

# 面向结构化稀疏感知的张量阵列信号处理

郑航<sup>1,2</sup>, 史治国<sup>1,3\*</sup>, 王勇<sup>1</sup>, 周成伟<sup>1,2</sup>

(1. 浙江大学信息与电子工程学院, 浙江杭州 310027; 2. 浙江省协同感知与自主无人系统重点实验室, 浙江杭州 310015;  
3. 浙江大学金华研究院, 浙江金华 321000)

**摘要:** 随着新一代信息基础设施建设的持续推进, 多维阵列信号处理在雷达、通信、遥感等领域发挥着越发关键的基础性作用。多维阵列信号涵盖了丰富的空域/时域/频域/极化等参数信息, 蕴含着巨大的经济和社会价值。为了解决传统矢量/矩阵模型在表征多维阵列信号时存在的结构化信息损失问题, 张量代数逐步成为多维信号特征提取和利用的有力数理工具。然而, 随着信号维度的扩张, 遵循奈奎斯特采样定理所获取的信号规模在张量空间以指数级别膨胀, 而现有系统所能提供的算力资源却在逼近物理极限, 造成计算过载、时延过长等问题的出现。针对这些问题, 稀疏感知利用信号在物理空间的稀疏性实现欠奈奎斯特采样信号处理, 其从一维到多维空间的拓展为大规模张量信号的高效处理提供了可能。同时, 引入互质、嵌套等结构化稀疏感知模式, 可从增广虚拟域信号处理的角度提升系统性能。因此, 本文面向多维阵列信号特征的高经济性获取需求, 以“理论基础—算法设计—鲁棒机理”为主线, 介绍结构化稀疏阵列张量信号处理的新理论与新方法。本文介绍了稀疏张量信号处理的高阶统计处理理论, 通过构建虚拟域张量模型并设计其对应的信源辨识能力优化策略, 保障了多维虚拟域上的奈奎斯特匹配处理和欠定参数估计; 在此理论上, 围绕波达方向估计和波束成形这两个基本问题, 介绍了基于虚拟域张量填充的稀疏阵列波达方向估计算法, 充分利用全部的非连续多维虚拟域信息实现高精度、超分辨信源测向, 并介绍了基于互质张量权重优化的稀疏阵列波束成形算法, 实现波束方向图上的虚峰消除和主瓣尖锐化, 提高了稀疏阵列的信号增强与抗干扰性能; 在此基础上, 从提高非理想条件下的稀疏张量信号处理鲁棒性角度出发, 介绍了一种资源集约型张量化神经网络架构, 克服了非理想张量统计模型失配带来的性能衰落问题, 从数据驱动层面实现面向稀疏张量信号特征开展机器学习的高效性、鲁棒性。

**关键词:** 多维阵列信号处理; 张量信号处理; 结构化稀疏感知; 波达方向估计; 波束成形

**基金项目:** 国家自然科学基金(No.U21A20456, No.62271444); 浙江省自然科学基金(No.LZ23F010007)

**中图分类号:** TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2025)03-1040-23

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20240504

## Tensor Array Signal Processing for Structured Sparse Sensing

ZHENG Hang<sup>1,2</sup>, SHI Zhi-guo<sup>1,3\*</sup>, WANG Yong<sup>1</sup>, ZHOU Cheng-wei<sup>1,2</sup>

(1. College of Information Science and Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China;

2. Key Laboratory of Collaborative Sensing and Autonomous Unmanned Systems of Zhejiang Province, Hangzhou, Zhejiang 310015, China;

3. The Jinhua Institute of Zhejiang University, Jinhua, Zhejiang 321000, China)

**Abstract:** With the continuous construction of new information infrastructures, multi-dimensional array signal processing plays a fundamental role in the field of radar, wireless communication, remote sensing and so on. Multidimensional array signals contain rich spatial/temporal/frequency/polarization parametric information, offering great economic and social values. To deal with the problem of structural information loss inherent in traditional vector/matrix models, the tensor algebra has been adopted to effectively retrieve multi-dimensional signal features. However, as the dimension of signals increases, the tensor signal volume following the Nyquist sampling theorem exponentially expands. Unfortunately, computation resources of the system are approaching the physical limit, resulting in computational overload and high latency. Concerning these issues, the sparse sensing theory has been developed to exploit the spatial sparsity of signals for sub-Nyquist processing. The extension from one-dimensional sparse sensing to multi-dimensional sparse sensing becomes a promising solution to efficient tensor signal processing. Meanwhile, by imposing structured sparse sensing paradigm such as coprime and nested sensing, the performance of the system can be enhanced via augmented coarray signal processing. Thus, to pur-

