

1D和2D被动传感器测向交叉定位 最优交会问题研究

崔剑锋^{1,2}, 梁红^{1*}

(1. 西北工业大学航海学院, 陕西西安 710072; 2. 中国船舶集团汾西重工有限责任公司, 山西太原 030000)

摘要: 我们研究了1D和2D被动传感器构成的测向交叉定位系统的最优交会问题。通过定位精度的闭式解、极值分析及几何交会分析的方法, 明确了全局最优交会点, 探明了最优交会位置的空间分布特性及其影响因素和影响规律。研究表明: 全局最优交会点位于基线(或2D传感器)所在的水平面; 最优交会位置由几何交会特性与测量误差的距离扩散效应共同决定, 分布在以基线中点为圆心、基线长度为直径的水平面上的圆弧附近, 并朝着基线方向塌陷; 传感器位置变化不影响最优交会位置对基线的相对位置, 当基线和测角误差的方差比确定时, 最优交会位置即确定。根据算例分析还可得出猜想: 最优交会区向测角误差项更多、误差值更大的传感器收敛。在工程实际中, 最优交会区比最优交会点更具有应用价值, 通过最优交会位置与目标探测结果或预估位置的匹配, 可有效提高系统定位性能。

关键词: 几何交会特性; 距离扩散效应; 最优交会点; 最优交会区

中图分类号: TN971

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2025)01-0063-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20240292

Study on Optimal Rendezvous Problem in 1D and 2D Passive Sensor Triangulation

CUI Jian-feng^{1,2}, LIANG Hong^{1*}

(1. School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China;

2. Fenxi Heavy Industry Co., Ltd., CSSC, Taiyuan, Shanxi 030000, China)

Abstract: We investigated the optimal intersection problem of a direction-finding cross-location system composed of 1D and 2D passive sensors. Utilizing closed-form solutions for localization accuracy, extremum analysis, and geometric intersection analysis, we identified the global optimal intersection point and explored the spatial distribution characteristics of optimal intersection positions, as well as their influencing factors and underlying principles. The study reveals that the global optimal intersection point lies in the horizontal plane of the baseline (or 2D sensor). The optimal intersection locations are jointly determined by the geometric intersection characteristics and the distance diffusion effect of measurement errors, distributed around an arc on the horizontal plane with the midpoint of the baseline as the center and the baseline length as the diameter, collapsing towards the baseline. Variations in sensor positions do not affect the relative position of the optimal intersection location to the baseline; once the variance ratio of the baseline and angular measurement errors is established, the optimal intersection location is determined. Furthermore, case analysis suggests that the optimal intersection area converges towards sensor with larger angular measurement errors. In practical engineering applications, the optimal intersection area holds greater utility than the optimal intersection point; matching the optimal intersection locations with target detection results or estimated positions can effectively enhance the system's positioning performance.

Key words: geometric intersection characteristics; distance diffusion effect; optimal intersection point; optimal intersection area

1 引言

利用目标的角度测量信息进行定位是最常用的被

动定位技术之一^[1-3], 在AOA(Angle Of Arrival)定位(也称测向交叉定位或三角定位)和TOA(Time Of Arrival)

-AOA融合定位等系统中发挥着重要的作用^[4-6]. 在多站无源AOA定位系统中,可利用多个被动传感器测量得到的方位角和俯仰角信息进行交叉得到目标的位置.

在关于定位性能的研究中,已经发现目标位置的变化会导致定位性能的变化,这一现象存在于AOA、TOA、TDOA(Time Difference Of Arrival)等各类定位技术中.文献[7]的研究表明传感器与目标的相对位置对定位性能有显著影响.文献[8]阐述了角度测量精度、几何稀释效应,以及整体定位性能方面的对比.文献[9]通过应用研究发现传感器阵列内的传感器坐标误差值大于传感器阵列外的传感器坐标值.文献[10]证明在固定目标方向时,DOP(Dilution Of Precision)与目标距离成线性比例.

基于这一现象,目标位于什么位置能够取得最优的定位性能成为一项重要的研究内容,即最优交会点的确定.通过最优交会点与目标高概率区域的匹配,可以充分挖掘系统潜力,实现高精度定位.

针对2D测向交叉定位的最优交会问题的研究已持续多年.文献[11]的仿真表明,目标与观测站之间的几何位置关系、角度测量精度对定位精度有很大影响.文献[12]研究了测角误差对目标位置估计的影响.文献[13]分析计算了目标到传感器基线的垂距与基线长度的比值 l 变化时,最优交会角的位置.文献[14]则扩展了目标所在位置的研究条件,计算得到平面内的最优交会角.文献[15]计算了两部传感器的测角误差不同时,的最优交会角.

对于3D测向交叉定位,由于定位性能指标闭式解及极值问题的复杂性,最优交会位置的研究比较有限.文献[16]针对1D和2D被动传感器测向交叉定位系统,计算了恒俯仰角下的最优交会角,并分析了不同的测角误差比值对最优交会角的影响.针对测角误差均一致的情况,文献[17]发现当基站与用户处于相同高度时,VDOP(Vertical Dilution Of Precision)达到最佳.文献[18]分析了AOA与TOA相结合的定位系统的DOP,仿真表明DOP与基站部署的规模、测量值的标准差之比有关.

最优交会点的确定还对阵列结构优化有重要的意义.最优交会位置的确定与传感器的优化配置构成一对反问题,定位性能的分析是这类应用研究的基础,它们也受到了广泛的研究和关注.文献[19]证明了定位精度与传感器数量和阵列几何结构有关.文献[20]研究了AOA传感器位置对定位性能的影响.文献[21]研究了基于线列阵测向角的定位性能.文献[22~24]研究了多传感器测向交叉定位的优化部署策略.

基于三个测角参数的1D和2D被动传感器构成一类3D定位最少参数系统,最少参数系统是多传感器、多参数定位的基础,具有重要的理论和实践意义.目前

主要存在几个问题:(1)对于测角误差不同时3D定位的最优交会位置研究有限,全局最优交会点尚未明确;(2)单一最优交会角或最优交会点的应用价值有限,且可能不存在可行解^[16],有待扩展到更宽泛的区域;(3)目前的研究更多集中于数值计算,最优交会位置的空间分布特性及其物理意义、几何解释不够明确.

