

# 面向高可靠低时延通信的信道编码技术研究综述

蔡穗华<sup>1,2,3</sup>, 王义文<sup>1,2,3</sup>, 白宝明<sup>4</sup>, 马 啸<sup>1,2,3</sup>

(1. 中山大学计算机学院, 广东广州 510006; 2. 中山大学信息技术教育部重点实验室, 广东广州 510006; 3. 广东省信息安全技术重点实验室, 广东广州 510006; 4. 西安电子科技大学综合业务网理论及关键技术国家重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘要:** 高可靠低时延通信技术是目前无线通信领域的热点问题之一, 其关键在于高性能的中短码长信道编码技术的实现. 与以往长码设计不同的是, 在有限码长下, 编码速率受误码率性能制约, 因而需要针对性地进行编码构造、译码算法设计以及编码性能分析与优化. 目前已有面向中短码长的极化码、咬尾卷积码等编码技术的研究, 但主要都是面向特定码长码率的优化设计, 难以满足实际应用对灵活编码参数的要求. 基于此, 本文对中短码长编码技术进行全面归纳梳理与深度探讨分析, 首先综述了现有有限码长编码性能界的理论分析方法, 随后对近年来提出的编码技术进行了梳理, 并分析比较每种编码技术的优缺点, 最后详细探讨了针对低时延高可靠场景的新型编码技术, 并对未来研究方向与发展趋势进行探讨和展望.

**关键词:** 信道编码; 高可靠低时延通信; 列表译码; 有限码长容量; 极化码; 咬尾卷积码; 双向叠加编码传输

**基金项目:** 国家重点研发计划(No.2021YFA1000500); 国家自然科学基金(No.62201626)

**中图分类号:** TN911.22; TN919.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2025)02-0629-16

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20240137

## Channel Coding Techniques for Ultra-Reliable and Low-Latency Communication

CAI Sui-hua<sup>1,2,3</sup>, WANG Yi-wen<sup>1,2,3</sup>, BAI Bao-ming<sup>4</sup>, MA Xiao<sup>1,2,3</sup>

(1. School of Computer Science and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou, Guangdong 510006, China;

2. MoE Key Laboratory of Information Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou, Guangdong 510006, China;

3. Guangdong Key Laboratory of Information Security Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou, Guangdong 510006, China;

4. State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** One of the hottest topics in the field of wireless communication is ultra-reliable and low-latency communication (URLLC), where channel coding with short-and-medium length plays a critical role. Unlike the case for long codes, in the finite code length regime, the coding rate is constrained by the error performance, thus tailored coding construction, decoding algorithm design, and performance analysis and optimization are required. At present, there are studies on coding technologies such as polar codes and tail-biting convolutional codes for short-and-medium length codes, but they are mainly optimized designs for specific code lengths and rates, which are difficult to meet the requirements of flexible coding for practical applications. Based on this, this paper summarizes and discusses the state-of-the-art coding technology for short-and-medium length. Firstly, we review the theoretical bounds for the performance of finite-length codes. Then, we analyze the coding technologies proposed in recent years, and compare their advantages and disadvantages. Finally, we discuss in detail new coding technologies for URLLC, and we prospectively explore the future research directions and development trends of channel coding techniques for ultra-reliable and low-latency communication.

**Key words:** channel coding; ultra-reliable and low-latency communication (URLLC); list decoding; finite-length capacity; polar code; tail-biting convolutional code (TBCC); twisted-pair superposition transmission (TPST)

**Foundation Item(s):** National Key Research and Development Program of China (No.2021YFA1000500); National Natural Science Foundation of China (No.62201626)

## 1 引言

近年来,随着第五代移动通信系统(5G)的正式商用,世界正走向万物互联的时代. 作为5G三大应用场景之一,高可靠低时延通信(Ultra-Reliable and Low-Latency Communication, URLLC)既要保证数据传输的准确性和完整性,又要尽可能降低数据从发送端到接收端的传输时间,在工业、交通、能源等多个领域都有着重要的意义<sup>[1]</sup>. 例如,在智能制造中,低时延高可靠通信可以实现工厂内部的实时监控和控制,提高生产效率和质量,降低成本和风险;在自动驾驶中,低时延高可靠通信可以保证车辆之间和车辆与基础设施之间的信息交互,提高行车安全性和舒适度,减少交通拥堵和污染;在远程医疗中,低时延高可靠通信可以实现医生和患者之间的实时视频和数据传输,提高诊断和治疗的效果和效率,缓解医疗资源的不平衡. 同时,华为在其6G白皮书中提出URLLC+的概念<sup>[2]</sup>,IMT-2030研究组也在其愿景报告中提出未来超可靠低时延(Hyper-Reliable and Low-Latency Communication, HURLLC)的设想,作为下一代无线通信的重要通信场景之一<sup>[3]</sup>.

目前,5G URLLC场景不仅要求达到99.999 9%的极低错误率,还要求达到毫秒级的空口时延,对底层的信道编码技术提出了重大挑战. 这是因为一方面低延迟的要求限制了数据包的编译码处理复杂度,另一方面高可靠的要求则需要对设计的编译码算法进行极致的性能优化,因此探索具有极致性能的中短码长编码技术成为解决问题的关键.

对于长码,研究者们可以在香农信道编码定理指导下,基于“小结构、大随机”的思路,利用级联、耦合等技术设计出性能逼近香农限的编译码算法. 然而在码长有限时,经典香农信息理论及其容量分析不再适用. 因此,首先需要探讨有限码长的性能限,即在码长约束下,给定误码错误性能需求的编码传输的速率上限是多少. 信道编码的可靠性依赖于编码构造与译码实现,而性能上限则由码的结构决定. 因此,需要研究如何刻画并构造具有接近有限码长性能限的码本设计. 对于一般的编码,最优的最大似然(Maximum Likelihood, ML)译码往往难以实现,因此还需要探讨在有限资源下如何译码,以满足实际应用中低时延、低能耗、高吞吐等指标需求. 此外,编码构造和译码算法直接影响系统性能,而对编码的性能分析则间接影响系统性能的优化. 一方面,在理论上,需要利用编码的性能分析来讨论系统不同指标参数的折中关系,用以衡量系统的性能与指标的可实现性. 另一方面,在实践中,准确而有效的性能分析也能有利于编码方案的优化,提高系统的鲁棒性和灵活性.

目前,在面向高可靠低时延通信研究的驱动下相

关中短码长信道编码技术已取得初步的研究进展. 文献[4~8]等对极化(polar)码、低密度一致校验(Low-Density Parity-Check, LDPC)码、咬尾卷积码(Tail-Biting Convolutional Code, TBCC)等中短码的研究进展进行了综述. 然而,现有的编译码算法设计仍有很大的改进空间,在近几年也得到了快速的发展. 因此,为了及时跟进最新的研究进展,理清研究思路和发展脉络,预测未来研究方向,本文从有限码长的编码信息理论出发,梳理了现有编码技术在中短码长下的应用情况,并详细介绍了近年来提出的基于叠加编码技术改进的新型高可靠低时延编码技术和性能分析方法. 在综合分析这些方法后,对低时延高可靠编码技术编译码算法的研究进行汇总分析,对未来的研究方向进行展望.

## 2 有限码长信道编码性能限

香农的信道编码定理给出了码长充分长时的编码性能极限<sup>[9]</sup>:对于信道容量为 $C$ 的离散无记忆信道,如果信息传输速率 $R < C$ ,则存在一种编码方法,使得当码长充分长时,系统的错误概率可以达到任意小. 信道编码定理为长码的编译码算法设计提供了指导方向. 然而在实际应用中,码长总是有限的,因而译码错误不可避免,尤其是在码长较短时,渐近的香农限分析难以有效地分析实际编译码的性能. 因此,需要对有限码长的性能界进行研究,从而为有限码长编译码方案提供指导.

对于非渐近的性能分析,可以归结为信道下 $(N, M, \epsilon)$ 码的存在性问题,探讨这个参数三元组之间的约束关系. 其中, $N$ 为码长, $M$ 为码本大小, $\epsilon$ 为译码错误率. 在一般信道下,当给定码长和传输速率时,编码的平均译码错误率存在大于零的下限(即误码可达性能限),但这一下限并没有封闭公式. 为此,研究者们提出了各种性能界的分析方法,如 Feinstein<sup>[10]</sup>、Gallager<sup>[11]</sup>以及 Poltyrev<sup>[12]</sup>研究了码长有限时译码错误率随码长增大的变化规律,分别给出了随机编码界(Random Coding Bound, RCB)、错误指数等误码率的上界;香农等基于球填充模型,借助组合数学等工具给出了球填充界(Sphere Packing Bound, SPB)<sup>[13,14]</sup>的工具分析码长有限时的译码错误率下界.

2010年, Polyanskiy 等<sup>[15]</sup>对有限码长的性能限进行综述,并提出了在有限码长下有效估计误码可达性能限的分析方法,主要包括随机码并集限(Random Coding Union bound, RCU)、元逆向界(Meta Converse bound, MC)以及正态近似(Normal Approximation, NA)估计. 其中,RCU界与RCB界均考虑随机编码和并集限技术来估计误码可达性能限的上界,且RCU界具有更紧的性能估计,通过放缩可以推导出RCB界及错误指数. MC

界和 SPB 界则通过正确译码的必要性条件分析其逆定理约束,给出误码可达性能限的下界,且 MC 界从一般的假设检验模型出发,蕴含 SPB 界的球填充模型,因而具有更紧的性能估计.这两类上下界的估计需要采用数值近似等方式进行计算,不便于实际有限码长性能分析的应用.为此,文献[15]还提出了误码可达性能限

的 NA 估计,也被称为 PPV 界.该估计虽然不是严格意义上的性能界,但因其计算简单,在中短码长下性能估计在上下界之间,能够有效地刻画  $(N, M, \epsilon)$  三元组之间的约束关系,被广泛地应用于有限码长的系统性能分析中.文中几种有限码长性能限分析方法的比较如表 1 所示.