sue the high economy of multi-dimensional array signal processing, this paper endeavors to the research on Structured Sparse Tensor Signal Processing for Sensor Arrays. In particular, the paper introduces the statistical theory of sub-Nyquist tensor signals. By deriving the augmented coarray tensor model and devising the corresponding strategy of source identifiability enhancement, this theory facilitates Nyquist matching in the virtual domain and underdetermined parameter estimation. Based upon this theory, this paper introduces a coarray tensor completion algorithm for sparse array DOA estimation, exploiting the full information of the discontinuous virtual array to achieve high accuracy and resolution. Meanwhile, this paper introduces a coprime tensor weights optimization algorithm for sparse array beamforming, which yields a beampattern with a sharper mainlobe and lower sidelobes, and increases the output signal-to-interference-plus-noise ratio. Furthermore, this paper introduces a resource-efficient tensorized neural network for robust sparse tensor signal processing, which compensates the performance deterioration for the model-driven methods in non-ideal conditions by efficiently learning tensor signal features.

**Key words:** multi-dimensional array signal processing; tensor signal processing; structured sparse sensing; direction-of-arrival estimation; beamforming

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.U21A20456, No.62271444); Natural Science Foundation of Zhejiang Province (No.LZ23F010007)

## 1 引言

阵列信号处理作为信号处理的一个重要研究分支,是指利用传感器阵列对空间信源的入射信号进行统计分析和处理,实现信源估计与分离、参数估计、期望信号增强以及干扰抑制等一系列功能,在无线通信、雷达、射电天文、水声探测等各类信息化领域中得到了广泛应用<sup>[1-3]</sup>. 波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计和波束成形(Beamforming)是阵列信号处理的两项基础性问题. 其中,波达方向估计利用阵列中不同天线阵元接收信号的相位差解算入射信号的相对方向,从而掌握信源在空间中的位置信息,常被应用于无人机定位<sup>[4,5]</sup>、海洋监测<sup>[6]</sup>、毫米波信道估计<sup>[7]</sup>以及语音控制<sup>[8]</sup>等场景. 波束成形对不同天线阵元上接收/发送信号的相位及幅值进行调整,从而增强特定方向的期望信号,并抑制其他方向的干扰信号与噪声,在无线传输链路优化<sup>[9]</sup>、目标跟踪<sup>[10]</sup>、卫星网络<sup>[11]</sup>以及通信感知一体化(Integrated Sensing And Communication, ISAC)<sup>[12]</sup>等场景中发挥着重要作用.

伴随着新一代信息技术的迅猛发展,遥感、声呐、通信等系统面临着更为急迫的多维信号处理需求. 一方面,为了获取更加全面、更大范围的物理世界感知空间,各类系统的阵列结构正在从一维向二维(如平面阵列、L型阵列<sup>[13,14]</sup>等)甚至更高维度(如立方阵列、柱形阵列<sup>[15,16]</sup>等)拓展,其对应的阵列信号模型中包含了更多维度的空时参数;另一方面,空间中传播的信号自身也涵盖了更为丰富的电磁特征. 例如,遥感系统面向的高光谱图像是利用水平坐标、竖直坐标以及波长等属性综合描述的多通道信号<sup>[17]</sup>;复杂水声环境中获取到的信号包含了频率、速度、角度等多维耦合特征<sup>[18,19]</sup>;极化敏感电磁矢量(ElectroMagnetic Vector Sensor, EMVS)阵列在时空维度的基础上,进一步引入多轴极化维度以获

取电磁波的全面信息<sup>[20,21]</sup>. 在此背景下,因信号维度的膨胀导致的数据量增长速度已经远超系统信号处理能力的提升速度. 现有系统所依赖的传统阵列信号处理方法以矢量/矩阵信号模型为基础,无法对多维信号的丰富时空与电磁属性进行精确刻画,往往伴随着固有的信息损失. 同时,传统方法通常基于矩阵线性代数(Linear Algebra)的数学理论实现信号特征分析和利用,无法深入发掘多维信号特征的关联性,且难以在多维阵列信号处理场景中实现灵活拓展. 为了应对上述挑战,基于线性代数分析的矢量/矩阵处理理论开始向基于多重线性代数(Multi-linear Algebra)分析的张量处理理论演变. 如图1所示,张量作为一种多维数据结构,能够更加完备地刻画特征的维度间关联性. 同时,张量代数(即多重线性代数)相比于矩阵线性代数,具备更好的多维数据特征提取和数值计算能力<sup>[22,23]</sup>. 为此,国内外研究者开始着手建立张量与多维阵列信号处理之间的关联关系,将张量信号处理视作发展多维阵列信号处理新理论与新方法的重要手段<sup>[24,25]</sup>.

