N)^{\frac{1}{2}} \\ &= D_0 \cdot \left(1 + \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2}{D_0^2} + \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2}{D_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N}{D_0^2} + \frac{2(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})}{D_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N}{D_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10) \end{aligned}$$

根据泰勒公式 $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$ 对式 (10) 级数展开至二阶:

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}_{ea} + \mathbf{r}_{ea-ssb}| &= D_0 \cdot \left(1 + \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2}{2D_0^2} + \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2}{2D_0^2} + \frac{\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N}{D_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})}{D_0^2} + \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N}{D_0^2} - \frac{(\mathbf{V})^4 (\Delta t_N)^4}{8D_0^4} - \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^4}{8D_0^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2}{2D_0^4} - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})^2}{2D_0^4} - \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})^2 (\Delta t_N)^2}{2D_0^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{r}_{ea-ssb})^2}{4D_0^4} - \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)}{2D_0^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})}{2D_0^4} - \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N}{2D_0^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)}{2D_0^4} - \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})}{2D_0^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N}{2D_0^4} - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})}{D_0^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N}{D_0^4} - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N}{D_0^4} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

按照同样方式计算分子的第二部分并与式(11)相

减可得:

$$\begin{aligned} &|\mathbf{D}_{ea} + \mathbf{r}_{ea-ssb}| - |\mathbf{D}_{ea} - \mathbf{r}_{sc-ca}| \\ &= \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 - (\mathbf{r}_{sc-ca})^2}{2D_0} + \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb}) + (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})}{D_0} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N}{D_0} + \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})\Delta t_N}{D_0} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{r}_{sc-ca})^4 - (\mathbf{r}_{ea-ssb})^4}{8D_0^3} + \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})^2 - (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})^2}{2D_0^3} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})^2 (\Delta t_N)^2 - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})^2 (\Delta t_N)^2}{2D_0^3} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{r}_{sc-ca})^2}{4D_0^3} - \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{r}_{ea-ssb})^2}{4D_0^3} \\ &\quad - \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb}) + (\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})}{2D_0^3} \\ &\quad - \frac{(\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N + (\mathbf{V})^2 (\Delta t_N)^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})\Delta t_N}{2D_0^3} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{r}_{sc-ca})^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N) - (\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)}{2D_0^3} \\ &\quad - \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})}{2D_0^3} - \frac{(\mathbf{r}_{sc-ca})^2 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})}{2D_0^3} \\ &\quad - \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N + (\mathbf{r}_{sc-ca})^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})\Delta t_N}{2D_0^3} \\ &\quad - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb}) + (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})}{D_0^3} \\ &\quad - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N + (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})\Delta t_N}{D_0^3} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})\Delta t_N - (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})\Delta t_N}{D_0^3} \quad (12) \end{aligned}$$

式(12)为二阶泰勒级数展开的完整项, 各项之间具有数学耦合关系, 对其中各项的时间量级进行分析, 考虑存在 $|\mathbf{D}_{ea}| \gg |\mathbf{r}_{ea-ssb}|, |\mathbf{r}_{sc-ca}|, |\mathbf{V}|\Delta t_N$, 略去 $\frac{1}{D_0}$ 的高阶项, 用 \mathbf{n}_{ea} 表示脉冲星相对地球质心的单位矢量, 可得:

$$\begin{aligned} &|\mathbf{D}_{ea} + \mathbf{r}_{ea-ssb}| - |\mathbf{D}_{ea} - \mathbf{r}_{sc-ca}| \\ &= \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 - (\mathbf{r}_{sc-ca})^2}{2D_0} + \frac{\mathbf{D}_0 \cdot (\mathbf{r}_{ea-ssb} + \mathbf{r}_{sc-ca})}{D_0} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{V} \cdot (\mathbf{r}_{ea-ssb} + \mathbf{r}_{sc-ca}))\Delta t_N}{D_0} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{sc-ca})^2 - (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{r}_{ea-ssb})^2}{2D_0^3} \\ &\quad - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{V}\Delta t_N)(\mathbf{D}_0 \cdot (\mathbf{r}_{ea-ssb} + \mathbf{r}_{sc-ca}))}{D_0^3} \\ &= \mathbf{n}_{ea} \cdot (\mathbf{r}_{ea-ssb} + \mathbf{r}_{sc-ca}) + \frac{(\mathbf{r}_{ea-ssb})^2 - (\mathbf{r}_{sc-ca})^2}{2D_0} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{V} \cdot (\mathbf{r}_{ea-ssb} + \mathbf{r}_{sc-ca}))\Delta t_N}{D_0} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot \mathbf{r}_{\text{sc-ea}})^2 - (\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot \mathbf{r}_{\text{ea-ssb}})^2}{2D_0} - \frac{(\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot \mathbf{V} \Delta t_N)(\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot (\mathbf{r}_{\text{ea-ssb}} + \mathbf{r}_{\text{sc-ea}}))}{D_0} \quad (13)$$

考虑脉冲星相对整个太阳系的距离很远,故可假设脉冲星辐射到太阳系的光子是平行的,即:

$$\mathbf{n}_{\text{ssb}} \approx \mathbf{n}_{\text{sc}} \approx \mathbf{n}_{\text{sun}} \approx \mathbf{n}_{\text{ea}} = \frac{\mathbf{D}_0}{D_0} \quad (14)$$