表 1 有限码长性能限分析方法的比较

| 名称          | 性能界类型     | 描述   |
|-------------|-----------|--|
| 随机编码界(RCB)  | 误码可达性能限上界 | 基于随机码的门限译码估计误码率可达性能限上界,可用于分析渐近的错误指数          |
| 随机码并集限(RCU) | 误码可达性能限上界 | 比 RCB 更紧的可达性能限上界,但在 AWGN 等连续型信道中需要用鞍点法进行数值近似 |
| 球填充界(SPB)   | 误码可达性能限下界 | 基于空间球填充模型估计误码率可达性能限下界,可用于分析渐近的错误指数           |
| 元逆向界(MC)    | 误码可达性能限下界 | 基于假设检验模型估计误码率可达性能限下界,比 SPB 更紧,但需要用鞍点法进行数值近似  |
| NA 估计(PPV)  | 误码可达性能限估计 | 基于中心极限定理对性能界进行高斯近似估计,数值计算较简单                 |

设信道输入和信道输出分别为随机变量  $X$  和  $Y$ , 输入  $X$  的分布为  $P_X(\cdot)$ , 信道转移概率为  $W_{YX}(\cdot|\cdot)$ , 由此可以得到联合分布  $P_{XY}(\cdot, \cdot)$  与输出  $Y$  的分布  $P_Y(\cdot)$ . RCU 界是在 Feinstein 等的译码性能上界的基础上利用并界限的原理推导的可达译码错误率的上界,参数的约束关系为

$$\epsilon \leq \mathbb{E} \left[ \min \left\{ 1, (M-1) \Pr \left[ u(\bar{X}; Y) \geq u(X; Y) | X, Y \right] \right\} \right] \quad (1)$$

其中,  $P(a, b, c) = P_X(a)W_{YX}(b|a)P_X(c)$ ,  $u(X; Y)$  是信息密度, 定义为

$$u(x; y) \triangleq \log_2 \frac{dP_{XY}}{d(P_X \times P_Y)}(x, y) \quad (2)$$

MC 界则是通过建立二元假设检验模型, 利用 Neyman-Pearson 引理推导得出, 计算的是可达译码错误率的下界, 参数的约束关系为

$$\frac{1}{M} \geq \inf_{P_X} \sup_{Q_Y} \beta_{1-\epsilon}(P_X \times W_{YX}, P_X \times Q_Y) \quad (3)$$

其中,  $\beta_{1-\epsilon}(\cdot, \cdot)$  表示假设检验问题第一类错误率不超过  $\epsilon$  时的最小的第二类错误率. 对于简单的信道如二元删除信道(Binary Erasure Channel, BEC)和二元对称信道(Binary Symmetric Channel, BSC), 上述两类可达译码错误率的界可以直接利用组合数学等方法进行计算. 而对于高斯加行白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道, 则可以采用鞍点估计法进行数值计算<sup>[16,17]</sup>. 若要进一步简化计算, 则可以利用 NA 方法进行估计, 即

$$\log M = NC - \sqrt{NV} Q^{-1}(\epsilon) + o(\log N) \quad (4)$$

其中,  $Q(\cdot)$  表示  $Q$  函数,  $C = \mathbb{E}[u(X; Y)]$  是信道容量,  $V = \mathbb{D}[u(X; Y)]$  是信道散度. 特别地, 对于 AWGN 信道有更紧致的估计:

$$\log M = NC - \sqrt{NV} Q^{-1}(\epsilon) + \frac{1}{2} \log N + o(1) \quad (5)$$

PPV 界采用大偏差理论对有限码长的可达容量进

行估计. 数值仿真表明, 当码长超过 100 bit 时, PPV 界能够较好地估计有限码长可达性能限. 图 1 给出了不同码长下, 二元相位键控(Binary Phase Shift Keying, BPSK)在 AWGN 信道下的有限码长 PPV 界. 从图 1 中可以看出, 在码长小于 1 000 时, PPV 界估计的性能离香农限有 1 dB 以上的差距, 这说明经典的分析方法难以直接迁移到有限码长, 尤其是中短码的情形.

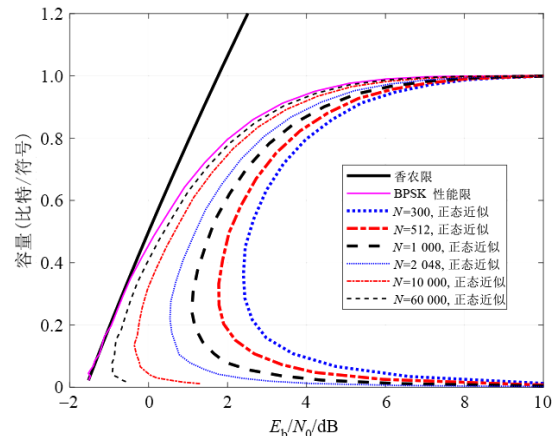


图 1 BPSK-AWGN 信道不同码长下的 PPV 界

### 3 现有编码技术在中短码长下的应用

#### 3.1 代数码

经典的代数码主要包括汉明码<sup>[18]</sup>、Reed-Muller(RM)码<sup>[19,20]</sup>、Reed-Solomon (RS) 码<sup>[21]</sup> 以及 Bose-Chandhuri-Hocquenghem(BCH)码<sup>[22,23]</sup>等. 其中, BCH 码具有很强的纠错能力, 特别是在码长较短时, 在 AWGN 信道下 ML 译码具有贴近 PPV 界的性能<sup>[7]</sup>. 但 BCH 码的缺点在于其编码参数不能任意选择, 为了保持良好的距离特性, 一般采用二元本原 BCH 码及其扩展版本, 对应的编码维数需要根据设计纠错性能计算得到.

在译码方面, BCH 码的优势在于其具有高效的限

定距离译码算法,如 Berlekamp-Massey (BM) 译码算法<sup>[24,25]</sup>等,能够根据接收的硬判决序列实现纠删纠错译码.但 BCH 码等代数码缺乏高效的软判决译码算法,因而在 AWGN 等信道中难以发挥其编码构造的优势,需要借助 Chase 译码<sup>[26]</sup>、顺序统计量译码(Ordered Statistics Decoding, OSD)<sup>[27]</sup>等译码算法来获得接近 ML 的译码性能.目前,国内外的研究者们试图通过不同的方法来设计其高性能的软判决译码算法<sup>[28-32]</sup>,但要获得接近 ML 译码性能,仍需要解决译码复杂度较大的问题.

值得一提的是,OSD 译码算法是根据接收信息的可靠性对接收序列进行翻转搜索的译码方法,是一类普适的译码算法,适用于所有的线性分组码,且在码长较短时,通过设计合适的搜索方法能够有效地实现 ML 译码<sup>[27]</sup>.其原理主要利用的是可靠比特位置发生错误往往相对较少,因此通过在最可靠比特位置基(Most Reliable Basis, MRB)中翻转少量比特并重新编码来生成候选码字.其步骤包含高斯消元及错误图样的列表搜索,因而其译码复杂度为  $O(k^3 + Lk(n-k))$ .目前最新的研究表明,OSD 译码作为一种基于码字猜测的译码算法,在面向一般码的译码时,其性能优于基于猜测噪声的译码算法<sup>[33]</sup>.文献[27]中证明了 OSD 译码对于任意具有最小汉明距离  $d_{\min}$  的线性分组码,  $t = \lfloor d_{\min}/4 - 1 \rfloor$  阶的 OSD 能够逼近最大似然译码的性能.然而其译码复杂度随阶数  $t$  指数增长,因而研究者们提出改进的搜索算法,如通过设置跳过准则来舍弃部分测试图样<sup>[34-37]</sup>、利用次可靠位置匹配的箱匹配算法(Box-and-Match Algorithm, BMA)<sup>[38]</sup>以及设计提前终止条件的概率 OSD (Probability-Based OSD, PB-OSD) 算法<sup>[39]</sup>等来降低译码复杂度.

### 3.2 LDPC 码

LDPC 码最早由 Gallager 在 1962 年提出<sup>[40]</sup>,并由 Spielman 和 MacKay 等人重新发现<sup>[41,42]</sup>.LDPC 码的优势在于其编码参数可灵活设计,并具有高效的 BP 迭代译码算法,且当码长较长时具有能够逼近信道容量的性能<sup>[43]</sup>.目前在 5G 新空口(New Radio, NR)的标准中,采用 raptor-like 构造的 LDPC 码,在中短码长时利用 BG 2 基矩阵构造出不同码长码率的编码方案<sup>[44]</sup>.研究者们通过分析影响 LDPC 码迭代译码的不同因素,包括编码最小距离、Tanner 图的围长及环长分布、停止集、陷阱集、节点度分布等,来优化设计 LDPC 码的编码构造,提出了渐进边增长(Progressive Edge-Growth, PEG)算法<sup>[45]</sup>以及分别基于有限几何、有限域的结构化 LDPC 构造方法等<sup>[46,47]</sup>.另外,在中短码长情况下,多元 LDPC 码具有较好的性能,且能够直接匹配高阶调制技术,因而受到编码学者的广泛关注<sup>[45-50]</sup>.

在译码方面,为了进一步提高性能,研究者们不但

在现有的置信传播(Belief Propagation, BP)迭代译码、比特翻转(Bit Flipping, BF)译码等算法基础上进行改进<sup>[51-53]</sup>,还从不同角度提出新的译码算法,包括基于线性规划(Linear Programming, LP)<sup>[54-56]</sup>和基于 AI 的译码算法<sup>[57-60]</sup>等.然而,在码长较短时,目前构造的 LDPC 码与 PPV 界相比仍具有显著的性能差距.