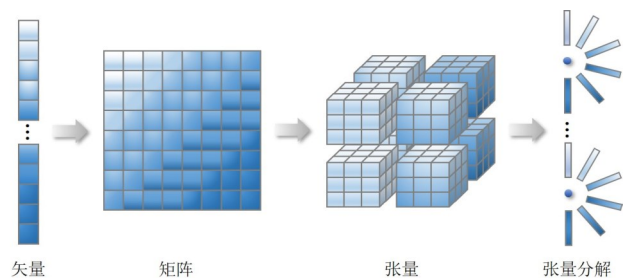


图1 从矢量/矩阵模型演变至张量模型

长期以来,科学界普遍认为多维信号处理的相关研究是推动无线通信与感知技术革新的核心动力之一. 国务院于2022年1月发布的《“十四五”数字经济发展规划》<sup>[26]</sup>中提出,中国的数字经济发展将5G网络的

扩容提速、6G 网络的技术研发以及物联网的增强覆盖等作为主要目标。相关信息基础设施的建设均高度依赖大规模多维阵列的部署应用,并以海量多维信号的高效处理为基础。2023 年 10 月,中国移动发布《网络协作通感一体化技术白皮书》<sup>[27]</sup>和《面向网络协作的智能超表面技术白皮书》<sup>[28]</sup>等 6G 系列白皮书,提出通信和感知的融合将成为 6G 移动信息网络的重要技术特征。因此,精细的窄波束控制、高精度目标感知、超分辨测向定位、强干扰控制等技术将综合影响系统性能,而以多维复杂信号处理与融合为底层机理的基础理论研究将起到决定性的作用。

与此同时,探究张量优化理论与学习机制在多维信号处理领域的作用,开始成为领域内研究者重点关注的问题。2020 年 8 月,《IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing》期刊发行了以“Tensor Decomposition for Signal Processing and Machine Learning”为主题的专刊,刊登了中国、美国、芬兰、日本、澳大利亚等国的学者的文章。这些论文指出,张量分解是用于实现高维信号特征提取以及神经网络训练加速等技术的核心理论工具。由 IEEE 信号处理学会副主席、电气电子工程师学会会士 Sidiropoulos 教授及电气电子工程师学会会士 Lathauwer 教授等知名学者于 2017 年发表在《IEEE Transactions on Signal Processing》期刊上的综述论文“Tensor Decomposition for Signal Processing and Machine Learning”<sup>[29]</sup>,至今仍位列该刊热点论文(Popular Articles)排行榜的前 5 名;文中指出了张量处理将成为多维信号处理领域更具基础性和多样性的技术手段。2023 年 6 月,由 IEEE 传感器阵列与多通道信号处理专业技术委员会现任及前任 5 位主席联合撰文发表在《IEEE Signal Processing Magazine》期刊上的综述论文“Twenty-Five Years of Sensor Array and Multichannel Signal Processing: A Review of Progress to Date and Potential Research Directions”<sup>[2]</sup>,将“基于张量的阵列信号处理”以及“面向传感器阵列的机器学习和人工智能技术”列为传感器阵列和多通道信号处理领域的未来重要发展方向。

张量信号的采样机制和处理方法是决定系统高效性和稳健性的关键因素。传统信号处理方法往往遵循奈奎斯特采样定理(Nyquist Sampling Theorem),以避免由信号欠奈奎斯特采样(Sub-Nyquist Sampling)所带来的空域混叠(Spatial Aliasing)问题<sup>[30]</sup>。这一定理在阵列信号处理领域的体现形式为:部署天线阵元间隔小于或等于信号半波长的均匀阵列,以实现空域奈奎斯特信号采样。张量信号处理的研究通常亦遵循这一定理进行多维奈奎斯特信号采样,但却面临着由美国科学院院士 Bellman 最早提及的“维度灾难”(Curse of Di-

mensionality)困境<sup>[31]</sup>。具体而言,在一个线性单位区间内以 0.01 间隔均匀采样,将得到 100 个平均分布的采样点;而当维度增加到 3 之后,以同样 0.01 间隔在立体单位区间均匀采样后得到的点数为  $10^6$ ,是线性单位区间信号规模的  $10^4$  倍。“维度灾难”意味着随着信号维度的增长,奈奎斯特采样信号的规模将以指数级别同步增长。然而,计算机系统所能提供的算力资源却在逼近物理极限,导致大规模张量信号处理面临计算过载、时延过长等严峻挑战。因此,传统的张量信号处理理论和方法面临部署的可行性和实用性等方面的挑战。