本文以1D和2D被动传感器构成的测向交叉定位系统为研究对象,推导了CRLB(Cramer-Rao Lower Bound)及性能评估函数的闭式解,进而通过极值分析和几何交会分析,解决了上述问题.

2 定位原理与性能评估函数

设目标的位置坐标为 $\mathbf{x}=(x,y,z)^T$;设传感器1为2D传感器,部署位置为 (x_1,y_1,z_1) ,测得目标俯仰角与方位角为 (ε_1,ϕ_1) ;传感器2为1D传感器,部署位置为 (x_2,y_2,z_2) ,测得目标方位角为 ϕ_2 .从几何上看,这一类测向交叉问题是方向向量与竖直面交会问题,定位原理示意图见图1.

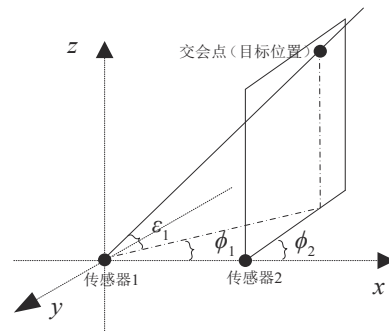


图1 定位原理示意图

根据矢量数量积和三角函数的性质,可得

$$\varepsilon_1 = \arcsin\left(\frac{z-z_1}{\sqrt{C_1}}\right) \quad (1)$$

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{x-x_1}{\sqrt{D_1}}\right) \quad (2)$$

$$\phi_2 = \arccos\left(\frac{x-x_2}{\sqrt{D_2}}\right) \quad (3)$$

其中,

$$C_i = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2, i=1 \quad (4)$$

$$D_i = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2, i=1,2 \quad (5)$$

将角度测量方程组表示为

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{h}(\mathbf{x})=[\varepsilon_1(\mathbf{x}),\phi_1(\mathbf{x}),\phi_2(\mathbf{x})]^T$; $\mathbf{u}=[e_{\varepsilon_1},e_{\phi_1},e_{\phi_2}]^T$,为零均值高斯白噪声,其标准差分别为 $(\sigma_{\varepsilon_1},\sigma_{\phi_1},\sigma_{\phi_2})$.设角度测量值彼此独立,则有似然函数:

$$p(\mathbf{g}|\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{R}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{g}-\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{g}-\mathbf{h}(\mathbf{x}))\right) \quad (7)$$

其中,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\phi_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi_2}^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

CRLB为估计量的协方差提供了下界,可由Fisher信息矩阵的逆计算,即

$$E[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T] \geq \mathbf{J}^{-1} \quad (9)$$

Fisher信息矩阵为

$$\mathbf{J} = E[\nabla_{\mathbf{x}} \ln p(\mathbf{g}|\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} \ln p(\mathbf{g}|\mathbf{x}))^T] = \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \quad (10)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{(x-x_1)(z-z_1)}{C_1\sqrt{D_1}} & \frac{(y-y_1)(z-z_1)}{C_1\sqrt{D_1}} & -\frac{\sqrt{D_1}}{C_1} \\ \frac{y-y_1}{D_1} & -\frac{x-x_1}{D_1} & 0 \\ \frac{y-y_2}{D_2} & -\frac{x-x_2}{D_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

则CRLB为

$$\text{CRLB} = \mathbf{J}^{-1} \quad (12)$$

本文采用CRLB迹开方来评估定位性能,即估计量标准差的下界,定义为PA(Positioning Accuracy),与广义的GDOP^[19,25]、误差标准差^[16]等价,与圆概率误差^[13]成正比,定义式如下:

$$\text{PA} = \sqrt{\text{CRLB}(1,1) + \text{CRLB}(2,2) + \text{CRLB}(3,3)} \quad (13)$$

若令 $k_1 = \frac{\sigma_{\phi_1}^2}{\sigma_{\phi_2}^2}$, $k_2 = \frac{\sigma_{\varepsilon_1}^2}{\sigma_{\varepsilon_2}^2}$, 整理可得PA的闭式解:

$$\begin{aligned} \text{PA} = & \sigma_{\phi_2} \left(\frac{k_2(x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + z^2 - 2zz_1 + z_1^2)^2}{(x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2)^2} \right. \\ & + \frac{k_1(x-x_1)^2(x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2)^2}{(xy_1 - x_1y - xy_2 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ & + \frac{(x-x_1)^2(x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2)^2}{(xy_1 - x_1y - xy_2 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ & + \frac{k_1(y-y_2)^2(x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2)^2}{(xy_1 - x_1y - xy_2 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ & + \frac{(y-y_1)^2(x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2)^2}{(xy_1 - x_1y - xy_2 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ & + \frac{(z-z_1)^2(x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2)^2}{(xy_1 - x_1y - xy_2 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ & \left. + \frac{k_1(z-z_1)^2(-x^2 + xx_1 + xx_2 - x_1x_2 + yy_1 + yy_2 - y_1y_2 - y^2)^2}{(xy_1 - x_1y - xy_2 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1)^2} \right)^{0.5} \quad (14) \end{aligned}$$

从式(14)可知,定位精度是关于测量误差标准差及其方差比、传感器坐标,以及目标位置的函数;当测量误差标准差及其方差比确定时,PA取决于目标位置

及传感器部署,分别反映了定位性能的空间分布特性和传感器部署对定位性能的影响.

从式(14)还可推知, σ_{ϕ_2} 可以作为常数系数提出,因此PA的相对分布特性与 $(\sigma_{\varepsilon_1}, \sigma_{\phi_1}, \sigma_{\phi_2})$ 的具体值无关,而是与方差比 k_1, k_2 有关. 在AOA与TOA联合定位技术中也有类似的结论: DOP与测量值的标准差之比有关^[18].

3 最优交会点分析

可从最优交会点解算和几何交会两个角度对最优交会问题进行分析.

为了最优交会问题的准确描述,结合1D和2D传感器测向交会问题的特点,我们将两个传感器的连线在2D传感器所在水平面上的投影定义为阵列或系统的基线.

3.1 最优交会点解算

实践中,直接对全局最优极值进行求解和分析运算量较大,难以适用于批量求解. 为此,考虑从全局极值点直接解算和先计算分层极值点再求全局极值点两种思路进行分析.