### 3.3 咬尾卷积码

卷积码(Convolutional Code, CC)由 Elias 在 1955 年首次提出<sup>[61]</sup>,其优点在于可以用网格图(trellis)进行刻画,因而可以基于图上的维特比算法实现卷积码的 ML 译码,其复杂度与每层网格的状态数有关<sup>[62]</sup>.咬尾卷积码(TBCC)是末状态与初状态保持一致的卷积码字,能够避免卷积码结尾的码率损失.研究者们发现,可以通过增大记忆长度来构造出具有接近 PPV 界性能的 TBCC<sup>[63]</sup>,但其维特比算法所需的复杂度随之呈指数级增长.因此,研究者们进一步探索,发现采用级联循环冗余校验(Cyclic Redundancy Check, CRC)的方式在限制记忆长度的条件下同样能够有效改善 TBCC 的性能.文献[64]提出了两种基于距离谱的 CRC 级联卷积码的构造方法,文献[65]提出了 CRC 多项式的优化设计方法,能够有效改进级联编码码本的距离特性,从而使其 ML 译码取得接近 PPV 界的误码性能.然而, CRC 校验会带来码率损失,因而需要对级联码进行打孔(puncture)等操作来调节码率,这又为整体编码构造的优化带来了新的难题.

在译码方面,由于咬尾卷积码的初始和结束状态不固定,对其状态及其初始度量值的判断和预估则会增大译码算法的复杂度<sup>[66,67]</sup>.为了降低复杂度,文献[68]提出了基于迭代的环绕维特比算法(Wrap-Around Viterbi Algorithm, WAVA)和双向维特比算法(Bidirectional Viterbi Algorithm, BVA),利用迭代的方法估计系统的初始状态,通过牺牲一定的性能来换取复杂度的降低.此外,研究者们借助启发式的 A\* 算法等搜索方式来探索更高效的译码算法<sup>[69-71]</sup>.而对于 CRC 级联卷积码,直接应用维特比译码输出的 TBCC 码字未必能满足 CRC 校验,因而需要采用列表译码算法,如采用串行列表维特比译码(Sequential List Viterbi Decoding, SLVD)<sup>[72]</sup>,能够在译出满足 CRC 约束的码字时及时停止,从而有效控制译码的平均列表大小.对于记忆长度为  $m$ 、CRC 位数为  $v$ 、列表译码的错误率为  $\varepsilon$  的 TBCC,其平均列表大小可以估计为<sup>[73]</sup>

$$\mathbb{E}[L] \approx 1 - \varepsilon + 2^{v+m} \varepsilon \quad (6)$$

### 3.4 极化码

极化码<sup>[74]</sup>由土耳其学者 Arikan 于 2009 年提出,这是首类具有明确构造方法且可以被理论证明在任意二进制输入离散无记忆信道(Binary-Input Discrete Mem-

oryless Channels, BI-DMC)上容量可达的信道编码. 该证明基于次优的逐次抵消(Successive Cancellation, SC)译码算法,具有准线性的译码复杂度. 极化码的编码构造依赖于信道,通常根据极化子信道的可靠性排序,使用可靠性高的信道传输信息比特和可靠性低的信道传输固定比特. 对于 BEC、BSC 等简单信道,可以直接计算各极化子信道的容量,而对于 AWGN 等一般信道,则可以采用巴氏参数(Bhattacharyya parameters)、高斯近似估计(Gaussian approximation)以及蒙特卡罗(Monte-Carlo)仿真等方法计算极化子信道的可靠性度量,从而进行编码构造<sup>[74,75]</sup>. 然而,由于存在着极化不充分的问题,在码长较短时极化码性能较差. 为了改善码本构造,研究者们提出了级联信息预处理的编码方案,如将 CRC 与极化码级联的 CRC 辅助极化(CRC-Aided polar, CA-Polar)码<sup>[76,77]</sup>以及将卷积码与极化码级联的卷积极化(Polarization-Adjusted Convolutional, PAC)码<sup>[78]</sup>等. 另外,在编码参数设置上,极化码的维数可以根据需要灵活调节,但其码长则限定为 2 的幂次. 为此,研究者们提出了采取打孔和缩短(shortening)的方式构造出不同码长的极化码<sup>[79-81]</sup>.

在极化码的译码算法方面,除了最初所提出的 SC 译码算法外,研究者们还提出了逼近 ML 译码性能的球译码算法<sup>[82]</sup>、基于 SC 译码改进的逐次抵消列表(Successive Cancellation List, SCL)译码算法<sup>[83]</sup>和栈译码(stack decoding)<sup>[84]</sup>、基于迭代的具有高并行特点的 BP 译码算法<sup>[85]</sup>和列表 BP(BP List, BPL)译码<sup>[86]</sup>以及串并行折中的软抵消(Soft Cancellation, SCAN)译码算法<sup>[87]</sup>. 而在 CA-Polar 码和 PAC 码的译码中,SCL 译码算法表现出优异的性能,且仅有线性对数复杂度  $O(Ln \log n)$ ,能够取得接近 PPV 界的性能<sup>[4,88]</sup>,但受限于 SCL 译码的串行处理特性,其面向低时延的译码算法设计仍有改进的空间.

## 4 新型高可靠低时延编码技术

当前高可靠低时延信道的编码面临的核心问题在于一方面要求编译码算法性能优异,能在较低的复杂度下取得接近有限码长性能限的性能,另一方面要求编译码算法设计可灵活调节优化,适应应用场景的实际需求. 为此,研究者们提出了新型的高可靠低时延编译码算法,通过叠加编码等方式在经典编码技术上进行改进,不仅能够有效地预测其编译码性能,还能在不同码长码率下取得逼近有限码长性能界的优异性能,也可以通过设置参数改变译码器的复杂度,实现译码性能与复杂度的折中.

### 4.1 适用于具体编码构造的译码性能上下界

编码构造的优化对中短码长编码尤为重要. 为了

达到接近 PPV 界的性能,首要的要求就是编码具有优异的 ML 译码性能. 然而,ML 译码往往难以实现,而近似 ML 的译码算法也难以直接论证. 因此,不同于前述 PPV 界讨论面向所有码的译码可达性能限分析,本节介绍针对给定编码构造下的译码性能估计. 借助上下界等分析工具对给定编译码算法的译码性能,尤其是 ML 译码性能进行分析评估,以便于优化设计编译码算法.

#### 4.1.1 基于仿真的 ML 译码性能界

对于具体的编译码算法,可以通过蒙特卡罗方法仿真其误码率:

$$\text{FER}_\psi = \Pr\{\psi(\mathbf{y}) \neq \mathbf{c}\} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{c}$  为发送码字,  $\mathbf{y}$  为接收序列,  $\psi$  为仿真实现的译码算法. 对于 FER,当发送消息服从均匀分布时,ML 译码达到最优的译码性能:

$$\text{FER}_{\text{ML}} = \Pr\left\{\bigcup_{\hat{\mathbf{c}} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{c}\}} W(\mathbf{y}|\hat{\mathbf{c}}) \geq W(\mathbf{y}|\mathbf{c})\right\} = \min_{\psi} \text{FER}_\psi \quad (8)$$

显然,  $\text{FER}_\psi$  可以作为 ML 译码性能的上界. 另一方面,在仿真  $\text{FER}_\psi$  的同时,还可以统计译码结果比发送码字更似然的概率,即

$$\underline{\text{FER}}_\psi = \Pr\{\psi(\mathbf{y}) \neq \mathbf{c}, W(\mathbf{y}|\psi(\mathbf{y})) \geq W(\mathbf{y}|\mathbf{c})\} \quad (9)$$

作为 ML 译码性能的下界. 特别地,对于列表译码,可以统计译码列表中存在比发送码字更似然的候选码字的概率,作为 ML 译码性能的下界.

综上,利用仿真即可得到 ML 译码性能的估计:

$$\underline{\text{FER}}_\psi \leq \text{FER}_{\text{ML}} \leq \text{FER}_\psi \quad (10)$$

上述界的一个重要用途是,我们可以通过比较上下界性能是否贴近,来论证译码算法  $\psi$  是否具有近似 ML 的性能.

#### 4.1.2 基于重量谱的性能界

对于线性分组码,成对码字的汉明距离分布可以由编码的重量枚举函数(Weight Enumerating Function, WEF)(又称为重量谱)来刻画. 最简单的方法是直接利用成对错误概率的并集限(union bound):

$$\Pr\left\{\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right\} \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \Pr\{A_i\} \quad (11)$$

来推导 ML 译码性能的上界,但这在低信噪比区域是发散的. 目前基于重量谱的性能界估计方法主要从 Gallager 提出的第一上界技术(Gallager's First Bounding Technique, GFBT)<sup>[40,89]</sup>派生而来. GFBT 的基本思想是在接收序列空间中定义了一个 Gallager 区域  $R$ ,从而对译码情况进行划分来估计更紧的上界:

$$\Pr\{E\} \leq \Pr\{E, \mathbf{y} \in R\} + \Pr\{\mathbf{y} \notin R\} \quad (12)$$

即当接收序列处于区域  $R$  内时,采用并集限等方法进行

上界估计;当接收序列处于区域 $R$ 外时,则直接判为译码错误.设计不同几何形状的Gallager区域,并通过数值积分的方法可以得到不同的GFBT上界,例如切面界(Tangential Bound, TB)<sup>[90]</sup>、球形界(Sphere Bound, SB)<sup>[91]</sup>、切面球形界(Tangential-Sphere Bound, TSB)<sup>[92]</sup>等.然而,码本的完整重量谱往往难以获得,且数值积分受限于设计区域的几何形状和积分的计算复杂度.为此,可以利用汉明距离来优化设计Gallager区域,得到基于截断重量谱的上界<sup>[93]</sup>以及基于三角形谱和四面体谱的上界<sup>[94]</sup>,通过减少参与计算的码字来降低计算复杂度.

对于ML译码性能下界的推导,主要基于并集概率的De Caen下界<sup>[95]</sup>:

$$\Pr\left\{\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right\} \geq \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \Pr\{A_i\}^2}{\sum_{j \in \mathcal{I}} \Pr\{A_i \cap A_j\}} \quad (13)$$

进行推广和应用<sup>[96,97]</sup>,以及从并集限出发推广的二阶Bonferroni不等式<sup>[98]</sup>:

$$\Pr\left\{\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right\} \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \Pr\{A_i\} - \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{I} \\ i \neq j}} \Pr\{A_i \cap A_j\} \quad (14)$$

对错误概率进行估计<sup>[99]</sup>.上述下界的计算方法不需要获得完整的重量谱,但当参与计算的码字个数较少时,得到的性能界可能较松.