稀疏感知理论的问世成为突破现有张量信号处理瓶颈的一个重要契机<sup>[32]</sup>。空域稀疏感知方法通过增大天线阵元间隔实现阵列的稀疏化排布,能够突破奈奎斯特采样速率的限制,对欠奈奎斯特采样信号实现有效处理。进而,将天线阵元按照特定的规则稀疏排布,得到互质阵列(Coprime Array)<sup>[33]</sup>、嵌套阵列(Nested Array)<sup>[34]</sup>等系统化(Systematic)稀疏阵列结构,基于它们对应的高阶信号统计量推导出增广虚拟阵列(Augmented Virtual Array),从而实现奈奎斯特匹配的等价虚拟域(Coarray)信号处理,提升算法自由度和空间分辨率等关键性能指标<sup>[35,36]</sup>,在使用更少物理阵元的前提下仍然保障系统的高性能输出。自稀疏阵列信号处理的思想问世以来,其在一维空间的应用机制和算法研究均取得了较大的进展,为软硬件资源/成本敏感的系统提供了平衡效率与性能的核心解决方案。如图 2 所示,将结构化稀疏感知理论从一维空间拓展至多维空间,能够指数级别地降低空域信号的采样规模,有望提高实际系统中张量信号处理的经济性,并从多维虚拟域信号处理的角度保障系统性能。

综上所述,面对多维阵列信号的高经济性、高性能处理需求,推广阵列信号处理领域的多维结构化稀疏感知理论是具备充分可行性的解决方案,其中张量代数是多维阵列信号处理的有力数理工具。

## 2 国内外相关研究现状与发展动态

本节从多维阵列张量信号处理、稀疏阵列信号处理以及相关领域的稀疏张量信号处理等三个方面,梳理与稀疏阵列张量信号处理密切相关的国内外研究现状,分别介绍各个方向的主要研究成果,进而总结稀疏阵列张量信号处理领域的研究挑战,并介绍该领域的最新研究进展。

### 2.1 多维阵列张量信号处理

有关张量代数的理论研究可追溯至 20 世纪 60 年代,具有里程碑意义的研究包括平行因子分解(PARALLEL FACTOR decomposition, PARAFAC)、Canonical Poly-