A. 全局极值点解算与分析

PA函数是一个三元函数,可通过无约束极值分析进行解算和分析.

记 $\text{PA} = f(x, y, z)$, 通过一阶偏导数可以求得PA的稳定点,式如: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, 联立求解即可得到稳定点所在的位置,设为 \mathbf{x}_0 . 通过二阶偏导数可以进一步分析其是否是极小值. 设PA在稳定点 \mathbf{x}_0 的某一邻域内所有二阶偏导数连续,令

$$D_1 = f''_{xx}(\mathbf{x}_0) \quad (15)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\mathbf{x}_0) & f''_{xy}(\mathbf{x}_0) \\ f''_{xy}(\mathbf{x}_0) & f''_{yy}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\mathbf{x}_0) & f''_{xy}(\mathbf{x}_0) & f''_{xz}(\mathbf{x}_0) \\ f''_{xy}(\mathbf{x}_0) & f''_{yy}(\mathbf{x}_0) & f''_{yz}(\mathbf{x}_0) \\ f''_{xz}(\mathbf{x}_0) & f''_{yz}(\mathbf{x}_0) & f''_{zz}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} \quad (17)$$

若 $D_k > 0 (k=1, 2, 3)$, 则PA在稳定点 \mathbf{x}_0 有极小值; 若 $(-1)^k D_k > 0 (k=1, 2, 3)$, 则PA在稳定点 \mathbf{x}_0 有极大值; 否则, 稳定点 \mathbf{x}_0 不是极值点.

B. 分层极值点解算与分析

作为一个三元函数,PA的极值分析相对繁琐. 我们还可以通过将PA进行分层降维,对各层分别解算极值,再对各层极值进行比较,从而求得全局极值.

当在z轴方向进行分层时,记 $\text{PA}_{z_0} = f(x, y)$ 表示 $z = z_0$ 平面所在层的PA值,通过一阶偏导可以求得PA的稳定点,式如: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 联立即可得到稳定点所在

的位置,记为 (x_0, y_0) ,通过二阶偏导数进一步分析其是否为极小值,设PA在稳定点 \mathbf{x}_0 的某一邻域内所有二阶偏导数连续,记 $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$,则有如下结论:

$\Delta > 0$ 且 $A < 0$,则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值;

$\Delta > 0$ 且 $A > 0$,则 $f(x_0, y_0)$ 为极小值;

$\Delta < 0$,则 $f(x_0, y_0)$ 不是极值;

$\Delta = 0$,需做进一步讨论.

同理,还可对PA在 x 轴或 y 轴方向进行分层极值点解算分析.

3.2 几何交会分析

从几何角度考虑,本节研究的1D和2D被动传感器测向交叉定位实质上是射线(从2D传感器引出)与竖直面(由1D传感器确定)的交会问题,进一步地,射线可以看作圆锥面与竖直面的交会线.因此,对于本节的研究对象,可以构建为三面交会的几何交会问题:经过1号传感器(2D)的圆锥面、经过1号传感器的竖直面、经过2号传感器(1D)的竖直面.为便于分析,将1号圆锥面等价于经过射线的圆锥面上的切面,可称为1号圆锥面切面.

设交会点为 \widehat{P}_0 ,考虑空间中射线与面的交会问题,其交会点的定位性能(可由PA函数描述)取决于线与面的交会角以及线与面在交会点处的切向测量误差.对于三面交会问题,交会点的定位性能取决于同样的因素.

其中,切向测量误差指角度测量误差乘以交会点与角度测量起始点(指传感器所在位置)的距离,是一种长度或距离测量误差.当测角误差固定时,随着交会点距离变远,切向测量误差将线性增加(与弧长公式一致),将这一效应称为测量误差的距离扩散效应.交会点处的切向测量误差正比于交会点位置与传感器位置的距离,可描述为

$$c_{e_1}(\widehat{P}_0) = e_{e_1} \cdot d_{1\widehat{P}_0}; c_{\phi_1}(\widehat{P}_0) = e_{\phi_1} \cdot d_{1P_0}; c_{\phi_2}(\widehat{P}_0) = e_{\phi_2} \cdot d_{2P_0}$$

其中, $d_{1\widehat{P}_0}$ 表示1号传感器(1号传感器与其在基线上的投影重合)与点 \widehat{P}_0 的距离, d_{1P_0} 表示1号传感器与 P_0 的距离, d_{2P_0} 表示2号传感器在基线上的投影与 P_0 的距离, P_0 为 \widehat{P}_0 在基线所在水平面($z=z_1$)上的投影.在三面交会模型下,上述三个角度测量误差及切向测量误差也分别对应着三个参与交会的平面.

在三面交会模型下,线与面的交会角可以由三个夹角进行描述:1号圆锥面与1号竖直面的夹角、1号圆锥面切面与2号竖直面的夹角、1号竖直面与2号竖直面的夹角.其中1号圆锥面切面与1号竖直面由于从一个传感器发出,因此两面始终垂直.1号竖直面与

2号竖直面均垂直于水平面,由交会点位置的水平坐标决定.1号圆锥面切面与2号竖直面的夹角由交会点位置的坐标决定.三个夹角分别记为 $\angle S_{e_1}(P_0)S_{\phi_1}(P_0)$; $\angle S_{e_1}(P_0)S_{\phi_2}(P_0)$; $\angle S_{\phi_1}(P_0)S_{\phi_2}(P_0)$.夹角只取锐角,超过 90° 时取其补角;夹角可以反映交会点处切向测量误差的相关性(两面夹角可由两面法向量的夹角来描述),夹角越小,相关性越强;当夹角等于 90° 时,两面正交,切向测量误差的相关性最弱,等于0.

从几何角度考虑,当射线与竖直面垂直的时候,称之为正交线,定位性能可能达到最佳,但由于测量误差的距离扩散效应,导致真实的最优交会位置会向基线塌陷.据此猜想,“全局最优交会点始终位于1号传感器(即2D传感器)所在水平面 $z=z_1$ 上”.以下采用反证法进行证明.