#### 4.1.3 精灵辅助下界

精灵辅助(Genie-Aided, GA)界是多模块系统的常用性能分析方法,被广泛应用在信息编码领域的分析,如干扰信道的容量限、错误传播性能等<sup>[100-102]</sup>中.在分析译码性能时,其基本思想是假设存在一个“精灵”告知译码器部分的正确发送信息,译码器在已知这部分信息的条件下采用最优的译码算法进行译码.显然,该精灵辅助译码器的性能不会差于实际译码算法的性能,因而是实际性能的一个下界.

例如,对于BPSK-AWGN信道和给定生成矩阵 $\mathbf{G}$ 的线性分组码,分别对每个信息位比特的译码应用精灵辅助下界,从而得到BER的性能下界<sup>[103]</sup>:

$$\text{BER}_{\text{MAP}} \geq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} Q\left(\sqrt{\frac{w_i}{\sigma^2}}\right) \quad (15)$$

其中, $w_i$ 是生成矩阵 $\mathbf{G}$ 的第 $i$ 行行重, $\sigma^2$ 是高斯噪声方差.

## 4.2 面向分组结构设计的双向叠加编码技术

对于中短码编码而言,往往需要采用CRC来改善编码的性能,但这会降低编码的速率,提高编码设计的难度.为此,文献[104]提出了采用利用叠加编码的方式来取代CRC校验,提出了双向叠加(Twisted-Pair Superposition Transmission, TPST)编码,其设计思路是将信息分成两层,上层对下层进行叠加编码.这样就可以

充分利用下层的接入信息对上层进行识别,即借助上层的列表译码算法,减少候选码字的个数,然后将候选码字的选择作为额外信息叠加到下层的编码中.

### 4.2.1 双向叠加编码的编码构造

双向叠加码的编码框架如图2所示.令 $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}) \in \mathbb{F}_2^k$ 表示输入的信息序列,其中 $\mathbf{u}^{(0)} \in \mathbb{F}_2^{k_0}$ ,  $\mathbf{u}^{(1)} \in \mathbb{F}_2^{k_1}$ . $\mathbf{R}$ 表示一个 $n \times n$ 的二元随机矩阵, $\mathbf{S} = \text{diag}\{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ 表示一个二元对角矩阵作为选择矩阵. $\mathbf{u}^{(0)}$ 和 $\mathbf{u}^{(1)}$ 首先分别通过两个基本码进行编码器得到基本码码字 $\mathbf{v}^{(0)}$ 和 $\mathbf{v}^{(1)}$ .在前向叠加中, $\mathbf{v}^{(0)}$ 通过随机矩阵 $\mathbf{R}$ 进行变换后叠加到 $\mathbf{v}^{(1)}$ 上,从而得到下层码字 $\mathbf{c}^{(0)}$ .在后向叠加过程中,下层码字 $\mathbf{c}^{(0)}$ 部分叠加到 $\mathbf{v}^{(0)}$ 上,从而得到上层码字 $\mathbf{c}^{(1)}$ .最后将 $\mathbf{c}^{(0)}$ 和 $\mathbf{c}^{(1)}$ 组合输出作为码字.

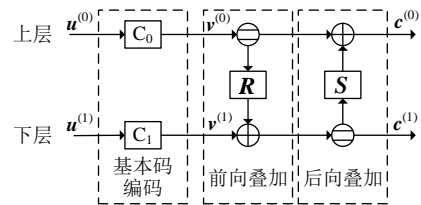


图2 TPST码编码框架

在上述TPST编码的基础上,文献[105,106]提出了以极化码作为基本码的双耦合极化码(Dual-Coupled polar, DC-polar)编码方案,其编码框图如图3所示.与TPST码相同,DC-polar码能够在改善极化码的码本构造的同时,避免级联CRC带来的码率损失,而不同点在于,DC-polar码采用了极化码的耦合替代前向叠加,从而避免随机交织器的使用,便于实现和分析.此外,作为基本码的极化码具有码率可变的特点,也便于调节上下层的码率以优化整个编码的性能.

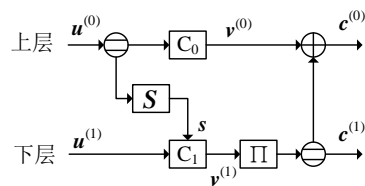


图3 DC-polar码编码框架

### 4.2.2 双向叠加编码的译码算法

TPST编码可以采用SCL译码算法进行译码.给定一个接收序列 $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)})$ ,最优的译码性能是采用最大似然译码算法,而次优算法则是采用逐次抵消算法.根据后向叠加,有约束关系:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{c}^{(0)} + \mathbf{c}^{(1)} \mathbf{S} \quad (16)$$

因此,能够通过 $\mathbf{y}$ 计算出 $\mathbf{v}^{(0)}$ 的对数似然比(Log-Likelihood Ratios, LLR)

$$A(\mathbf{v}_j^{(0)}) = \begin{cases} \log \frac{P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|0)}{P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|1)}, & s_j = 0 \\ \log \frac{P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|0)P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|1) + P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|1)P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|0)}{P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|0)P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|1) + P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|1)P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|0)}, & s_j = 1 \end{cases} \quad (17)$$

将  $A(\mathbf{v}^{(0)})$  输入到上层基本码的列表译码器中, 得到一系列的候选码字  $\hat{\mathbf{v}}_\ell^{(0)} (\ell = 1, 2, \dots, \ell_{\max})$ . 根据前向叠加, 有约束关系:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{c}^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)}\mathbf{R} \quad (18)$$

当  $\mathbf{v}^{(0)}$  被译出后,  $\mathbf{v}^{(0)}$  的 LLR 可以计算为

$$A(\mathbf{v}_j^{(0)}) = \log \frac{P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|w_j^{(0)})}{P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|w_j^{(0)} + 1)} + s_j \log \frac{P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|w_j^{(0)} + \mathbf{v}_j^{(0)})}{P_{\gamma_C}(y_j^{(0)}|w_j^{(0)} + \mathbf{v}_j^{(0)} + 1)} \quad (19)$$

其中,  $w_j^{(0)}$  表示  $\mathbf{v}^{(0)}\mathbf{R}$  的第  $j$  个分量. 对于接收端而言,  $\mathbf{v}^{(0)}$  是未知的, 认定每个候选码字  $\hat{\mathbf{v}}_\ell^{(0)}$  为正确时, 可以计算出  $A_\ell(\mathbf{v}^{(0)})$ . 将  $A_\ell(\mathbf{v}^{(0)})$  作为第二层译码器的输入, 从而估计  $\hat{\mathbf{v}}_\ell^{(0)}$ . 对于每对候选码字对  $\hat{\mathbf{v}}_\ell = (\hat{\mathbf{v}}_\ell^{(0)}, \hat{\mathbf{v}}_\ell^{(0)})$ , 译码器计算对应的 TPST 码字的似然值  $P_{\gamma_C}(\mathbf{y}|\mathbf{c}_\ell)$  并选择似然值最大的作为译码输出.

#### 4.2.3 双向叠加编码的性能分析

在性能分析方面, 双向叠加编码的性能可以通过其 GA 界进行有效的估计. 对 TPST 码的译码错误情况进行分解, 得到:

$$\text{FER}_{\text{SCL}} = \Pr\{E_0 \cup E_1 \cup E_2\} \quad (20)$$

其中,  $E_0$  表示上层基本码的正确码字  $\mathbf{v}^{(0)}$  不在候选列表中所对应的事件;  $E_1$  表示在已知上层基本码码字  $\mathbf{v}^{(0)}$  的条件下, 下层基本码译码器发生错误所对应的事件;  $E_2$  表示 SCL 译码器译出一个比正确码字更似然的码字所对应的事件. 下面以 BPSK-AWGN 信道为例, 给出以下 FER 的性能估计.

(1) 上层精灵辅助下界  $\Pr\{E_0\}$ . 上层的 GA 界可以通过仿真上层基本码的列表译码在比特干扰 AWGN 信道下的 FER 性能得到.

(2) 下层精灵辅助下界  $\Pr\{E_1\}$ . 下层的 GA 界可以通过仿真下层基本码在重复 AWGN 信道下的 FER 性能得到.

(3) ML 下界  $\Pr\{E_2\}$ . 基于仿真的 ML 译码, 对应式 (10) 中的  $\text{FER}_{\text{SCL}}$ .

其中, 前两类精灵辅助下界的仿真与随机变换  $\mathbf{R}$  的选取无关, 因此可以单独进行仿真, 并且有

$$\text{FER}_{\text{SCL}} \geq \max(\Pr\{E_0\}, \Pr\{E_1\}) \quad (21)$$

可以作为整个 TPST 码的精灵辅助下界. 由式 (20) 可知, 可以利用并集限的方法得到 SCL 译码的性能上界, 因而有

$$\begin{aligned} \text{FER}_{\text{SCL}} - \text{FER}_{\text{ML}} &\leq \text{FER}_{\text{SCL}} - \Pr\{E_2\} \\ &\leq \Pr\{E_0\} + \Pr\{E_1\} \end{aligned} \quad (22)$$

从上式可以看出, 当  $\Pr\{E_0\} + \Pr\{E_1\}$  足够小时, 说明其 SCL 译码具有逼近 ML 译码的性能.

在性能优化时, 可以通过部分叠加和速率分配的方式, 利用上下层的精灵辅助下界仿真, 优化 TPST 码的整体精灵辅助下界, 从而构造出性能优异的 TPST 码<sup>[104]</sup>. 以 TBCC 为基本码为例, 不同参数下优化的 TPST 码的 FER 性能如图 4、图 5 所示, 可以看出, 所优化构造的 TPST 码能在不同速率下达到近似 RCU 界的性能.