则式(7)的 Shapiro 延迟可简化为

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Shapiro}} &= \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln \left| \frac{\mathbf{n}_{\text{sc}} \cdot \mathbf{p} + p}{\text{AU}} \cdot \frac{\mathbf{n}_{\text{ssb}} \cdot \mathbf{D} + D_i}{\mathbf{n}_{\text{sc}} \cdot \mathbf{D} + D_i} \right| \\ &= \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln \left| \frac{\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot \mathbf{p} + p}{\text{AU}} \right| \\ &= \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln \left| \frac{\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot (\mathbf{r}_{\text{sc-ea}} + \mathbf{r}_{\text{ea-sun}}) + |\mathbf{r}_{\text{sc-ea}} + \mathbf{r}_{\text{ea-sun}}|}{\text{AU}} \right| \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{r}_{\text{ea-sun}}$ 为地球质心相对太阳质心的位置矢量.

将式(13)和式(15)代入式(7),可得简化形式为:

$$\begin{aligned} t_{\text{ssb}} - t_{\text{sc}} &= \frac{(\mathbf{r}_{\text{ea-ssb}})^2 - (\mathbf{r}_{\text{sc-ea}})^2}{2cD_0} + \frac{\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot (\mathbf{r}_{\text{ea-ssb}} + \mathbf{r}_{\text{sc-ea}})}{c} \\ &+ \frac{(\mathbf{V} \cdot (\mathbf{r}_{\text{ea-ssb}} + \mathbf{r}_{\text{sc-ea}})) \Delta t_N}{cD_0} - \frac{(\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot \mathbf{r}_{\text{ea-ssb}})^2}{2cD_0} \\ &+ \frac{(\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot \mathbf{r}_{\text{sc-ea}})^2}{2cD_0} - \frac{(\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot \mathbf{V} \Delta t_N)(\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot (\mathbf{r}_{\text{ea-ssb}} + \mathbf{r}_{\text{sc-ea}}))}{cD_0} \\ &+ \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln \left| \frac{\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot (\mathbf{r}_{\text{sc-ea}} + \mathbf{r}_{\text{ea-sun}}) + |\mathbf{r}_{\text{sc-ea}} + \mathbf{r}_{\text{ea-sun}}|}{\text{AU}} \right| \end{aligned} \quad (16)$$

考虑脉冲星实际观测的特点可进一步简化,在一阶段观测时长内脉冲星的自行速度很小可忽略不计,且对于地球轨道航天器存在 $\frac{(\mathbf{r}_{\text{sc-ea}})^2}{cD_0} < 10^{-10}$,式(16)可简化为:

$$\begin{aligned} t_{\text{ssb}} - t_{\text{sc}} &= \frac{\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot (\mathbf{r}_{\text{ea-ssb}} + \mathbf{r}_{\text{sc-ea}})}{c} \\ &+ \frac{(\mathbf{r}_{\text{ea-ssb}})^2 - (\mathbf{r}_{\text{sc-ea}})^2}{2cD_0} - \frac{(\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot \mathbf{r}_{\text{ea-ssb}})^2}{2cD_0} \\ &+ \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln \left| \frac{\mathbf{n}_{\text{ea}} \cdot (\mathbf{r}_{\text{sc-ea}} + \mathbf{r}_{\text{ea-sun}}) + |\mathbf{r}_{\text{sc-ea}} + \mathbf{r}_{\text{ea-sun}}|}{\text{AU}} \right| \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)即为本文所得简化模型,可以看出该式计算 Roemer 延迟只需获取航天器相对地球的轨道信息、脉冲星的角位置信息以及通过星历查询获取的地球相对 SSB 的距离信息,计算 Shapiro 延迟则只需再增加星历查询获取地球相对太阳的距离信息,这些物理量是可以直接快速获取的. 且其相比已有模型而言计算过

程直接利用这些物理量,减少了中间计算环节,从而减少了误差累积,因此从理论上讲式(17)具有更高的计算效率. 需要指出的是,式(17)是针对地球轨道航天器的模型,若是太阳系其他行星的轨道航天器,将所需计算的物理量中地球换成该行星即可.

作为对比,目前引证较多的 Sheikh 简化公式为式(18),而 NASA 官网提供的 Heasoft 软件所使用的简化公式为式(19),费保俊和周庆勇使用的简化公式则为式(21),式中 \mathbf{r} 为航天器相对 SSB 的位置矢量,该物理量无法直接获取. 这几个简化公式的精度大多数时间下均在微秒/亚微秒量级^[1,21-23,30].