设全局最优优点为偏离于 $z=z_1$ 平面的位置 \widehat{P}_0 ,则决定交会点 \widehat{P}_0 定位性能的三个切向测量误差和三个夹角分别为 $c_{e_1}(\widehat{P}_0) = e_{e_1} \cdot d_{1\widehat{P}_0}$; $c_{\phi_1}(\widehat{P}_0) = e_{\phi_1} \cdot d_{1P_0}$; $c_{\phi_2}(\widehat{P}_0) = e_{\phi_2} \cdot d_{2P_0}$; $\angle S_{e_1}(\widehat{P}_0)S_{\phi_1}(\widehat{P}_0)$; $\angle S_{e_1}(\widehat{P}_0)S_{\phi_2}(\widehat{P}_0)$; $\angle S_{\phi_1}(\widehat{P}_0)S_{\phi_2}(\widehat{P}_0)$.

从 \widehat{P}_0 向基线所在水平面做垂线,设垂线与该水平面交点为 P_0 ,则决定点 P_0 定位性能的三个切向测量误差和三个夹角分别为 $c_{e_1}(P_0) = e_{e_1} \cdot d_{1P_0}$; $c_{\phi_1}(P_0) = e_{\phi_1} \cdot d_{1P_0}$; $c_{\phi_2}(P_0) = e_{\phi_2} \cdot d_{2P_0}$; $\angle S_{e_1}(P_0)S_{\phi_1}(P_0)$; $\angle S_{e_1}(P_0)S_{\phi_2}(P_0)$; $\angle S_{\phi_1}(P_0)S_{\phi_2}(P_0)$.

$\because d_{1\widehat{P}_0} > d_{1P_0}$; 而 $e_{e_1}, e_{\phi_1}, e_{\phi_2}$ 不变;

$\therefore c_{e_1}(\widehat{P}_0) > c_{e_1}(P_0)$; $c_{\phi_1}(\widehat{P}_0) = c_{\phi_1}(P_0)$; $c_{\phi_2}(\widehat{P}_0) = c_{\phi_2}(P_0)$;

又,

$\therefore P_0$ 与 \widehat{P}_0 的水平坐标一致;

$\therefore \angle S_{\phi_1}(\widehat{P}_0)S_{\phi_2}(\widehat{P}_0) = \angle S_{\phi_1}(P_0)S_{\phi_2}(P_0)$

又,

$$\angle S_{e_1}(\widehat{P}_0)S_{\phi_1}(\widehat{P}_0) = \angle S_{e_1}(P_0)S_{\phi_1}(P_0) = 90^\circ$$

$$\angle S_{e_1}(\widehat{P}_0)S_{\phi_2}(\widehat{P}_0) < \angle S_{e_1}(P_0)S_{\phi_2}(P_0) = 90^\circ$$

综上可知,对于任意偏离于 $z=z_1$ 平面的一点 \widehat{P}_0 ,总有位于 $z=z_1$ 平面的一点 P_0 ,满足测量误差变小且测量误差之间的相关性变弱,因此 P_0 定位性能优于 \widehat{P}_0 .因此,全局最优优点位于“偏离于 $z=z_1$ 平面的位置 \widehat{P}_0 ”不成立,即全局最优交会点位于 $z=z_1$ 平面.

4 算例与结果

基阵的前向($y > 0$)定位性能与后向($y < 0$)定位性能具有对称性,为了简化分析,只讨论前向空间;同样,由于基阵上方与下方的定位性能也具有对称性,本文也只讨论上方空间($z \geq 0$). 为了便于与此前文献的研究结果进行比对和验证,参照类似的系数设定^[16]: $\sigma_{\phi_1}^2 = k_1 \cdot \sigma_{\phi_2}^2$, $\sigma_{e_1}^2 = k_2 \cdot \sigma_{e_2}^2$,其中 k_1 、 k_2 为测角误差方差的比值;设 σ_{ϕ_2} 为 1° ; l 表示目标到阵列基线的垂距与基线长度的比值.

单一最优交会点的应用价值有限,对其进行扩展,将PA 优于某一给定阈值的空间区域称为最优交会区,二者统称为最优交会位置. 设传感器 1 位于坐标原点,传感器 2 位于(30, 0, 0) km 处.

4.1 最优交会点的宏观分布(测角误差对最优交会点的影响)

PA 函数描述了定位性能的空间分布,通过绘制 PA 的分布图,可以直观地了解最优交会点的信息,包括位置与 PA 值;通过不同的误差参数设置,还可以比较分析参数变化对最优交会点的宏观影响.

测角误差可以分为俯仰角测角误差和方位角测角误差. 为了分析俯仰角测角误差对最优交会点的影响,固定 k_1 的值,分析 k_2 变化时的情况. 根据 3.2 节的论证结果,全局最优交会点位于 $z=0$ 层析面上,如图 2~图 4 所示.

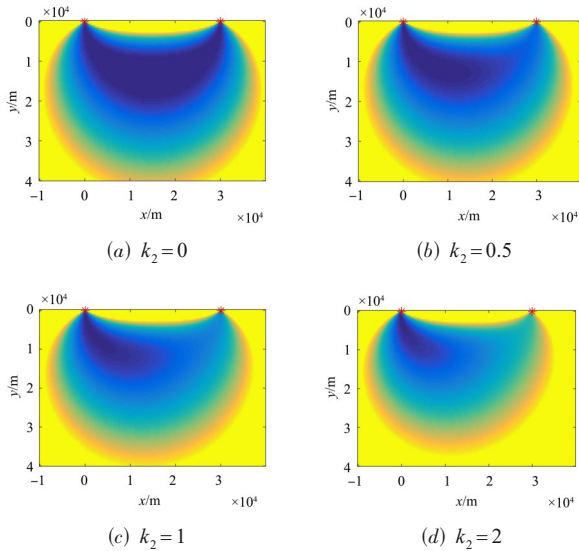


图 2 PA 分布图($k_1=1$)

两传感器的测角误差接近是工程实践中普遍的情况,可令 $k_1=1$,即方位角测量精度相等,分别讨论 $k_2=0, 0.5, 1, 2$ 时的最优交会点.图 2(a)~图 2(d)分别给出 $k_2=0, 0.5, 1, 2$ 时,最优交会点所在层析面的 PA 分布图.