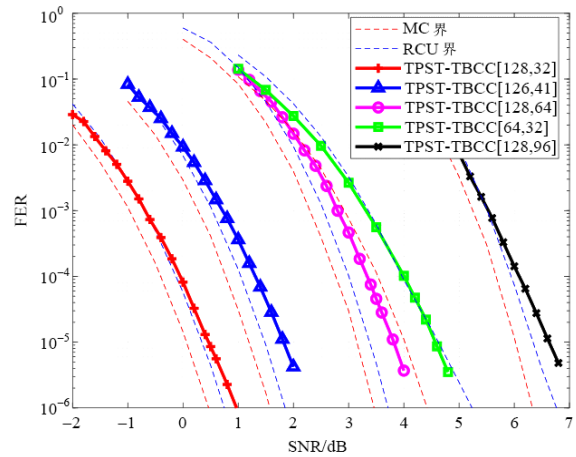


图 4 TPST-TBCC 在不同基本码下的译码性能

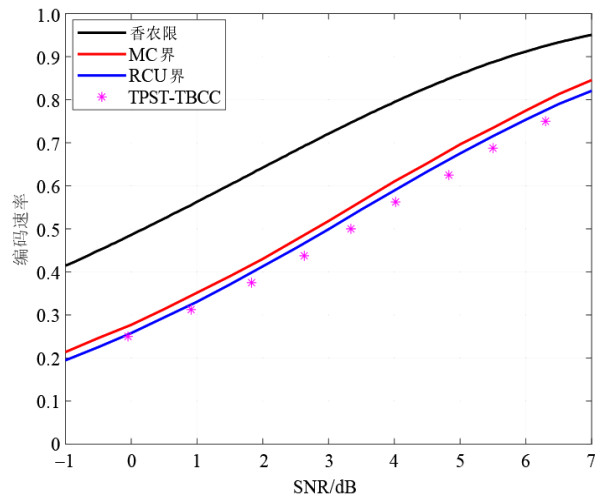


图 5 码长为 128 不同速率的 TPST-TBCC 码在 FER 为  $10^{-4}$  时的性能



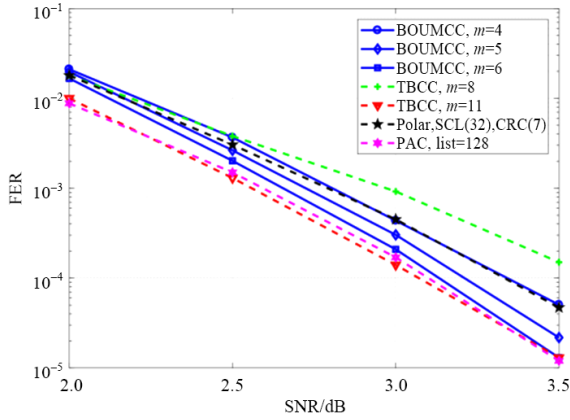


图7 BOUMCC与短分组码的性能对比

度排序,选取 $k$ 位最高可靠度的比特作为最可靠基,以汉明重量递增的方式对最可靠基的错误图样进行遍历,然后用最可靠基硬判决序列加上错误图样作为测试序列并对其进行重编码得到候选码字,最后从候选码字中选取最优的作为输出码字.作为原始算法的推广,LC-OSD译码算法考虑选取更多的高可靠位置用作候选码字的生成.此时,由于高可靠位置之间不再线性独立,需要利用高可靠位置之间的约束关系进行错误图样的搜索.

#### 4.4.1 局部约束顺序统计译码算法

对于一个码长为 $n$ 、维数为 $k$ 的二进制线性分组码 $C[n, k]$ ,用 $\mathbf{G}$ 表示其编码生成矩阵, $\mathbf{H}$ 表示其校验矩阵.发送信息序列 $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^k$ ,对应码字序列 $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n$ ,即满足编码约束关系 $\mathbf{u}\mathbf{G}=\mathbf{c}$ .将编码码字序列经过二元无记忆信道发送到接收端.接收端接收到的序列记为 $\mathbf{y}$ ,并计算其对应的LLR序列 $\mathbf{r}$ 及判决序列 $\mathbf{z}$ ,即

$$r_i = \log \frac{P_{\text{NC}}(y_i|0)}{P_{\text{NC}}(y_i|1)} \quad (27)$$

$$z_i = \begin{cases} 0, & r_i \geq 0 \\ 1, & r_i < 0 \end{cases} \quad (28)$$

从校验矩阵的角度来看,与原始OSD一样,接收端根据LLR的绝对值 $|r_i|$ 作为每个比特的可靠度量,对 $\mathbf{y}, \mathbf{r}, \mathbf{z}, \mathbf{H}$ 按照比特可靠度从低到高的顺序进行置换,从而得到 $\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{H}}$ .为了选取 $k+\delta$ 位能生成码字空间的高可靠比特位置,译码器需要选取 $\tilde{\mathbf{H}}$ 的前 $n-k-\delta$ 列线性无关的位置,有时候需要进行第二次的置换,第二次置换需要确保前 $n-k-\delta$ 列可靠度尽可能小.为了表示简便,此处仍用 $\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{H}}$ 表示第二次置换后的序列和矩阵.置换后的校验矩阵进行高斯消元化为以下形式:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-k-\delta} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

其中, $\mathbf{I}_{n-k-\delta}$ 表示大小为 $n-k-\delta$ 的单位阵.对于一个序列,用下标L和R分别表示前 $n-k-\delta$ 位的低可靠位置

和后 $k+\delta$ 位的高可靠位置,如 $\tilde{\mathbf{z}}=(\tilde{\mathbf{z}}_L, \tilde{\mathbf{z}}_R)$ .为便于分析和理解,可以采用错误图样的角度进行描述.令错误图样 $\tilde{\mathbf{e}} \triangleq \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{c}}$ ,其满足:

$$\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{e}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-k-\delta} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_L^T \\ \tilde{\mathbf{e}}_R^T \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{z}}^T \triangleq \tilde{\mathbf{s}}^T \quad (30)$$

其中, $\tilde{\mathbf{s}}$ 为由硬判决序列 $\tilde{\mathbf{z}}$ 计算得到的伴随式.满足高可靠位置部分约束 $\tilde{\mathbf{e}}_R \mathbf{P}_2^T = \tilde{\mathbf{s}}_R$ 的错误图样被称为合法错误图样.此时, $\mathbf{P}$ 子矩阵的约束可以用一个网格图进行刻画,因此可以使用串行维特比算法逐次生成合法错误图样高可靠部分 $\tilde{\mathbf{e}}_R$ 的候选列表,进而可以计算出对应的合法错误图样低可靠部分 $\tilde{\mathbf{e}}_L = \tilde{\mathbf{s}}_L + \tilde{\mathbf{e}}_R \mathbf{P}_1^T$ .记 $\tilde{\mathbf{e}}_R^{(\ell)}$ 为串行维特比生成的第 $\ell$ 个错误图样高可靠部分,对应测试序列高可靠部分为 $\tilde{\mathbf{c}}_R^{(\ell)} = \tilde{\mathbf{e}}_R^{(\ell)} + \tilde{\mathbf{z}}_R$ ,则对应的候选码字可以计算为 $\tilde{\mathbf{c}}^{(\ell)} = (\tilde{\mathbf{c}}_R^{(\ell)} \mathbf{P}_1^T, \tilde{\mathbf{c}}_R^{(\ell)})$ .依次生成候选码字,直到达到限定的列表大小 $\ell_{\max}$ .最后,从候选列表中根据最大似然准则选出最优的候选码字并进行逆置换后得到 $\hat{\mathbf{c}}$ ,作为译码结果进行输出.

#### 4.4.2 局部约束顺序统计译码的性能分析

在列表译码中,复杂度主要来自测试序列的生成和重编码.而现有算法为了逼近ML译码性能,往往需要较大的候选列表,因而整体译码复杂度主要取决于候选测试序列的列表大小.为了实现提前终止,可以利用错误图样软重量来度量候选码字的优劣,从而在尽量不损失性能的前提下,有效地降低译码列表大小.其中,错误图样的软重量可以计算为

$$\Gamma(\tilde{\mathbf{e}}) = \sum_i \tilde{e}_i \cdot |r_i| \quad (31)$$

此时,最大似然译码则等价于搜索软重量最小的合法错误图样. $\tilde{\mathbf{e}}_R^{(\ell)}$ 的软重量满足递增关系 $\Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_R^{(0)}) \leq \Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_R^{(1)}) \leq \dots \leq \Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_R^{(\ell)})$ .在译码过程中,当译出第 $\ell$ 个错误图样时,记当前软重量最小的合法错误图样为 $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{opt}}^{(\ell)}$ ,则其软重量满足递减关系 $\Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{opt}}^{(0)}) \geq \Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{opt}}^{(1)}) \geq \dots \geq \Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{opt}}^{(\ell)})$ .因此可以证明,当 $\Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{opt}}^{(\ell)}) \leq \Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_R^{(\ell)})$ 时,软重量最小的合法错误图样已在候选列表中,因而不需要再做后续搜索.基于软重量的统计估计,其提前终止条件计算为

$$\Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{opt}}^{(\ell)}) \leq \tau + \Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_R^{(\ell)}) \quad (32)$$

其中,参数 $\tau$ 可以计算为

$$\tau = n \int_0^\alpha \frac{r}{1 + \exp(r)} \Pr\{|\tilde{r}_i| = r\} dr \quad (33)$$

式中, $\alpha$ 为 $|\tilde{r}_i|$ 统计分布的第 $n-k-\delta$ 个 $n$ 等分点,即

$$\Pr\{|\tilde{r}_i| \leq \alpha\} = \frac{n-k-\delta}{n} \quad (34)$$

LC-OSD译码算法应用在短码长编码中,能在较低复杂度下取得逼近ML译码的性能,如图8、图9所示.且随着信噪比升高,提前终止准则可以有效降低译码复杂度.与原始OSD译码相比,在性能相当的情况下,