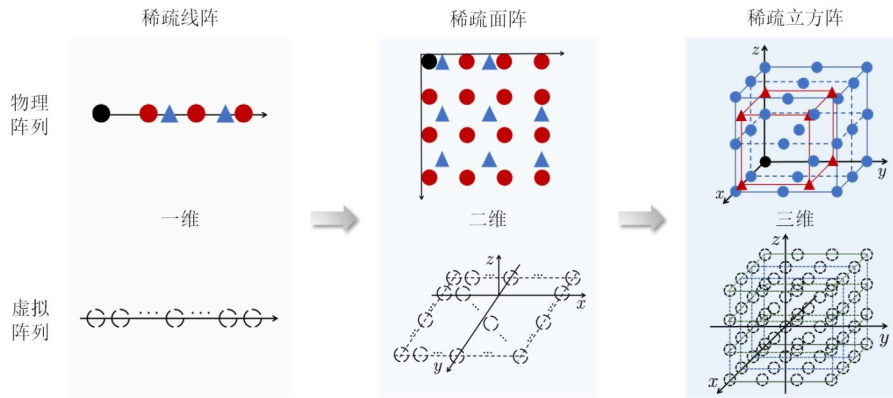


图2 多维稀疏阵列及其对应的多维虚拟阵列

adic(CP)分解以及 Tucker 分解等. 其中,潜在语义分析领域研究先驱、韦仕敦大学 Harshman 教授提出了张量的 PARAFAC 算法<sup>[37]</sup>; 罗格斯大学 Carroll 教授和美国贝尔实验室研究员 Chang 则提出了 CP 分解算法<sup>[38]</sup>. 这两种算法均是张量分解为若干个秩一张量之和,具备分解唯一性和优越的参数辨识性. Tucker 分解作为另一种经典的张量分解模型,由美国心理学学会最高荣誉杰出科学贡献奖获得者 Tucker 教授在 1963 年提出<sup>[39-41]</sup>. 与 CP 分解不同的是, Tucker 分解并非具备唯一性的秩一分解,而是计算张量多模展开矩阵的主左奇异向量获取分解后因子,重点关注张量的多重特征子空间. 在此基础上, Lathauwer 等人<sup>[42]</sup>将 Tucker 分解与矩阵奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)关联,并赋予了 Tucker 分解一个更为贴切的名称——高阶奇异值分解(Higher-Order Singular Value Decomposition, HOSVD).

随着阵列信号处理应用的日益革新,多维阵列感知信号已涵盖多维度空时域、极化以及多普勒等复杂电磁信息. 国内外研究者开始积极探索面向波达方向估计、波束成形等技术的张量信号处理算法<sup>[43,44]</sup>. 从波达方向估计的角度出发, Sidiropoulos 等人<sup>[45]</sup>建立起 PARAFAC 与旋转不变信号参数估计算法(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)间的联系,实现了面向均匀阵列的张量波达方向估计,以此验证张量模型相比于传统矩阵模型的性能优越性; Zheng 等人<sup>[46]</sup>提出了协方差张量重建方法,以克服多径效应影响,实现了相干信号波达方向估计;面向 EMVS 阵列场景,基于 HOSVD 的多重信号分类方法(MULTIPLE Signal Classification, MUSIC)<sup>[47]</sup>能够有效提高波达方向估计的分辨率和精度. 从波束成形的角度出发, Sidiropoulos 等人<sup>[48,49]</sup>结合张量分解和盲波束成形器,充分利用平行因子分解的唯一性优势,实现具备更强参数辨识能力的多用户多址接入;此外,为了利用多重线性代数性质降低波束成形器的计算复杂

度,一系列面向张量波束成形权重的高效优化方法被提出. 这些方法将经典的波束成形准则进行张量化拓展,并引入张量分解思想以实现高维权重优化问题的多模投影交替求解,从而提高波束成形效率<sup>[50-52]</sup>. 其中,基于最小方差无畸变响应(Minimum Variance Distortionless Response, MVDR)准则的张量波束成形器<sup>[50]</sup>、基于最小均方误差(Minimum Mean Square Error, MMSE)准则的张量波束成形器<sup>[51]</sup>以及基于线性约束最小方差(Linear Constrained Minimum Variance, LCMV)准则的张量波束成形器<sup>[52]</sup>分别被应用于 EMVS 阵列、多重线性平移不变阵列以及大规模均匀平面阵列. 在此基础上,张量 MVDR 波束成形器可以与共轭梯度最小二乘算法结合,获得更高的鲁棒性与收敛性能<sup>[53]</sup>;张量 MMSE 波束成形器被推广至分布式合作波束成形场景,在大规模阵列网络应用中表现优异<sup>[54,55]</sup>.

上述工作涉及面向多维阵列的张量信号处理基础理论,而在一些面向无线通信与传感系统应用的算法设计中,张量模型的引入同样起到了关键性作用<sup>[25]</sup>. 例如,为了提供多天线空间分集与复用增益,多输入多输出(Multiple-Input and Multiple-Output, MIMO)技术在雷达、Wi-Fi、移动通信等场景展现出优异的实用效果. 由于 MIMO 系统更加关注信道的多维空间特性,国内外研究者积极探究 MIMO 张量信号处理的理论与方法. 具体而言, Du 等人<sup>[56]</sup>基于 MIMO 雷达的接发机分置特点,设计了基于 PARAFAC 模型的高精度角度估计方法;张量链、张量环等衍生型张量分解工具,也被用于降低高维张量统计量处理的计算复杂度<sup>[57,58]</sup>,以满足 MIMO 雷达角度估计的实时性需求. 进而, MIMO 雷达阵列可与 EMVS 相结合,用于实现基于张量模型的高精度波达方向/波离方向/极化参数联合估计<sup>[59,60]</sup>. 在 MIMO 通信场景中,随着以毫米波为代表的高频通信技术发展,电磁传输能量集中于数量较少的若干条路径上,从而允许 MIMO 信道由这些路径所对应的参数进行构建,推动了角度域/参数化信道估计方法的研究. 其中,利用张量