令 $k_1=0.5$,分别讨论 $k_2=0, 0.5, 1, 2$ 时的最优交会

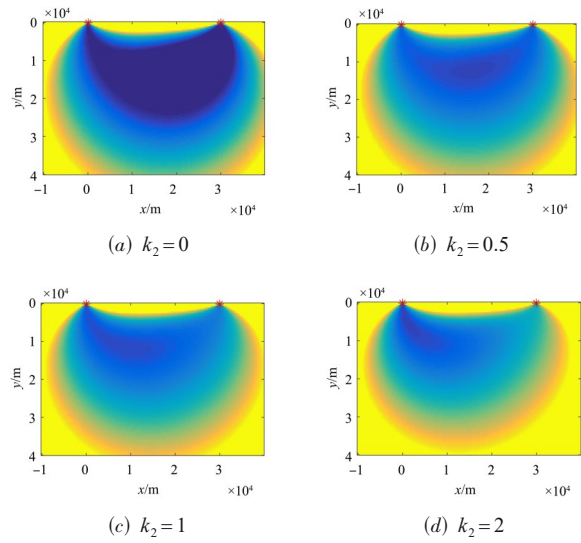


图 3 PA 分布图($k_1=0.5$)

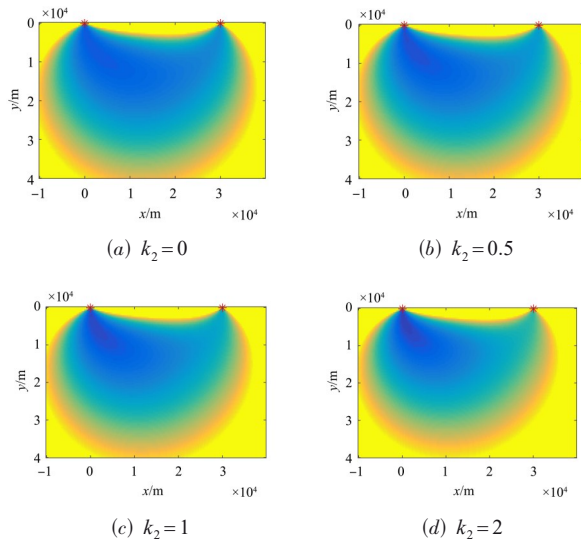


图 4 PA 分布图($k_1=2$)

点. 图 3(a)~图 3(d)分别给出 $k_2=0, 0.5, 1, 2$ 时,最优交会点所在层析面的 PA 分布图.

令 $k_1=2$,分别讨论 $k_2=0, 0.5, 1, 2$ 时的最优交会点.图 4(a)~图 4(d)分别给出 $k_2=0, 0.5, 1, 2$ 时,最优交会点所在层析面的 PA 分布图.

从图 2~图 4 可以得到一个直观的结论:1 号传感器俯仰角测角误差的存在使得最优交会区及最优交会点趋近于 1 号传感器,并且俯仰角误差越大,这一效应越显著.

固定 k_2 的值,分析 k_1 变化时的情况,从图 2~图 4 还可以得到方位角测角误差影响的规律:最优交会区趋近于方位角误差较大的传感器附近. 这一结论可与文献[16]中的有关结果互为验证.

综合图2~图4,还可以发现:俯仰角测角误差与方位角测角误差对最优交会区的影响是互相叠加的.

通过PA分布图分析最优交会点的位置存在解算精度受限的问题,即受到图形像素点分辨距离的精度限制.因此,通常情况下,为了精确地确定最优交会点的位置,还需要通过极值分析的方法进行解析计算.

4.2 轴向分层最优交会点及其分布

PA是一个三元函数,极值分析相对繁琐,为避免初值对稳定点求解时造成的遗漏等问题,先做分层分析,再对各层所得局部最优值进行比较,从而得到全局最优值.设定一组误差参数,令 $k_1=1, k_2=0$,有效稳定点解算结果如图5~图7所示,结合PA分布特性,可知所得稳定点为相应层的最优交会点.

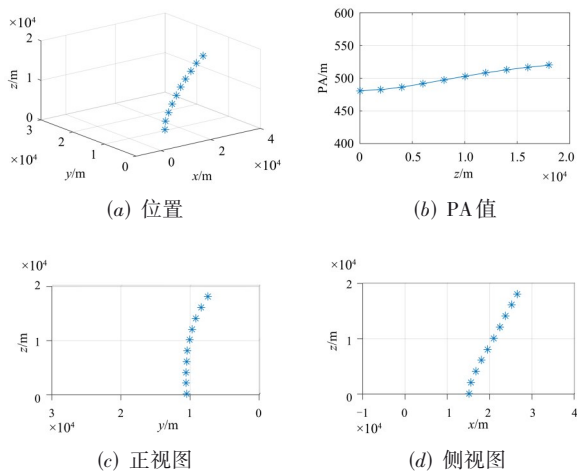


图5 z 向分层最优交会点位置及其PA值($k_1=1, k_2=0$)

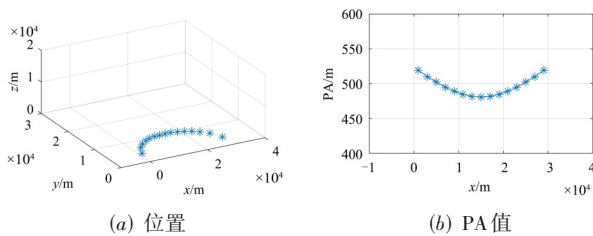


图6 x 向分层最优交会点及其PA值($k_1=1, k_2=0$)

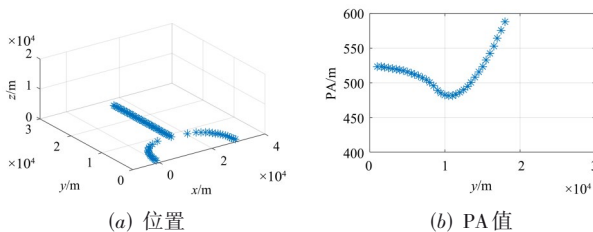


图7 y 向分层最优交会点及其PA值($k_1=1, k_2=0$)

图5(a)中的曲线容易造成视觉错误,为了更清晰地表达,本文通过图5(c)和图5(d)分别给出图5(a)的正视图和侧视图.由图5可知,随着 z 值的增加,最优交会点位置偏向于1D传感器;定位性能通常并不会关于基线的中垂线对称,从输入参数为 $(\epsilon_1, \phi_1, \phi_2)$ 时的定位性能表达式^[16]容易理解这一点,函数并不具有这样的对称性.