$$\begin{aligned} t_{\text{ssb}} - t_{\text{sc}} &= \frac{\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{r}}{c} - \frac{(\mathbf{r})^2}{2cD_0} + \frac{(\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{r})^2}{2cD_0} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{cD_0} \\ &+ \frac{(\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{r})}{cD_0} + \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln(1 + \cos(\text{th})) \end{aligned} \quad (18)$$

$$t_{\text{ssb}} - t_{\text{sc}} = \frac{\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{r}}{c} + \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln(1 + \cos(\text{th})) \quad (19)$$

$$\cos(\text{th}) = \frac{\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{p}}{p} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} t_{\text{ssb}} - t_{\text{sc}} &= \frac{\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{r}}{c} - \frac{(\mathbf{r})^2}{2cD_0} + \frac{(\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{r})^2}{2cD_0} \\ &+ \frac{2GM_{\text{sun}}}{c^3} \ln \left| \frac{\mathbf{n}_{\text{sun}} \cdot \mathbf{p} + p}{\text{AU}} \right| \end{aligned} \quad (21)$$

需要说明的是本文在验证对比上述模型时,使用统一的 TT 到 TDB 的转换公式^[31,32]为

$$\text{TDB} = \text{TT} + \frac{\mathbf{r}_{\text{sc-ea}} \cdot \mathbf{v}_{\text{ea-ssb}}}{c^2} + P \quad (22)$$

其中 $\mathbf{v}_{\text{ea-ssb}}$ 表示地球相对 SSB 的速度, P 为由 750 个周期项的近似解析表达式计算得到的太阳系内所有天体引力红移所引起的时延近似值,其计算精度为 1 ns.

4 简化模型对比分析

4.1 基于实测数据的模型对比

对不同简化模型的精度和计算效率进行分析对比,使用本文简化模型式(17)和已有简化模型式(18)、式(19)、式(21)对表 1 的数据包以及 PSR B1937+21 的 ni1070020101~114 数据包中的光子数据时间转换后折叠轮廓,并将本文完整模型作为标准分析上述简化模型的精度和计算效率.

算例 1 使用不同简化模型转换后折叠的轮廓对比

对于 Crab 脉冲星的数据包,仍然选用每个包中 100 万光子,对于 PSR B1937+21,使用上述数据包共计 38 万光子,使用本文简化模型、Sheikh 简化模型、fei 模型以及 Heasoft 简化模型进行转换并折叠出观测轮廓,经降噪处理^[29]后高信噪比的轮廓对比结果如图 4 所示:其中 Crab 脉冲星 HXMT 卫星数据包如图 4(a)所示, Crab 脉冲星 NICER 卫星数据包如图 4(b)所示, PSR B1937+

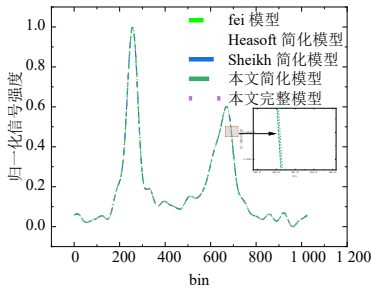
21 脉冲星 NICER 数据包如图 4(c) 所示。

由图中对比可知,几种简化模型均可消除航天器运动引起的多普勒效应,获得具有明显特征的轮廓,其中 Crab 脉冲星轮廓的相位差在 10^{-6} 量级以下,而 PSR B1937+21 脉冲星轮廓的相位差则在 10^{-5} 量级之下,这是由于其频率比 Crab 脉冲星大一个数量级造成的。

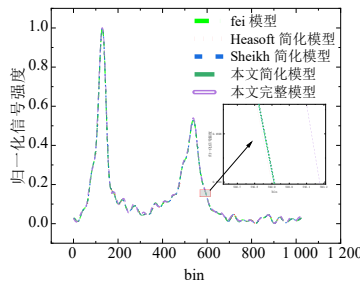
算例 2 不同简化模型的精度和计算效率对比

使用 CPU 为 Intel(R) Core(TM) i7-9700 @ 3.00 GHz 的计算机和 MATLAB 2022a 软件,随机选取 HXMT 卫星和 NICER 卫星数据包并各截取 1 000 光子,将本文

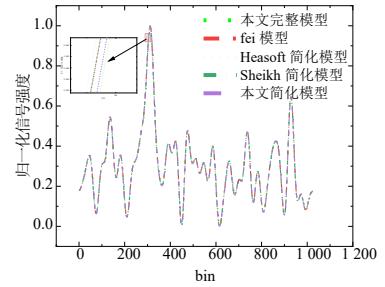
完整模型的结果作为标准对比各简化模型的精度及计算效率,结果如表 2 和表 3 所示。从第 3 节理论推导可得虽然几种简化模型的时间复杂度均为 $O(n)$,但其时间频度不同:Sheikh 简化模型可近似为 $T(n) \approx 6n$;本文简化模型和式 (21) 可近似为 $T(n) \approx 4n$;Heasoft 简化模型可近似为 $T(n) \approx 2n$ 。而模型计算效率不仅与模型本身有关,还需要考虑模型中物理量求解所需要的时间,显然本文简化模型所需物理量求解复杂度要小于 Sheikh 简化模型和 fei 模型。