分解实现路径多维参数(包含信号波达方向、时延、路径衰减系数等)估计和信道重建,具备信道估计精度高、复杂度低等优势,已经成为一类备受欢迎的技术方案<sup>[61,62]</sup>。同时,相关研究将张量波束成形权重的优化策略与 MIMO 通信收发信号/信道模型进一步融合,提出了张量化上下行预编码策略,提高了数据传输速率,并利用多重线性代数性质降低了数据传输过程的计算复杂度<sup>[63,64]</sup>。进而,面向 ISAC 系统,基于张量的通信信道/目标状态联合估计<sup>[65]</sup>以及路径检测与分离<sup>[66]</sup>等方法研究也验证了张量处理手段的有效性和可拓展性。

上述研究大多采用均匀阵列搭建系统,遵循奈奎斯特采样速率来获取张量信号,仍然存在信号规模大、系统处理能力受限等技术瓶颈问题。为此,通过建立多维稀疏感知与张量信号处理之间的关联关系,设计面向稀疏阵列的张量优化理论与方法,有望提高相关系统的综合能效。

## 2.2 稀疏阵列信号处理

稀疏阵列信号处理研究的发展包含两次重要突破。一次是二战后美苏军备竞赛时期,最小冗余阵列<sup>[67]</sup>和最小孔洞阵列<sup>[68]</sup>等稀疏阵列被学者提出,其主要思想是通过制定阵元最小冗余及最大空间分辨率等准则,设计天线阵元的稀疏化方式,在扩大阵列孔径的同时也提高阵元的使用率;然而,这类阵列的阵元位置没有固定规律,需要利用复杂度极高的穷举法选取,且在部分阵元数量约束条件下无解,应用局限性较大。另一次突破则是 2011 年由加州理工学院 Vaidyanathan 教授课题组提出的以嵌套阵列<sup>[34]</sup>和互质阵列<sup>[35]</sup>为代表的具备系统化结构的稀疏阵列。其中,互质阵列由 2 个稀疏子阵列按照互质规则排布组合而成,具有可解释性强、自由度高、互耦效应低等独特优势,受到了学术界和工业界的高度关注。

针对欠奈奎斯特采样信号处理的空间响应模糊(即空域混叠)问题,研究者利用上述具有系统化结构的稀疏阵列,设计出一系列无模糊性(Ambiguity-free)的稀疏阵列信号高阶统计处理方法<sup>[69-71]</sup>。这些方法主要可以划分为两类,即基于稀疏子阵分解(Decomposed subarray, DECOM)的方法和基于虚拟域处理的方法。稀疏子阵分解方法分别计算稀疏阵列中 2 个子阵列所对应的稀疏信号协方差矩阵<sup>[72]</sup>,并应用 MUSIC 方法得到对应 2 个稀疏子阵列的信源参数;进而,基于互质数分解唯一性定理得出这些参数的周期性模糊响应规律,并予以解模糊匹配,实现空间信源的有效辨识。这种处理方法思路简单且易于实现,但却无法提高算法的自由度。基于虚拟域处理的方法通过矢量化稀疏信号的二阶统计量,推导出对应增广虚拟线阵的等价

虚拟域信号,并利用空间平滑算法构造了对应于虚拟均匀线阵的满秩协方差矩阵,从而设计虚拟域 MUSIC 方法实现欠定(Underdetermined)信源估计<sup>[35]</sup>。稀疏阵列所对应虚拟阵列的连续性和长度在一定程度上影响着虚拟域处理的性能。为此,大量研究以优化虚拟阵列连续性和长度为目标设计新型稀疏阵列,其中包括扩展型互质阵列<sup>[73]</sup>、超级嵌套阵列<sup>[74]</sup>、多级稀疏阵列<sup>[75]</sup>以及对称稀疏阵列<sup>[76]</sup>等。

在稀疏阵列波达方向估计方面,为了有效利用稀疏阵列所对应非连续虚拟阵列的全部信息,稀疏恢复(Sparse Recovery)思想被推广至虚拟域信号处理场景;在稀疏约束条件下,对过完备基表示的空间功率谱进行优化重建,从而利用全部虚拟域统计信息提升波达方向估计性能<sup>[77,78]</sup>。为了在解决非连续虚拟域信息损失问题的同时,摆脱预定义空间网格点基不匹配(Basis Mismatch)问题所带来的固有估计误差,Zhou 等人<sup>[79]</sup>设计了原子范数无网格化(Gridless)参数表征的虚拟线阵内插思路,实现了基于虚拟域协方差矩阵重建的稀疏阵列波达方向估计。此外,经典稀疏阵列波达方向估计方法包括虚拟域 ESPRIT 方法<sup>[80]</sup>、虚拟域协方差矩阵填充方法<sup>[81,82]</sup>、稀疏阵列物理域内插方法<sup>[83]</sup>以及移动稀疏阵列的虚拟域信号处理方法<sup>[84]</sup>等。