对比图5(b)、图6(b)、图7(b)可知,分层最优交会点的PA值在 z 轴方向上是浮动最小的.这一点在文献[16]中有类似的结果:在小仰角情况下,最优交会角及其定位误差受仰角变化的影响比较小.

图6中呈现出的规则圆弧可以通过几何交会性能分析进行说明.

由图7(a)可以得出与2D测向交叉定位($k_1=1$)一致的结论^[13]:目标到基线的垂距与基线长度的比值 l 对最优交会角(最优交会点位置)有影响,当 l 大于临界值 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时,目标与传感器呈等腰三角形,即目标位于基线的中垂线上,否则存在两个关于基线中垂线对称的最优交会角(即最优交会点).

从图5~图7可知:当 $k_1=1, k_2=0$ 时,3D交叉定位的全局最优交会点位于平面 $z=0$ 上;并且,该点即为 $k_1=1$ 时2D交叉定位的全局最优交会点^[13],此时 l 为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

另取一组误差参数进行验证.令 $k_1=1, k_2=0.5$,稳定点及对应PA值的解算结果如图8所示.

经多组误差输入参数和全局极小值分析验证, $(\epsilon_1, \phi_1, \phi_2)$ 型3D交叉定位的全局最优交会点均位于基线所在的水平面,验证了3.2节中的论证结果.相关联的,文献[17]认为:当基站与用户处于相同高度时,VDOP达到最佳.

4.3 全局最优交会点与最优交会区的宏观分布

本文对一组参数的全局最优交会点进行直接解算和分析,令 $k_1=1, k_2=0$ 时,可以解得稳定点 $\mathbf{x}_0=(15\,000, 7\,500\sqrt{2}, 0)$;代入稳定点解得 $D_1=4.7502 \times 10^{-7}$, $D_2=2.7077 \times 10^{-12}$, $D_3=2.1437 \times 10^{-18}$;因此所得 \mathbf{x}_0 为极小值位置,是全局最优交会点,这进一步验证了前述的分析.

基于PA函数还可以得到最优交会区的等值曲面,从而更直观地揭示最优交会区的分布特性.在图5~图7中,可以得出PA($k_1=1, k_2=0$)的全域最优值 $PA \approx 481$,在这一点,等值面即收敛为一个点——最优交会点.本文给出了若干输入误差参数下、若干阈值的PA等值面,等值面内空间均为优于阈值的最优交会区,如图9~图11所示.

从最优交会区(图9~图11)的空间特性可以清晰地

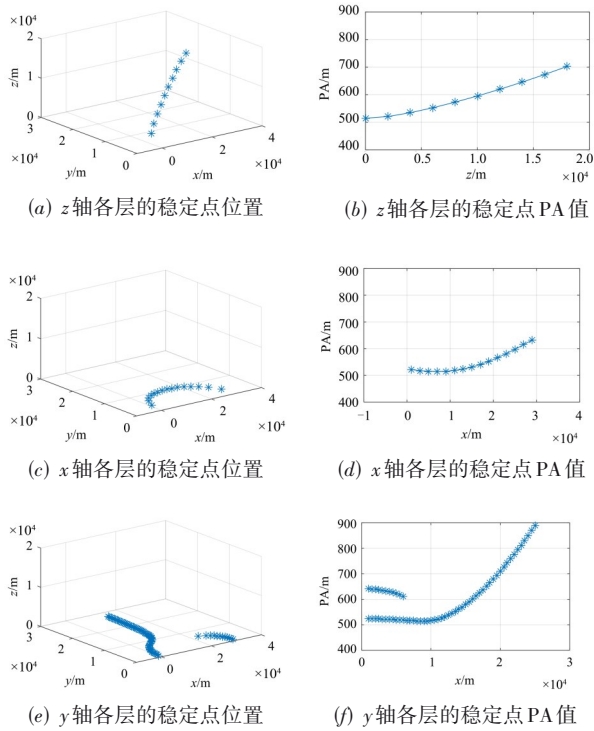


图8 分层稳定点及其PA值($k_1=1, k_2=0.5$)

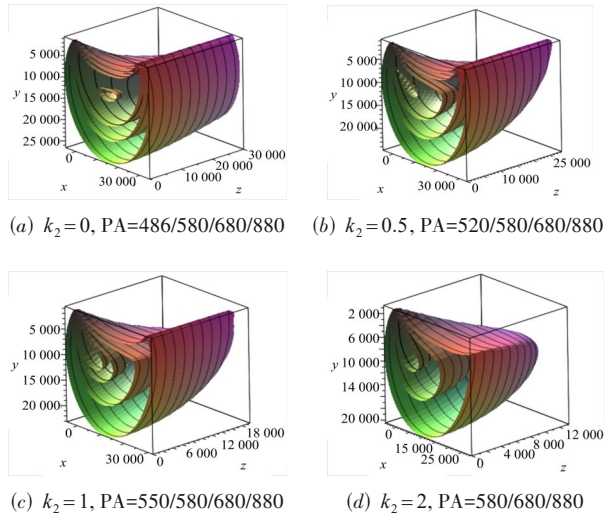


图9 最优交会区等值面($k_1=1$)

验证测角误差影响的规律、轴向分层最优交会点分布特性,以及全局最优交会点所在平面.

对于不同的测角误差方差比,最优交会区呈现为不同的空间区域函数.除了全局最优交会位置逐渐收敛于基线所在平面,目前还发现另外一种共性:在 $z=0$ 平面上的分层(按 x 轴向或 y 轴向)最优交会点似乎呈现为一种特殊的弧线,如图6(a)、图7(a)、图8(c)、图8(e),这一点从几何交会的角度可以解释.