(a) Crab 脉冲星 HXMT 数据轮廓对比



(b) Crab 脉冲星 NICER 数据轮廓对比



(c) PSR B1937+21 脉冲星 NICER 数据轮廓对比

图 4 简化模型高信噪比轮廓对比

表 2 各简化模型的均方根误差对比

脉冲星	数据包	均方根误差/s			
		fei 模型	本文简化模型	Sheikh 简化模型	Heasoft 简化模型
Crab	HXMT P0101297312	$1.210\ 062\ 37 \times 10^{-7}$	$4.387\ 120\ 50 \times 10^{-8}$	$1.212\ 372\ 24 \times 10^{-7}$	$7.134\ 149\ 37 \times 10^{-7}$
	HXMT P0101297314	$1.132\ 449\ 03 \times 10^{-7}$	$4.310\ 532\ 74 \times 10^{-8}$	$1.136\ 832\ 62 \times 10^{-7}$	$7.146\ 134\ 57 \times 10^{-7}$
	HXMT P0101297317	$1.081\ 623\ 13 \times 10^{-7}$	$4.350\ 526\ 64 \times 10^{-8}$	$1.085\ 639\ 33 \times 10^{-7}$	$7.128\ 588\ 43 \times 10^{-7}$
	HXMT P0101297319	$1.053\ 671\ 21 \times 10^{-7}$	$4.276\ 399\ 61 \times 10^{-8}$	$1.062\ 192\ 56 \times 10^{-7}$	$7.115\ 400\ 42 \times 10^{-7}$
	HXMT P0111605063	$1.385\ 190\ 01 \times 10^{-7}$	$4.512\ 848\ 09 \times 10^{-8}$	$1.386\ 206\ 74 \times 10^{-7}$	$6.983\ 283\ 39 \times 10^{-7}$
	NICER ni1011010101	$1.559\ 093\ 47 \times 10^{-7}$	$3.199\ 562\ 46 \times 10^{-8}$	$1.527\ 171\ 11 \times 10^{-7}$	$6.119\ 217\ 14 \times 10^{-7}$
	NICER ni1011010201	$5.220\ 938\ 20 \times 10^{-8}$	$3.351\ 933\ 32 \times 10^{-8}$	$5.066\ 833\ 05 \times 10^{-8}$	$6.383\ 004\ 19 \times 10^{-7}$
	NICER ni1013010102	$1.704\ 949\ 42 \times 10^{-7}$	$3.123\ 917\ 47 \times 10^{-8}$	$1.670\ 452\ 73 \times 10^{-7}$	$5.323\ 411\ 42 \times 10^{-7}$
	NICER ni1013010109	$5.914\ 653\ 62 \times 10^{-8}$	$3.601\ 028\ 31 \times 10^{-8}$	$5.936\ 948\ 76 \times 10^{-8}$	$1.590\ 031\ 40 \times 10^{-7}$
	NICER ni1013010119	$7.815\ 371\ 38 \times 10^{-8}$	$3.540\ 397\ 99 \times 10^{-8}$	$7.807\ 554\ 37 \times 10^{-8}$	$5.745\ 359\ 08 \times 10^{-8}$
PSR B1937+21	NICER ni1070020101	$1.837\ 289\ 60 \times 10^{-7}$	$2.470\ 628\ 70 \times 10^{-8}$	$1.854\ 880\ 36 \times 10^{-7}$	$3.469\ 635\ 47 \times 10^{-7}$
	NICER ni1070020102	$1.832\ 600\ 51 \times 10^{-7}$	$2.489\ 430\ 64 \times 10^{-8}$	$1.852\ 784\ 28 \times 10^{-7}$	$3.461\ 655\ 52 \times 10^{-7}$
	NICER ni1070020103	$1.828\ 810\ 23 \times 10^{-7}$	$2.501\ 442\ 97 \times 10^{-8}$	$1.851\ 135\ 69 \times 10^{-7}$	$3.449\ 877\ 88 \times 10^{-7}$
	NICER ni1070020105	$1.809\ 893\ 10 \times 10^{-7}$	$2.505\ 434\ 28 \times 10^{-8}$	$1.827\ 140\ 01 \times 10^{-7}$	$3.417\ 924\ 91 \times 10^{-7}$
	NICER ni1070020106	$1.798\ 817\ 66 \times 10^{-7}$	$2.518\ 692\ 98 \times 10^{-8}$	$1.818\ 002\ 73 \times 10^{-7}$	$3.404\ 597\ 40 \times 10^{-7}$

对比表 2 和表 3 数据,本文简化模型相比目前通用的 Sheikh 简化模型和 fei 模型运行时间分别缩短了至少 50% 和 10%,且计算精度并未降低,而 Heasoft 简化模型运行时间极短,但是其精度有限,这是因为其将 Roemer 延迟直接简化为几何延迟,而实际上这样简化的误差在大部分时刻便与太阳 Shapiro 延迟项在一个量级了(以 Crab 脉冲星距离 2 kpc 为例,若距离为 pc 量级,这个