译码复杂度降低约 3 个数量级。

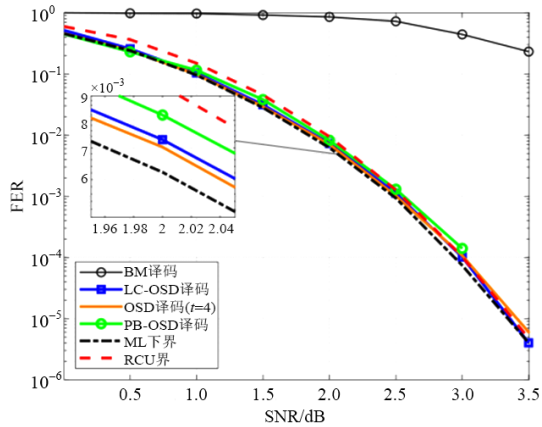


图 8 扩展 BCH 码[128,64]的不同 OSD 译码算法性能对比

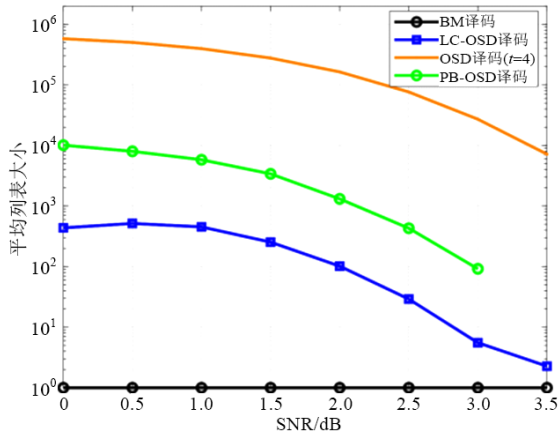


图 9 扩展 BCH 码[128,64]的不同 OSD 译码算法复杂度对比

## 5 总结与展望

随着中短码的应用需求增多,中短码长的编码技术将具有更广阔的应用前景.在本文中,我们回顾了有限码长编码性能限以及现有编码技术在中短码长下应用的研究进展,同时还详细介绍了具体编码的性能分析方法,面向分组结构设计的 TPST 和面向卷积结构设计的 BOUMCC 两类新型编码构造,以及面向中短码普适的 LC-OSD 低复杂度译码算法.为了便于对各种编译码算法加以理解,我们以码长为 128、信息长度为 64 的编码为例,汇总了不同编译码算法在此参数下的译码性能,如图 10 所示.

按图 10 中的编码性能排序,大致能将各编码技术分为以下 4 类.

(1) 扩展 BCH 码和随机码.这类码在此参数下利用 LC-OSD 译码能够达到 RCU 界的性能,这一方面印证了 RCU 界分析的有效性,另一方面说明了具有结构的代数编码构造和利用随机的概率编码构造在中短码长

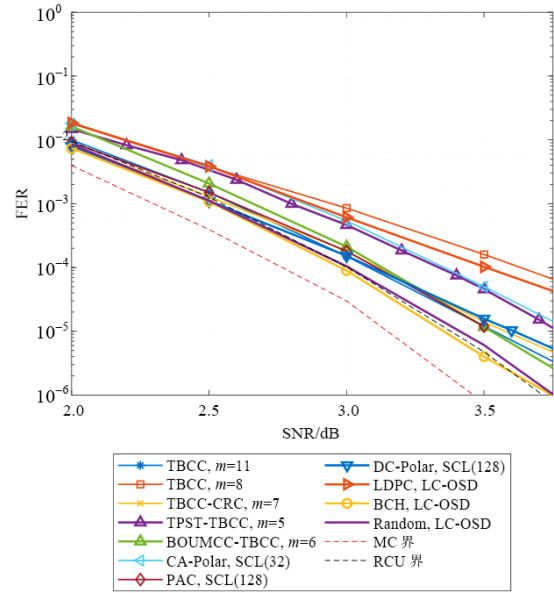


图 10 [128,64]各编码技术性能对比

下都具有一定的指导作用.

(2) 具有大记忆长度的 TBCC 码及与其性能相当的 TBCC-CRC 码、BOUMCC-TBCC 码、PAC 码以及 DC-Polar 码.这说明咬尾卷积码和极化码这两类编码在中短码长下具有较好的性能,且仍有进一步优化的空间.从编码的角度看,大记忆长度的 TBCC 码具有近似随机编码的效果,而另外的 4 种编码则分别借助级联编码(信息预处理)或叠加编码技术(信息后处理)对其原来的编码结构进行了优化.从译码角度看,这些编码均采用列表译码算法,取得近似最大似然译码的性能,但对于具有大记忆长度的 TBCC 码,所需译码复杂度最高,不利于低时延场景的应用.

(3) TPST-TBCC 码和 CA-Polar 码,这两个码采用了较低复杂度的译码算法,因而并未达到其 ML 译码的性能.由此可以看出,列表译码在中短码长下能够有效地通过控制其列表大小来实现译码性能与复杂度的折中.

(4) 较小记忆长度的 TBCC 码和 LDPC 码,这两类码在最大似然译码下的性能仍与 RCU 界有一定距离.因此,若要改进其性能,则需要进一步探索编码优化构造的方法.

总结各类编码技术的特点,将其优缺点归纳如表 2 所示.

在编码构造方面,现有技术的研究思路主要有两个:一个是利用组合或代数的数学方法,以增大编码的距离为设计目标进行设计,典型的有代数码、咬尾卷积码等,都是通过引入结构来优化编码设计;另一个利用

表 2 各编码技术在中短码长下的优缺点对比

| 编码技术      | 编码构造   | 译码算法   |
|-----------|--|--|
| BCH 码     | <b>优点:</b> 具有代数结构,纠错性能好。<br><b>缺点:</b> 只有特定编码参数,设计不灵活。   | <b>优点:</b> 具有低复杂的限定距离译码算法,硬判决下纠错性能好。<br><b>缺点:</b> 缺乏高效的软判决译码算法。   |
| LDPC 码    | <b>优点:</b> 编码参数可灵活配置。<br><b>缺点:</b> 码本的性能不足,与有限码长容量限有差距。                                       | <b>优点:</b> 具有高效的软入软出 BP 迭代译码算法,也有近似 ML 的 ADMM 译码算法。<br><b>缺点:</b> BP 译码具有平层效应,ADMM 译码复杂度较高。  |
| TBCC      | <b>优点:</b> 可通过增大记忆长度或级联 CRC 等技术获得性能逼近 RCU 界的编码构造。<br><b>缺点:</b> 需要借助打孔或缩短来调节码率,级联 CRC 会造成码率损失。 | <b>优点:</b> 具有实现 ML 译码的列表维特比译码算法。<br><b>缺点:</b> 译码复杂度随编码记忆长度增大而指数地提高。   |
| 极化码       | <b>优点:</b> 可通过级联预编码等技术获得性能逼近 RCU 界的编码构造。<br><b>缺点:</b> 码长设计不灵活,需要借助打孔或缩短来调节,级联 CRC 会造成码率损失。    | <b>优点:</b> 结合级联预编码的 SCL 译码能够取得近似 ML 译码的性能。<br><b>缺点:</b> SCL 译码具有串行特性,不利于低时延的并行实现。   |
| TPST 编码   | <b>优点:</b> 可通过更换上下层成分码调节编码参数。<br><b>缺点:</b> 性能受限于成分码的选择,需要借助随机矩阵进行叠加与变换。                       | <b>优点:</b> 基于成分码的列表译码实现整体的 SCL 译码,能够取得近似 ML 译码的性能,并可以快速估计性能界。<br><b>缺点:</b> SCL 译码具有串行特性,不利于低时延的并行实现。                              |
| BOUMCC 编码 | <b>优点:</b> 具有卷积结构,可通过更换上下层成分码调节编码参数。<br><b>缺点:</b> 性能受限于成分码的选择,需要借助随机矩阵进行叠加。                   | <b>优点:</b> 基于成分码的列表译码实现滑窗的 SCL 译码,能够取得近似 ML 译码的性能,并可以快速估计性能界。<br><b>缺点:</b> 基于树的 SCL 译码具有串行特性,不利于低时延的并行实现,且可能会造成译码错误传播。            |
| LC-OSD 译码 | —  | <b>优点:</b> 具有普适性,适用于所有的线性分组码,相比于传统 OSD 译码算法能在较低的译码复杂度下实现近似 ML 译码。<br><b>缺点:</b> 除了列表搜索外,每次译码都需要进行一次高斯消元,在高信噪比时,译码复杂度受限于高斯消元操作的复杂度。 |

构造随机编码或近似随机编码的思路进行设计,如增大卷积码的记忆长度、双向叠加编码技术,以及利用级联信息预处理的极化码等。但这两类思路的研究多是定性的指导设计,并未形成理论方法,也未给出普适的编码构造方法,如本文所设计的新型构造,叠加编码的思路可能是一种有效的设计和分析方法。然而如何有效刻画中短码长好码的特征,量化编码构造的优化设计目标,以及给出兼顾灵活设计与极致性能的编码,仍有待研究。

在译码实现方面,算法的性能与复杂度对系统的性能起决定性作用。面向低时延高可靠的需求,目前较受关注的译码方案是列表译码方案,包括卷积码的列表维特比译码、极化码的逐次抵消列表,以及普适的 OSD 译码等,其优点在于可以通过改变列表大小来调节性能,且列表足够大时能达到近似 ML 译码的性能。本文中所列举的三种新型高可靠低时延编译码算法都是基于列表译码的思想,通过性能与复杂度之间的权衡,可以较好地适应不同应用场景的需求。本质上,列表译码问题就是最优码字的搜索问题,因而在什么范围内搜索、按照什么顺序搜索、什么条件下停止搜索是揭示列表译码性能与复杂度折中关系必须回答的问

题。因此,如何有效地降低列表译码方案的复杂度并提高其实现的并行性,将会是未来中短码编译码算法的一个重要研究方向。

#### 参考文献

- [1] 3GPP. TS 22.261: Service requirements for the 5G system (Release 17) [S/OL]. [2021-12-24]. <https://itspec.com/archive/3gpp-specification-ts-22-261/>.
- [2] 华为技术有限公司. “6G: 无线通信新征程”白皮书[R/OL]. (2022-01-01)[2024-02-05]. <https://www.huawei.com/cn/huaweitech/future-technologies/6g-white-paper>. Huawei Technologies CO, LTD. “6G: The next new journey of wireless communication” white paper[R/OL]. (2022-01-01)[2024-02-05]. <https://www.huawei.com/cn/huaweitech/future-technologies/6g-white-paper>. (in Chinese)
- [3] ITU-R, Draft New Recommendation. IMT vision-framework and overall objectives of the future development of IMT for 2030 and beyond[R/OL]. (2023-01-29)[2024-02-05]. <https://techblog.comsoc.org/2023/01/29/imt-vision-framework-and-overall-objectives-of-the-future-development-of-imt-for-2030-and-beyond/>.