需要补充说明的是:图6(a)、图8(c)中按 x 轴向分

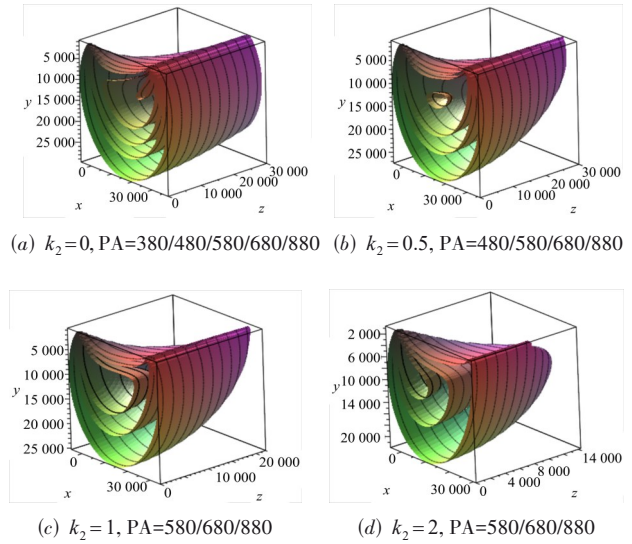


图10 最优交会区等值面($k_1=0.5$)

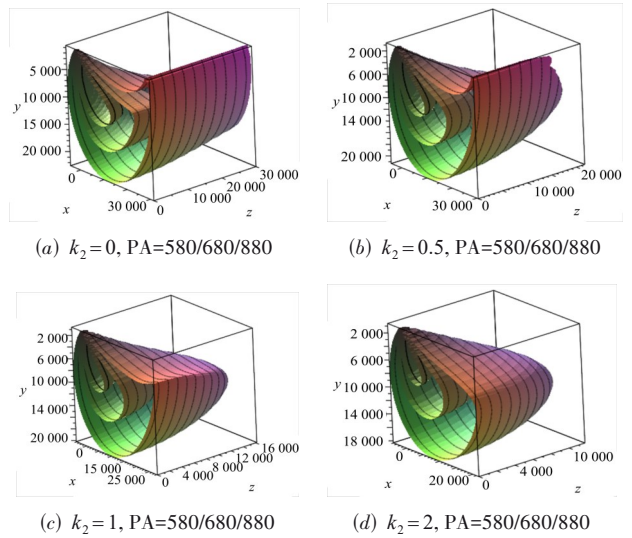


图11 最优交会区等值面($k_1=2$)

层时,所选的层错开了基线的中垂线,因此图中没有显示位于中垂线上的分层最优交会点.

4.4 几何交会分析

根据几何交会分析,当方向向量与竖直面垂直的时候,定位性能可能达到最佳,但由于测量误差的距离扩散效应,导致真实的最优交会位置会朝向基线塌陷.以 $k_1=1, k_2=0$ 时按 y 向分层最优交会点(均位于 $z=0$ 平面)的分布(对应图7(a))为例进行展示.如图12所示,正交线为以基线中点为圆心、基线长度为直径的 $z=0$ 平面上的圆.

根据前述阵列基线的定义,当两传感器的位置发生变化时,阵列(或阵元的连线,或各阵元位置构成的空间结构)在空间上发生伸缩、平移、旋转变换,阵列的

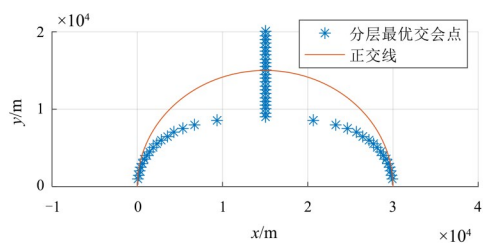


图 12 正交线与 y 向分层最优交会点

基线在水平面上发生伸缩、平移、旋转变换。此时,对于确定的 $\sigma_{\phi_2}^2, k_1, k_2$, 能够想见, 在对阵列基线相对位置固定不变的空间位置上, 由于该位置处的交会角与切向测量误差不变, 其定位性能也是固定不变的。由此可以得出结论: 阵列的伸缩、平移、旋转不会影响最优交会位置对于阵列基线的相对位置及相对分布特性。以往的研究多基于传感器部署于同一个坐标轴的情况。2D 等误差测向交叉定位的最优交会角研究中, 对于阵列方向为轴向的水平阵, 同样得出了最优交会点相对位置确定的结论, 即在 2D 测向交叉定位中, 当 $l = \sqrt{2}/4$ 时, 目标与两传感器成等腰三角形, 圆概率误差达到全局极小值^[13]。

本文算例中的阵列经伸缩、平移、旋转即可得到空间上的任意阵列, 依据上述几何交会分析还可知: 4.1 节、4.2 节和 4.3 节中, 测角误差对最优交会位置的影响规律、坐标轴方向分层最优交会点的相对分布特性, 以及全局最优交会位置的相对分布特性, 适用于任意阵型。

5 结论

综上所述, 对于 $(\epsilon_1, \phi_1, \phi_2)$ 这一类测向交叉定位系统, 可以得出如下结论:

(1) 全局最优交会点位于基线(或 2D 传感器)所在的水平面; 传感器位置的变化不会影响最优交会位置对于阵列基线的相对位置及相对分布特性。当基线与测角误差的方差比确定时, 全局最优交会点即可确定, 最优交会点处目标到阵列基线的垂距与基线长度的比值 l 也将确定。

(2) 最优交会位置由几何交会特性与测量误差的距离扩散效应共同决定: 几何交会特性决定了最优交会位置分布在以基线中点为圆心、基线长度为直径的水平面上的圆弧附近; 测量误差的距离扩散效应决定了最优交会位置会朝着基线方向塌陷。

通过算例分析, 还可得出以下结果和猜想:

(1) 定位性能受俯仰角测角误差影响的规律: 2D 传感器俯仰角测角误差的存在使得最优交会区(及最优交会点)趋近于 2D 传感器, 并且俯仰角误差越大, 这一效应越显著。

(2) 定位性能受方位角测角误差影响的规律: 最优

交会区(及最优交会点)趋近于方位角误差较大的传感器附近, 俯仰角测角误差与方位角测角误差对最优交会区(及最优交会点)的影响是互相叠加的。

(3) 分层最优交会点的分布特性: 随着 z 值的增加, z 轴分层最优交会点的位置偏向于 1D 传感器。

在 l 确定时, 纯方位角 2D 定位中的最优交会角的对应位置实质上是 3D 定位中俯仰角及其测角误差为零时 y 向分层最优交会点, 本文将 2D 定位最优交会位置的研究扩展到了 3D 定位, 得到了最优交会位置的分布特性及影响因素的影响规律, 明确了全局最优交会点的位置, 并由几何交会特性和距离扩散效应进一步阐释了测向交叉定位最优交会位置的分布特性。对测向交叉定位, 最优交会点可能不存在可行解, 提出的最优交会区在工程应用中更具有实际应用价值。通过最优交会位置与目标探测结果或预估位置的匹配, 可以有效提高系统定位性能。