误差会达到毫秒量级)。需要说明的是为了保证公式精度不受计算机性能影响,本文采用符号运算来保证大数运算的准确性,因而耗用时间整体偏高。

4.2 简化模型精度影响因素分析

对于完整模型,文献[23]已经对 Sheikh 完整模型各项进行了分析,本文完整模型各项量级与其保持一致,所具有的微小差别主要是引力时延项的计算

表3 各简化模型的计算效率对比

脉冲星	数据包	计算时间/s(@1 k 光子)			
		fei 模型	本文简化模型	Sheikh 简化模型	Heasoft 简化模型
Crab	HXMT P0101297312	21.959 872	19.866 355	48.867 033	5.563 508
	HXMT P0101297314	22.000 245	19.930 694	45.413 399	5.604 470
	HXMT P0101297317	21.886 138	20.001 201	48.889 235	5.588 831
	HXMT P0101297319	21.939 671	19.040 393	42.041 658	5.372 229
	HXMT P0111605063	22.112 748	19.666 753	51.164 145	5.438 329
	NICER ni1011010101	20.715 497	18.098 000	45.346 096	4.376 766
	NICER ni1011010201	21.598 406	18.913 226	45.716 314	5.289 692
	NICER ni1013010102	20.957 724	18.976 441	47.317 704	4.803 689
	NICER ni1013010109	20.477 485	18.731 874	46.750 935	4.415 883
	NICER ni1013010119	21.615 519	19.738 651	49.118 645	5.544 061
PSR B1937+21	NICER ni1070020101	20.785 937	18.225 575	42.182 654	4.872 563
	NICER ni1070020102	21.588 933	17.804 210	44.206 098	4.623 529
	NICER ni1070020103	21.145 148	17.968 510	41.937 375	4.852 484
	NICER ni1070020105	21.821 333	18.613 058	43.900 429	4.726 582
	NICER ni1070020106	20.639 256	18.437 631	41.181 089	4.469 446

不同引起,因而在此不再赘述,下面针对简化模型进行进一步仿真分析讨论,4.1节采用实测数据只能分析固定轨道和固定时间段的结果,故本节利用仿真数据分析几种简化模型在不同时间下的精度及精度影响因素.

算例3 不同简化模型精度随时间变化的关系

模拟轨道利用HXMT卫星的一段实际运行轨道逆推的轨道根数平均值生成,轨道根数均值如表4所示.

同样以本文完整模型作为标准,仿真分析模拟轨道下对于常见脉冲星2020年到2050年几种简化模型的误差随时间变化的关系,结果如图5所示,其中图5(a)为Crab脉冲星,图5(b)为PSR J0540-6919,图5(c)为PSR J1513-5908,图5(d)为PSR J1939+2134;几种简化模型30年的均方根误差对比则如表5所示.可以看到对于不同脉冲星本文简化模型的误差不低于亚微秒量级,而其他三种模型的误差大部分为亚微秒量级,几种简化模型的精度符合理论值.需要说明的是图5(a)几种简化模型误差在MJD 675 00附近十几天比较大,这主要是由于省略光线弯曲高阶改

正项引起的,这段时间内太阳与Crab脉冲星到SSB光子传播路径的距离特别近使得这一项增大了两个量级.

表4 模拟轨道的轨道根数

轨道六根数	数值
半长轴/km	6 932.139
离心率	0.001 6
轨道倾角/(°)	43.081 33
近地点辐角/(°)	164.368 80
升交点赤经/(°)	39.211 38
真近点角/(°)	206.160 18

算例4 轨道高度和脉冲星角位置测量误差对本文简化模型精度影响

利用STK软件仿真生成高度为560 km(低轨)、5 560 km(中轨)和29 430 km(高轨)的轨道(其余轨道参数一致),仿真条件与算例3一致,同样以本文完整模型作为标准,对于Crab脉冲星仿真不同轨道高度下本文所提简化模型的误差随时间变化的关系如图6所示,可以看出不同轨道高度对模型精度影响几

表5 各简化模型的均方根误差对比

脉冲星	均方根误差/s			
	fei 模型	本文简化模型	Sheikh 简化模型	Heasoft 简化模型
PSR J0534+2200	$1.209\ 685\ 13 \times 10^{-7}$	$3.795\ 672\ 05 \times 10^{-8}$	$1.213\ 685\ 44 \times 10^{-7}$	$4.026\ 903\ 11 \times 10^{-7}$
PSR J1513-5908	$1.193\ 733\ 40 \times 10^{-7}$	$2.374\ 035\ 88 \times 10^{-8}$	$1.194\ 061\ 05 \times 10^{-7}$	$2.547\ 097\ 20 \times 10^{-7}$
PSR J0540-6919	$1.190\ 221\ 67 \times 10^{-7}$	$2.441\ 832\ 69 \times 10^{-8}$	$1.189\ 993\ 91 \times 10^{-7}$	$1.269\ 401\ 14 \times 10^{-7}$
PSR J1939+2134	$1.193\ 424\ 68 \times 10^{-7}$	$2.310\ 676\ 35 \times 10^{-8}$	$1.190\ 605\ 75 \times 10^{-7}$	$3.069\ 366\ 76 \times 10^{-7}$