- [4] COŞKUN M C, DURISI G, JERKOVITS T, et al. Efficient error-correcting codes in the short blocklength regime[J]. *Physical Communication*, 2019, 34: 66-79.
- [5] SYBIS M, WESOŁOWSKI K, JAYASINGHE K, et al. Channel coding for ultra-reliable low-latency communication in 5G systems[C]//2016 IEEE 84th Vehicular Technology Conference (VTC-Fall). Piscataway: IEEE, 2016: 1-5.
- [6] 刘荣科, 孙贺, 冯宝平, 等. 极化码研究综述[J]. *遥测遥控*, 2020, 41(4): 2-17.
- LIU R K, SUN H, FENG B P, et al. A survey of polar code research[J]. *Journal of Telemetry, Tracking and Command*, 2020, 41(4): 2-17. (in Chinese)
- [7] SHIRVANIMOGHADDAM M, MOHAMMADI M S, ABBAS R, et al. Short block-length codes for ultra-reliable low latency communications[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2019, 57(2): 130-137.
- [8] VAN WONTERGHEM J, ALLOUM A, BOUTROS J J, et al. On short-length error-correcting codes for 5G-NR[J]. *Ad Hoc Networks*, 2018, 79: 53-62.
- [9] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. *The Bell System Technical Journal*, 1948, 27(3): 379-423.
- [10] FEINSTEIN A. Error bounds in noisy channels without memory[J]. *IRE Transactions on Information Theory*, 1955, 1(2): 13-14.
- [11] GALLAGER R. A simple derivation of the coding theorem and some applications[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1965, 11(1): 3-18.
- [12] POLTYREV G. Bounds on the decoding error probability of binary linear codes via their spectra[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1994, 40(4): 1284-1292.
- [13] SHANNON C E. Probability of error for optimal codes in a Gaussian channel[J]. *The Bell System Technical Journal*, 1959, 38(3): 611-656.
- [14] SHANNON C E, GALLAGER R G, BERLEKAMP E R. Lower bounds to error probability for coding on discrete memoryless channels. I[J]. *Information and Control*, 1967, 10(1): 65-103.
- [15] POLYANSKIY Y, POOR H V, VERDU S. Channel coding rate in the finite blocklength regime[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(5): 2307-2359.
- [16] MARTINEZ A, FÀBREGAS A G I. Saddlepoint approximation of random-coding bounds[C]//2011 Information Theory and Applications Workshop. Piscataway: IEEE, 2011: 1-6.
- [17] VAZQUEZ-VILAR G, FABREGAS A G I, KOCH T, et al. Saddlepoint approximation of the error probability of binary hypothesis testing[C]//2018 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE, 2018: 2306-2310.
- [18] HAMMING R W. Error detecting and error correcting codes[J]. *The Bell System Technical Journal*, 1950, 29(2): 147-160.
- [19] REED I. A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme[J]. *Transactions of the IRE Professional Group on Information Theory*, 1954, 4(4): 38-49.
- [20] MULLER D E. Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection[J]. *Transactions of the I.R.E. Professional Group on Electronic Computers*, 1954, EC-3(3): 6-12.
- [21] REED I S, SOLOMON G. Polynomial codes over certain finite fields[J]. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1960, 8(2): 300-304.
- [22] HOCQUENGHEM A. Codes correcteurs d'erreurs[J]. *Chiffres*, 1959, 2(2): 147-156.
- [23] BOSE R C, RAY-CHAUDHURI D K. On a class of error correcting binary group codes[J]. *Information and Control*, 1960, 3(1): 68-79.
- [24] BERLEKAMP E R. Non-binary BCH decoding[R]. North Carolina State University. Dept. of Statistics, 1966.
- [25] MASSEY J. Shift-register synthesis and BCH decoding[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1969, 15(1): 122-127.
- [26] CHASE D. Class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(1): 170-182.
- [27] FOSSORIER M P C, LIN S. Soft-decision decoding of linear block codes based on ordered statistics[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, 41(5): 1379-1396.
- [28] JIANG J, NARAYANAN K R. Iterative soft-input soft-output decoding of reed-Solomon codes by adapting the parity-check matrix[C]//IEEE Transactions on Information Theory. Piscataway: IEEE, 2006: 3746-3756.
- [29] HEHN T, HUBER J B, MILENKOVIC O, et al. Multiple-bases belief-propagation decoding of high-density cyclic codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2010, 58(1): 1-8.
- [30] YANG L J, CHEN L. Low-latency ordered statistics decoding of BCH codes[C]//2022 IEEE Information Theory Workshop (ITW). Piscataway: IEEE, 2022: 404-409.
- [31] BOSSERT M, SCHULZ R, BITZER S. On hard and soft decision decoding of BCH codes[J]. *IEEE Transactions*

- on Information Theory, 2022, 68(11): 7107-7124.
- [32] HUANG Q, ZHANG B. Minimal derivative descendants of cyclic codes[C]//2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE, 2023: 286-291.
- [33] MA X. Guessing what, noise or codeword? [EB/OL]. (2024-01-30)[2024-02-05]. <https://arxiv.org/abs/2401.16804v1>.
- [34] WU Y Q, HADJICOSTIS C N. Soft-decision decoding of linear block codes using preprocessing and diversification[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(1): 378-393.
- [35] WU Y Q, HADJICOSTIS C N. Soft-decision decoding using ordered recodings on the most reliable basis[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(2): 829-836.
- [36] YUE C T, SHIRVANIMOGHADDAM M, LI Y H, et al. Segmentation-discarding ordered-statistic decoding for linear block codes[C]//2019 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). Piscataway: IEEE, 2019: 1-6.
- [37] YUE C T, SHIRVANIMOGHADDAM M, VUCETIC B, et al. A revisit to ordered statistics decoding: Distance distribution and decoding rules[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2021, 67(7): 4288-4337.
- [38] VALEMBOIS A, FOSSORIER M. Box and match techniques applied to soft-decision decoding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(5): 796-810.
- [39] YUE C T, SHIRVANIMOGHADDAM M, PARK G, et al. Probability-based ordered-statistics decoding for short block codes[J]. IEEE Communications Letters, 2021, 25(6): 1791-1795.
- [40] GALLAGER R. Low-density parity-check codes[J]. IRE Transactions on Information Theory, 1962, 8(1): 21-28.
- [41] SPIELMAN D A. Linear-time encodable and decodable error-correcting codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1996, 42(6): 1723-1731.
- [42] MACKAY D J C, NEAL R M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes[J]. Electronics Letters, 1997, 33(6): 457.
- [43] CHUNG S Y, FORNEY G D, RICHARDSON T J, et al. On the design of low-density parity-check codes within 0.004 5 dB of the Shannon limit[J]. IEEE Communications Letters, 2001, 5(2): 58-60.
- [44] RICHARDSON T, KUDEKAR S. Design of low-density parity check codes for 5G new radio[J]. IEEE Communications Magazine, 2018, 56(3): 28-34.
- [45] HU X Y, ELEFThERIOU E, ARNOLD D M. Regular and irregular progressive edge-growth tanner graphs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(1): 386-398.
- [46] Ryan William E, Shu Lin. 信道编码: 经典与现代[M]. 白宝明, 马啸, 译. 北京: 电子工业出版社, 2017.
- RYAN W E, LIN S. Channel Codes: Classical and Modern[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2017. (in Chinese)
- [47] LI J E, LIN S, ABDEL-GHAFFAR K, et al. LDPC Code Designs, Constructions, and Unification[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [48] DAVEY M C, MACKAY D. Low-density parity check codes over GF(q)[J]. IEEE Communications Letters, 1998, 2(6): 165-167.
- [49] POUILLIAT C, FOSSORIER M, DECLERCQ D. Design of regular  $(2, d)$ -LDPC codes over GF(q) using their binary images[J]. IEEE Transactions on Communications, 2008, 56(10): 1626-1635.
- [50] XU H Z, BAI B M, ZHU M, et al. Construction of short-block nonbinary LDPC codes based on cyclic codes[J]. China Communications, 2017, 14(8): 1-9.
- [51] ZHANG J T, FOSSORIER M P C. A modified weighted bit-flipping decoding of low-density Parity-check codes[J]. IEEE Communications Letters, 2004, 8(3): 165-167.
- [52] DENG D X, XU H Z, BAI B M, et al. A two-stage decoding algorithm for short nonbinary LDPC codes with Near-ML performance[C]//2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE, 2017: 1202-1206.
- [53] OSTOJIC M, LOELIGER H A. Multitree decoding and multitree-aided LDPC decoding[C]//2010 IEEE International Symposium on Information Theory. Piscataway: IEEE, 2010: 779-783.
- [54] FELDMAN J, WAINWRIGHT M J, KARGER D R. Using linear programming to decode binary linear codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(3): 954-972.
- [55] BARMAN S, LIU X S, DRAPER S C, et al. Decomposition methods for large scale LP decoding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(12): 7870-7886.
- [56] WEI H Y, BANIHASHEMI A H. ADMM check node penalized decoders for LDPC codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(6): 3528-3540.
- [57] NACHMANI E, BE'ERY Y, BURSHTAIN D. Learning to