在稀疏阵列波束成形方面,为了解决稀疏阵元排布所带来的期望信源方向响应模糊问题, Martino 等人<sup>[85]</sup>从互质线阵中 2 个稀疏子阵列所对应波束的分布特点出发,提出了基于乘性准则和最小化功率准则的子阵列波束合成方法,从而有效抑制互质线阵波束方向图(Beampattern)上的虚峰,实现了精准的空间波束扫描。基于该框架,稀疏阵列波束成形技术已用于水下环境声呐探测<sup>[86]</sup>。此外,从波束成形输出信干噪比(Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio, SINR)性能优化角度出发,Zhou 等人<sup>[87]</sup>基于稀疏线阵参数估计与干扰加噪声协方差矩阵重建思想<sup>[88,89]</sup>,设计了一种鲁棒稀疏线阵波束成形器,保障输出 SINR 在波达方向估计误差、波前畸变误差、相干源局部散射误差等影响下始终能够接近理论性能极限。将这种稀疏线阵波束成形准则与压缩感知虚拟域参数估计<sup>[90,91]</sup>以及虚拟域空间谱估计<sup>[92]</sup>等思路相结合,能够增加波束成形自由度;同时,通过应用虚拟阵列内插<sup>[93]</sup>和原子范数稀疏恢复<sup>[94]</sup>等方法,能够利用更加精确的参数估计结果提升干扰加噪声协方差矩阵的重建效果,进一步提高输出 SINR 性能。

虽然上述研究丰富了稀疏阵列信号处理的理论与方法,但是它们大多仍只考虑一维稀疏线阵场景,无法有效地刻画多维度信号特征。随着雷达、遥感、声呐等系统的技术革新,传统一维稀疏阵列向二维稀疏阵列

(如平面阵列、L型阵列等)<sup>[95]</sup>甚至更高维度稀疏阵列(如立方阵列、柱形阵列等)<sup>[96,97]</sup>演变. 现有涉及多维稀疏阵列信号处理的研究, 往往仍沿用矢量/矩阵处理的底层逻辑. 在多维稀疏阵列场景中, 现有的线性虚拟域处理方式难以形成可用于多重线性分析的多维虚拟域模型; 以此为理论基础的阵列信号处理算法受限于线性代数理论, 也缺乏灵活的拓展能力.

### 2.3 面向高效成像、参数估计等应用的稀疏张量信号处理

近年来, 相关领域的国内外研究者开始尝试利用张量工具解决多维稀疏信号处理问题, 发掘稀疏张量信号处理的技术潜力, 并对相关理论与方法的部署开展初步探索. 例如, 为了节约机载红外成像系统的软硬件资源, Yang 等人<sup>[98]</sup>引入压缩感知核对高光谱图像进行主动式稀疏化采样, 并通过低秩张量填充实现高光谱图像恢复, 提高红外成像质量. Kanatsoulis 等人<sup>[99]</sup>面向功能性磁共振成像(functional Magnetic Resonance Imaging, fMRI)应用, 系统化讨论了 fMRI 张量信号在每一个时间切片上成列、成行、成片的规则化欠奈奎斯特采样模式, 并提出了基于稀疏张量 CP 分解的 fMRI 图像重建技术, 能够减少人体辐射剂量、降低设备成本. 此外, 稀疏张量模型在处理涵盖时间、流量、空间等多尺度信息的地震信号<sup>[100]</sup>以及交通数据<sup>[101]</sup>等方面同样具有丰富的应用示例, 能够提升系统的处理效能和综合性能.