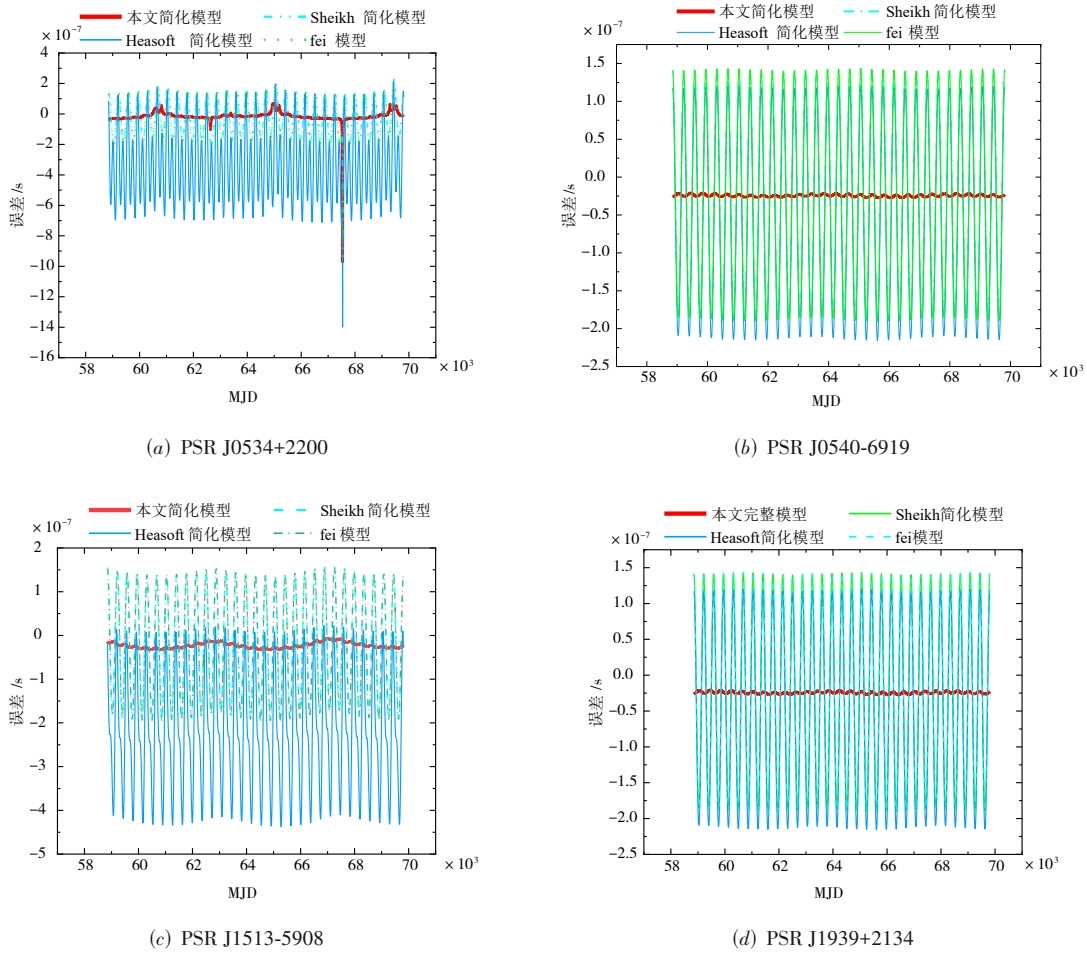


图5 常见脉冲星2020年到2050年的简化模型精度对比图

乎可以忽略不计,因此本文简化模型适用于所有高度的轨道;使用算例3的模拟轨道分析脉冲星角位置测量误差对简化模型精度的影响, Monte-Carlo 实验 1 000 次取均值(2020 年至 2050 年随机选取 1 000 个时刻),结果如图7所示,可以看出两者呈现对数变化趋势,在模型要求 10 纳秒量级精度时,角位置精度需达到亚纳角秒量级.

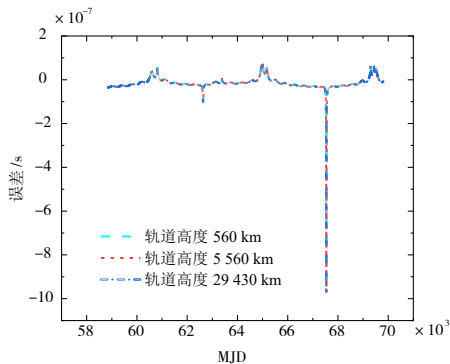


图6 不同轨道高度下精度对比

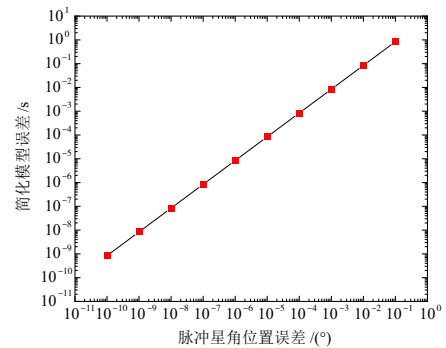


图7 不同脉冲星角位置误差下精度对比

5 结论

本文通过改变 Roemer 延迟的表达式及其二阶展开方式并考虑物理量的易获取度提出了一种新的快速 X 射线光子到达时间转换简化模型,并利用 NICER 卫星和 HXMT 卫星实测光子数据对本文所提模型的精度和计算效率进行验证分析,同时利用仿真数据分析轨道高度和脉冲星角位置测量误差对模型精度的影响. 结

果表明上述模型均可消去航天器的多普勒效应,保证轮廓的有效获取;本文所提简化模型相比目前通用的Sheikh简化模型和fei模型未造成精度降低,运行时间则缩短了至少50%和10%,且适用于常见脉冲星和所有高度的地球轨道,可满足地球轨道导航的应用需求。