参考文献

- [1] WANG Z P, CHANG Y H, ZHANG H, et al. Bearing-only distributed localization for multi-agent systems with complex coordinates[J]. Information Sciences, 2023, 626: 837-850.
- [2] XIAO D S, HU S C, KANG K, et al. An improved AoA estimation algorithm for BLE system in the presence of phase noise[J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2023, 69(3): 400-407.
- [3] ZHANG K H, ZHANG Z C, ZHU B C. Beacon LED coordinates estimator with selected AOA estimators for visible light positioning systems[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2024, 23(3): 1713-1727.
- [4] SAEED N, NAM H, AL-NAFFOURI T Y, et al. A state-of-the-art survey on multidimensional scaling-based localization techniques[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2019, 21(4): 3565-3583.
- [5] 杨静, 刘成城, 黄洁, 等. 联合时延-多普勒-角度的无源雷达目标定位凸优化算法[J]. 电子学报, 2024, 52(6): 2091-2102.
YANG J, LIU C C, HUANG J, et al. Convex solution for target localization in passive MIMO radar using delay, Doppler and angle measurements[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(6): 2091-2102. (in Chinese)
- [6] JIA T Y, LIU H W, HO K C, et al. Mitigating sensor motion effect for AOA and AOA-TOA localizations in underwater environments[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2023, 22(9): 6124-6139.
- [7] BISHOP A N, FIDAN B, ANDERSON B D O, et al. Optimality analysis of sensor-target localization geometries[J].

Automatica, 2010, 46(3): 479-492.

- [8] YU Z X, FU Y Q. A passive location method based on virtual time reversal of cross antenna sensor array and Tikhonov regularized TLS[J]. IEEE Sensors Journal, 2021, 21(19): 21931-21940.
- [9] LI T, CHEN B R, WANG Q, et al. Influence evaluation of sensor coordinate error on microseismic source location[J]. Frontiers in Earth Science, 2022, 10: 873986.
- [10] RAO R M, PADAKI A V, NG B L, et al. ToA-based localization of far-away targets: Equi-DOP surfaces, asymptotic bounds, and dimension adaptation[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2021, 70(10): 11089-11094.
- [11] FU Y Q, YU Z X. A low SNR and fast passive location algorithm based on virtual time reversal[J]. IEEE Access, 2021, 9: 29303-29311.
- [12] GAVISH M, FOGEL E. Effect of bias on bearing-only target location[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1990, 26(1): 22-26.
- [13] 白晶, 王国宏, 王娜, 等. 测向交叉定位系统中的最优交会角研究[J]. 航空学报, 2009, 30(2): 298-304.
BAI J, WANG G H, WANG N, et al. Study on optimum cut angles in bearing-only location systems[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2009, 30(2): 298-304. (in Chinese)
- [14] XIU J J, HE Y, WANG G H, et al. Constellation of multi-sensors in bearing-only location system[J]. IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, 2005, 152(3): 215.
- [15] 盛丹, 王国宏, 孙殿星. 存在系统误差下交叉定位系统最优交会角研究[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(7): 1516-1523.
SHENG D, WANG G H, SUN D X. Optimal cut angle in triangulation with system errors[J]. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38(7): 1516-1523. (in Chinese)
- [16] 王国宏, 苏伟, 白晶, 等. 不同量测误差情况下1D和2D被动传感器交叉定位系统最优交会角研究[J]. 电子学报, 2009, 37(6): 1295-1299.
WANG G H, SU W, BAI J, et al. Study on optimal cut angle in 1D and 2D passive sensor triangulation with different measure errors[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(6): 1295-1299. (in Chinese)
- [17] WANG Q, LI B H, RIZOS C. Dilution of precision in three dimensional angle-of-arrival positioning systems[J]. Journal of Electrical Engineering & Technology, 2019, 14(6): 2583-2593.
- [18] LI B H, ZHAO K, SHEN X S. Dilution of precision in positioning systems using both angle of arrival and time of arrival measurements[J]. IEEE Access, 2020, 8: 192506-192516.
- [19] ZHONG Y, WU X Y, HUANG S C. Geometric dilution of precision for bearing-only passive location in three-dimensional space[J]. Electronics Letters, 2015, 51(6): 518-519.
- [20] DOĞANÇAY K, HMAM H. Optimal angular sensor separation for AOA localization[J]. Signal Processing, 2008, 88(5): 1248-1260.
- [21] SUN Y M, HO K C, GAO L, et al. Three dimensional source localization using arrival angles from linear arrays: Analytical investigation and optimal solution[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2022, 70: 1864-1879.
- [22] XU S, DOĞANÇAY K. Optimal sensor placement for 3-D angle-of-arrival target localization[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 53(3): 1196-1211.
- [23] WANG W J, BAI P, ZHOU Y, et al. Optimal configuration analysis of AOA localization and optimal heading angles generation method for UAV swarms[J]. IEEE Access, 2019, 7: 70117-70129.
- [24] KANG X, WANG D J, SHAO Y, et al. An efficient hybrid multi-station TDOA and single-station AOA localization method[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2023, 22(8): 5657-5670.
- [25] LI Y Y, QI G Q, SHENG A D. General analytical formula of GDOP for TOA target localisation[J]. Electronics Letters, 2018, 54(6): 381-383.

作者简介



崔剑锋 男, 1986年4月生, 山西代县人. 现为中国船舶集团汾西重工有限责任公司高级工程师, 西北工业大学航海学院博士研究生. 主要研究方向为定位导航、目标探测.
E-mail: jf.cui@163.com



梁红 女, 1969年12月生, 江苏南通人. 现为西北工业大学航海学院教授、博士生导师. 主要研究方向为目标探测与识别、声成像及图像处理、智能感知与深度学习.
E-mail: lianghong@nwpu.edu.cn