- decode linear codes using deep learning[C]//2016 54th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). Piscataway: IEEE, 2016: 341-346.
- [58] DAI J C, TAN K L, SI Z W, et al. Learning to decode protograph LDPC codes[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2021, 39(7): 1983-1999.
- [59] LIANG F, SHEN C, WU F. An iterative BP-CNN architecture for channel decoding[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2018, 12(1): 144-159.
- [60] 万飞, 白宝明, 朱敏. 多元LDPC编码调制系统CNN辅助迭代检测译码算法[J]. *无线电通信技术*, 2022, 48(4): 673-679.
- WAN F, BAI B M, ZHU M. CNN-aided iterative detection and decoding for nonbinary LDPC coded modulation systems[J]. *Radio Communications Technology*, 2022, 48(4): 673-679. (in Chinese)
- [61] ELIAS P. Coding for noisy channels[R]. IRE WESCON Convention Record, 1955: 94-104.
- [62] JOHANNESSON R, ZIGANGIROV K S. *Fundamentals of Convolutional Coding*[M]. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015.
- [63] STAHL P, ANDERSON J B, JOHANNESSON R. Optimal and near-optimal encoders for short and moderate-length tail-biting trellises[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 45(7): 2562-2571.
- [64] LOU C Y, DANESHRAJ B, WESEL R D. Convolutional-code-specific CRC code design[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2015, 63(10): 3459-3470.
- [65] YANG H J, LIANG E, PAN M H, et al. CRC-aided list decoding of convolutional codes in the short blocklength regime[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2022, 68(6): 3744-3766.
- [66] MA H, WOLF J. On tail biting convolutional codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1986, 34(2): 104-111.
- [67] GAUDIO L, NINACS T, JERKOVITS T, LIVA G. On the performance of short tail-biting convolutional codes for ultra-reliable communications[C]//11th International ITG Conference on Systems, Communications and Coding. New York: IEEE Press, 2017: 1-6.
- [68] SHAO R Y, LIN S, FOSSORIER M P C. Two decoding algorithms for tailbiting codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2003, 51(10): 1658-1665.
- [69] SHANKAR P, KUMAR P N A, SASIDHARAN K, et al. Efficient convergent maximum likelihood decoding on tail-biting trellises[EB/OL]. (2006-01-09) [2024-02-05]. <https://www.semanticscholar.org/paper/Efficient-Convergent-Maximum-Likelihood-Decoding-on-Shankar-Kumar/3747baef29cc18ae406aae23eda03fcd8ed36259>.
- [70] PAI H T, HAN Y S, WU T Y, et al. Low-complexity ML decoding for convolutional tail-biting codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2008, 12(12): 883-885.
- [71] HAN Y S, WU T Y, CHEN P N, et al. A low-complexity maximum-likelihood decoder for tail-biting convolutional codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2018, 66(5): 1859-1870.
- [72] SESHADRI N, SUNDBERG C E W. List Viterbi decoding algorithms with applications[C]//IEEE Transactions on Communications. Piscataway: IEEE, 1994: 313-323.
- [73] LIANG E, YANG H J, DIVSALAR D, et al. List-decoded tail-biting convolutional codes with distance-spectrum optimal CRCs for 5G[C]//2019 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). Piscataway: IEEE, 2019: 1-6.
- [74] ARIKAN E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(7): 3051-3073.
- [75] TRIFONOV P. Efficient design and decoding of polar codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, 60(11): 3221-3227.
- [76] NIU K, CHEN K. CRC-aided decoding of polar codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(10): 1668-1671.
- [77] LI B, SHEN H, TSE D. An adaptive successive cancellation list decoder for polar codes with cyclic redundancy check[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(12): 2044-2047.
- [78] ARIKAN E. From sequential decoding to channel polarization and back again[EB/OL]. (2019-08-26) [2024-02-05]. <https://arxiv.org/abs/1908.09594v3>.
- [79] NIU K, CHEN K, LIN J R. Beyond turbo codes: Rate-compatible punctured polar codes[C]//2013 IEEE International Conference on Communications (ICC). Piscataway: IEEE, 2013: 3423-3427.
- [80] MILOSLAVSKAYA V. Shortened polar codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(9): 4852-4865.
- [81] YAO X, MA X. A balanced tree approach to construction of length-flexible polar codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2024, 72(2): 665-674.
- [82] KAHRAMAN S, ÇELEBI M E. Code based efficient

- maximum-likelihood decoding of short polar codes[C]//2012 IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings. Piscataway: IEEE, 2012: 1967-1971.
- [83] TAL I, VARDY A. List decoding of polar codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(5): 2213-2226.
- [84] CHEN K, NIU K, LIN J R. Improved successive cancellation decoding of polar codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(8): 3100-3107.
- [85] PAMUK A. An FPGA implementation architecture for decoding of polar codes[C]//2011 8th International Symposium on Wireless Communication Systems. Piscataway: IEEE, 2011: 437-441.
- [86] ELKELESH A, EBADA M, CAMMERER S, et al. Belief propagation list decoding of polar codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22(8): 1536-1539.
- [87] FAYYAZ U U, BARRY J R. Polar codes for partial response channels[C]//2013 IEEE International Conference on Communications (ICC). Piscataway: IEEE, 2013: 4337-4341.
- [88] YAO H W, FAZELI A, VARDY A. List decoding of Arıkan's PAC codes[C]//2020 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE, 2020: 443-448.
- [89] SASON I, SHAMAI S. Performance analysis of linear codes under maximum-likelihood decoding: A tutorial[J]. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2006, 3(1/2): 1-222.
- [90] BERLEKAMP E R. The technology of error-correcting codes[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1980, 68(5): 564-593.
- [91] HERZBERG H, POLTYREV G. Techniques of bounding the probability of decoding error for block coded modulation structures[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1994, 40(3): 903-911.
- [92] DIVSALAR D. A simple tight bound on error probability of block codes with application to turbo codes[J]. *TMO Progress Report*, 1999, 19: 42-139.
- [93] MA X, LIU J, BAI B M. New techniques for upper-bounding the ML decoding performance of binary linear codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(3): 842-851.
- [94] MA X, LIU J, ZHUANG Q T, et al. New geometrical spectra of linear codes with applications to performance analysis[C]//2013 IEEE Information Theory Workshop (ITW). Piscataway: IEEE, 2013: 1-5.
- [95] DE CAEN D. A lower bound on the probability of a union[J]. *Discrete Mathematics*, 1997, 169(1/2/3): 217-220.
- [96] KUAI H, ALAJAJI F, TAKAHARA G. Tight error bounds for nonuniform signaling over AWGN channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, 46(7): 2712-2718.
- [97] COHEN A, MERHAV N. Lower bounds on the error probability of block codes based on improvements on de Caen's inequality[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(2): 290-310.
- [98] FELLER W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 1968.
- [99] ZHENG X P, YAO X, MA X. Performance analysis of maximum-likelihood decoding of polar codes[M]//*Communications in Computer and Information Science*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2024: 115-127.
- [100] SULLIVAN D. Error-propagation properties of uniform codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1969, 15(1): 152-161.
- [101] POLACEK M, SHITZ S, BAR-DAVID I. On FM threshold extension by click noise elimination[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1988, 36(3): 375-380.
- [102] KRAMER G. Outer bounds on the capacity of Gaussian interference channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(3): 581-586.
- [103] MA X, HUANG K C, BAI B M. Systematic block Markov superposition transmission of repetition codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2018, 64(3): 1604-1620.
- [104] CAI S H, MA X. Twisted-pair superposition transmission[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, 69(9): 5663-5671.
- [105] CAI S H, CHEN H W, WEI B D, et al. Dual coupled polar codes with successive cancellation list decoding[C]//2021 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE, 2021: 2375-2380.
- [106] 陈皓炜, 蔡穗华, 韦宝典, 等. 双耦合极化码及其编码调制方案[J]. *电子学报*, 2022, 50(8): 1917-1924.
- CHEN H W, CAI S H, WEI B D, et al. Dual coupled polar coded modulation[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2022, 50(8): 1917-1924. (in Chinese)
- [107] RACHINGER C, HUBER J B, MÜLLER R R. Comparison of convolutional and block codes for low structural delay[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2015, 63(12): 4629-4638.
- [108] LEE L N. Short unit-memory byte-oriented binary convolutional codes having maximal free distance (Corresp.)[J].

- IEEE Transactions on Information Theory, 1976, 22(3): 349-352.
- [109] LIN W C, CAI S H, SUN J C, et al. A low latency coding scheme: Semi-random block oriented convolutional code[C]//2018 IEEE 10th International Symposium on Turbo Codes & Iterative Information Processing (ISTC). Piscataway: IEEE, 2018: 1-5.
- [110] LI J J, CAI S H, LIN W C, et al. Improved block oriented unit memory convolutional codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(12): 7934-7944.
- [111] LIANG J F, WANG Y W, CAI S H, et al. A low-complexity ordered statistic decoding of short block codes[J]. IEEE Communications Letters, 2023, 27(2): 400-403.
- [112] WANG Y W, LIANG J F, MA X. Local constraint-based ordered statistics decoding for short block codes [C]//2022 IEEE Information Theory Workshop (ITW). Piscataway: IEEE, 2022: 107-112.
- [113] LIANG J, MA X. A random coding approach to performance analysis of the locally constrained ordered statistic decoding[EB/OL]. (2023-05-11)[2024-02-05]. <https://www.techrxiv.org/doi/full/10.36227/techrxiv.22771085.v1>.

### 作者简介



**蔡穗华** 男,1988年12月出生于广东省广州市.现为中山大学计算机学院副教授.主要研究方向为信息与编码理论、编码调制技术.  
E-mail: caish23@mail.sysu.edu.cn



**王义文** 男,1998年3月出生于广东省肇庆市.现为中山大学计算机学院博士研究生.主要研究方向为信息论与编码.  
E-mail: wangyw93@mail2.sysu.edu.cn



**白宝明** 男,1966年出生于山西省大同市.现为西安电子科技大学通信工程学院教授.主要研究方向为信息与编码理论、编码调制技术、无线通信.中国电子学会会员编号:E190003519F.  
E-mail: bmbai@mail.xidian.edu.cn



**马 啸** 男,1968年10月出生于河南省焦作市.现为中山大学计算机学院教授.主要研究方向为信息与编码理论、编码调制技术、无线通信和光通信等.  
E-mail: maxiao@mail.sysu.edu.cn