参考文献

- [1] SHEIKH S I, HELTINGS R W, MATZNER R A. High-Order pulsar timing for navigation[C]//Proceedings of the 63rd Annual Meeting of the Institute of Navigation. Cambridge: Institute of Navigation, 2007: 432-443.
- [2] HELTINGS R W. Relativistic effects in astronomical timing measurements[J]. *The Astronomical Journal*, 1986, 91: 650-659.
- [3] SHEIKH S I. The Use of Variable Celestial X-Ray Sources for Spacecraft Navigation[D]. Maryland: University of Maryland, 2005.
- [4] 帅平, 李明, 陈绍龙, 等. X射线脉冲星导航系统原理与方法[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2009.
- [5] 王安国. 现代天文导航及其关键技术[J]. *电子学报*, 2007, 35(12): 2347-2353.
WANG A G. Modern celestial navigation and the key techniques[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, 35(12): 2347-2353. (in Chinese)
- [6] 郑伟, 李治泽, 李连升, 等. 脉冲星导航在载人火星探测中的应用[J]. *载人航天*, 2022, 28(5): 613-619.
ZHENG W, LI Z Z, LI L S, et al. Application of pulsar-based navigation in manned Mars exploration[J]. *Manned Spaceflight*, 2022, 28(5): 613-619. (in Chinese)
- [7] 周庆勇, 刘思伟, 姬剑锋, 等. 美国SEXTANT项目脉冲星导航空间试验进展及启迪[J]. *测绘科学与工程*, 2020, 40(5): 61-66.
- [8] 闫林丽, 葛明玉, 虞攸隶, 等. 5颗导航用X射线脉冲星计时分析[J]. *航空学报*, 2023, 44(3): 177-192.
YAN L L, GE M Y, TUO Y L, et al. Timing analysis for five navigation X-ray pulsars[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2023, 44(3): 177-192. (in Chinese)
- [9] 杨廷高, 高玉平, 童明雷, 等. 综合脉冲星时研究进展[J]. *航空学报*, 2023, 44(3): 61-77.
YANG T G, GAO Y P, TONG M L, et al. Review on research progress of ensemble pulsar time-scale[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2023, 44(3): 61-77. (in Chinese)
- [10] 杨廷高. 关于脉冲星脉冲到达时间转换方程[J]. *时间频率学报*, 2009, 32(2): 154-159.
YANG T G. On transfer equation of pulsar pulse arrival time[J]. *Journal of Time and Frequency*, 2009, 32(2): 154-159. (in Chinese)
- [11] 何元智, 尹浩, 谭庆贵, 等. 基于微波光子的卫星通信载荷架构及关键技术[J]. *电子学报*, 2022, 50(12): 2945-2956.
HE Y Z, YIN H, TAN Q G, et al. Architecture and key technologies of satellite communication payload based on microwave photonics[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2022, 50(12): 2945-2956. (in Chinese)
- [12] FANG H Y, SU J Y, LI L S, et al. An analysis of X-ray pulsar navigation accuracy in earth orbit applications[J]. *Advances in Space Research*, 2021, 68(9): 3731-3748.
- [13] 帅平, 陈绍龙, 吴一帆, 等. X射线脉冲星导航原理[J]. *宇航学报*, 2007, 28(6): 1538-1543.
SHUAI P, CHEN S L, WU Y F, et al. Navigation principles using X-ray pulsars[J]. *Journal of Astronautics*, 2007, 28(6): 1538-1543. (in Chinese)
- [14] 谢振华, 许录平, 倪广仁. 基于最大似然的X射线脉冲星空间定位研究[J]. *宇航学报*, 2007, 28(6): 1605-1608, 1642.
XIE Z H, XU L P, NI G R. X-ray pulsars-based spacecrafts' position determination algorithm based on maximum likelihood estimation[J]. *Journal of Astronautics*, 2007, 28(6): 1605-1608, 1642. (in Chinese)
- [15] 李建勋, 柯熙政. 基于脉冲星定时模型的自主导航定位方法[J]. *中国科学(G辑: 物理学 力学 天文学)*, 2009, 39(2): 311-317.
LI J X, KE X Z. Autonomous navigation and positioning method based on pulsar timing model[J]. *Science in China (Series G (Physics, Mechanics & Astronomy))*, 2009, 39(2): 311-317. (in Chinese)
- [16] 孙维瑾, 费保俊, 肖昱, 等. X射线脉冲星自主导航的光传播时间方程[J]. *天文学报*, 2008, 49(2): 198-206.
SUN W J, FEI B J, XIAO Y, et al. The time equation of light propagation in XNAV[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2008, 49(2): 198-206. (in Chinese)
- [17] 黄震, 李明, 帅平. X射线脉冲星导航的时间转换模型研究[C]//全国第十三届空间及运动体控制技术学术会议论文集. 宜昌: 中国自动化学会, 2008: 126-131.
- [18] HUANG Z, LI M, SHUAI P. On time transfer in X-ray pulsar navigation[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2009, 52(5): 1413-1419.
- [19] MURRAY C A, Eichhorn H. Vectorial astrometry[J]. *Physics Today*, 1984, 37(5): 84-86.
- [20] 赵铭, 黄天衣. 脉冲星计时数据的天体测量解析[J]. *中国科学(G辑: 物理学 力学 天文学)*, 2009, 39(11): 1671-1677.
ZHAO M, HUANG T Y. An astrometry parsing to the data of pulsar timing[J]. *Science in China (Series G (Physics, Mechanics & Astronomy))*, 2009, 39(11): 1671-1677. (in Chinese)

Chinese)

- [21] 周庆勇, 姬剑锋, 任红飞. X 射线脉冲星自主导航的观测方程[J]. 物理学报, 2013, 62(13): 586-595.
ZHOU Q Y, JI J F, REN H F. Timing equation in X-ray pulsar autonomous navigation[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(13): 586-595. (in Chinese)
- [22] 费保俊, 孙维瑾, 潘高田, 等. X 射线脉冲星自主导航的光子到达时间转换[J]. 空间科学学报, 2010, 30(1): 85-90.
FEI B J, SUN W J, PAN G T, et al. Transformation of photon time of arrival in XNAV[J]. Chinese Journal of Space Science, 2010, 30(1): 85-90. (in Chinese)
- [23] 费保俊. 相对论在现代导航中的应用[M]. 第 2 版. 北京: 国防工业出版社, 2015.
- [24] 任红飞, 魏子卿, 周庆勇. 相对论框架下脉冲星导航的 2PN 观测方程[J]. 测绘学报, 2014, 43(10): 1025-1031.
REN H F, WEI Z Q, ZHOU Q Y. The 2PN observation equation for pulsar navigation in framework of general relativity[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2014, 43(10): 1025-1031. (in Chinese)
- [25] 任红飞. 相对论框架下脉冲星导航模型的研究[D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2012.
- [26] 李小平, 方海燕, 孙海峰, 等. X 射线脉冲星大尺度时间转换模型研究[J]. 载人航天, 2015, 21(6): 628-634.
LI X P, FANG H Y, SUN H F, et al. Research on large-scale time transform model of X-ray pulsar[J]. Manned Spaceflight, 2015, 21(6): 628-634. (in Chinese)
- [27] 赵峥. 《广义相对论入门讲座》连载④: 度规张量[J]. 大学物理, 2011, 30(10): 60-61.
ZHAO Z. Introduction to general relativity lecture (4)—Metric tensor[J]. College Physics, 2011, 30(10): 60-61. (in Chinese)
- [28] 常高. 引力场的度规张量及行星运动的广义相对论效应[J]. 沈阳工业大学学报, 1998, 20(1): 76-78.
- [29] 方海燕, 李连升, 张力, 等. X 射线脉冲星短时观测高信噪比轮廓获取方法: CN110986922B[P]. 2022-09-06.
FANG H Y, LI L S, ZHANG L, et al. X-ray pulsar short-time observation high-signal-to-noise ratio contour acquisition method: CN110986922B[P]. 2022-09-06. (in Chinese).
- [30] BLACKBURN J K, SHAW R A, PAYNE H E, et al. NASA's HEASARC: Software[EB/OL]. (2021-09-01) [2022-09-02]. https://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/software/lheasoft/RelNotes_6.29.html.
- [31] 赵雄文, 张钰, 秦鹏, 等. 空天地一体化无线光通信网络关键技术及其发展趋势[J]. 电子学报, 2022, 50(1): 1-17.
ZHAO X W, ZHANG Y, QIN P, et al. Key technologies and development trends for a space-air-ground integrated

wireless optical communication network[J]. Acta Electronica Sinica, 2022, 50(1): 1-17.

- [32] FAIRHEAD L, BRETAGNON P. An analytical formula for the time transformation TB-TT[J]. Astronomy and Astrophysics, 1990, 229(2): 240-247.

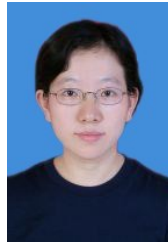
作者简介



张泽葳 男, 1998 年 1 月出生于山西省晋中市. 现为西安电子科技大学在读博士生. 主要研究方向为航天器及编队自主导航.
E-mail: zeweizhang@stu.xidian.edu.cn



包为民 男, 1960 年 3 月出生于黑龙江省哈尔滨市. 制导与控制专家、中国科学院院士、国际宇航科学院院士. 现为中国航天科技集团公司科技委主任.
E-mail: baoweimin_xd@163.com



方海燕 女, 1974 年出生于山东省济宁市. 教授, 博导. 主要研究方向为 X 射线脉冲星导航、“觅音”计划卫星平台高精度测量及地面验证. 中国电子学会会员编号: E190015406M.
E-mail: hyfang@xidian.edu.cn



苏剑宇 男, 1992 年出生于山西省晋城市. 现为西安电子科技大学在读博士生. 主要研究方向为 X 射线脉冲星导航.
E-mail: sjychangmian@163.com



李小平 女, 1961 年出生于山西省. 教授, 博导. 主要研究方向为空间测控通信、空间科学及应用、智能通信及信息处理. 中国电子学会会员编号: E190015417M.
E-mail: xpli@xidian.edu.cn

姚云峰 男, 1996 年出生于河北省张家口市. 2022 年硕士毕业于西安电子科技大学, 现为中国电子科技集团公司第五十四研究所工程师, 从事导航技术方面研究.
E-mail: 1171095952@qq.com