鉴于稀疏张量信号模型以及张量填充等方法在上述领域中的优越表现, 国内外研究者开始探究这些方法在传感器阵列中的潜在应用. 其中, 在 MIMO 系统的参数估计应用中, Huang 等人<sup>[102]</sup>提出了基于张量填充的 MIMO 雷达参数估计方法, 通过欠奈奎斯特采样减少信号存储量, 并结合张量填充和张量分解手段, 实现波离方向/波达方向联合估计; 类似地, 利用低速率模数转换器(Analog-to-Digital Converter, ADC)开展时域欠奈奎斯特采样并对稀疏张量信号进行分解, 能够有效解决 MIMO 通信系统中的频谱估计和信号恢复问题<sup>[103]</sup>, 或者载波频率/波达方向的联合估计问题<sup>[104-106]</sup>. 在雷达成像应用中, Qiu 等人<sup>[107]</sup>构建频域/角域联合欠奈奎斯特采样的稀疏张量信号, 并设计张量重建算法, 实现了高效雷达成像; 类似地, 通过降低频域/角域的采样速率收集稀疏化信号回波, 并利用张量代数工具进行回波处理, 能够实现合成孔径雷达的高清快速成像<sup>[108]</sup>. 然而, 这些方法的欠奈奎斯特采样仅仅是通过降低时域采样速率而实现的, 仍然没有通过部署稀疏阵列实现空域欠奈奎斯特采样.

为了在降低时域/频域/多普勒域采样速率的同时部署稀疏阵列实现空域欠奈奎斯特信号采样, Na 等

人<sup>[109]</sup>搭建的欠奈奎斯特雷达(Sub-Nyquist Radar)系统构建了四维稀疏张量信号模型, 并利用张量填充与稀疏恢复技术实现了多维雷达参数的高效联合估计. 以色列科学与人文院院士 Yonina C. Eldar 教授课题组提出面向 B 超成像的时域/空域联合欠奈奎斯特采样策略, 利用波束成形算法高效生成稀疏化图像张量, 并结合迭代阈值收缩与自监督算法实现 B 超图像重建, 从而在保障成像质量的同时, 大幅降低系统所需存储和处理的信号规模<sup>[110]</sup>. 类似地, 通过处理机载稀疏阵列对应的稀疏回波张量模型, 能够实现高分辨、高效率三维合成孔径雷达成像<sup>[111]</sup>. 前述工作虽然在张量空间对空域欠奈奎斯特信号进行建模, 但是后续的核心处理手段大多仍是填充恢复一阶稀疏张量, 未能在张量空间中推导增广虚拟域模型并实现奈奎斯特匹配的高阶虚拟域张量处理, 算法性能仍然存在较大的提升空间.

近年来, 稀疏阵列张量信号的高阶统计处理方法受到了国内外研究者的关注<sup>[112-118]</sup>. 其中, Han 等人<sup>[112]</sup>将矢量传感器嵌套线阵对应的虚拟域模型推导至张量空间, 进而结合空间平滑和 HOSVD 算法实现了高自由度的波达方向估计. 但是, 该工作仍然是面向稀疏线阵展开的, 需要引入额外的极化敏感电磁维度以构建稀疏张量信号. Liu 等人<sup>[113]</sup>针对多维稀疏阵列的稀疏张量信号构建了多维虚拟域的张量表达形式, 设计了一种结合空间平滑和 CP 分解算法的张量 MUSIC 方法以实现欠定波达方向估计. Zheng 等人<sup>[114]</sup>引入耦合 CP 分解取代了空间平滑过程, 并推导稀疏阵列波达方向估计的闭式解, 以避免计算复杂度极高的张量谱峰搜索过程. 随后, 在部署分置稀疏线阵发送器和接收器的 MIMO 系统中, 虚拟域张量处理已用于实现高精度的多维参数估计<sup>[115,116]</sup>. 然而, 这些方法需要以组合多个线性阵列或者联合发送/接收信息的形式构建虚拟域张量, 而不是面向多维稀疏阵列的普适性处理框架, 也没有深入探讨虚拟域张量处理的信源辨识能力(Source Identifiability)增强、统计信息利用以及结构优化等问题.

### 2.4 结构化稀疏阵列张量信号处理的研究挑战与最新研究进展

对上述国内外研究现状与发展动态分析可知, 面向结构化稀疏阵列的张量信号处理理论与方法研究需要克服如下三方面挑战.

(1) 在多维稀疏阵列信号的高阶统计处理理论层面, 传统以矩阵信号模型为基础的方法通过矢量化信号协方差矩阵推导出增广虚拟阵列, 破坏了多维稀疏阵列信号的原始结构, 从而造成固有的模型信息损失. 同时, 基于矩阵代数的虚拟域信号处理手段存在线性

复杂度高、可拓展性差等问题。因此,如何建立面向稀疏张量信号的高阶统计分析和处理机制,将多维虚拟域增广机理与张量模型进行有机结合,充分发掘多维稀疏阵列信号处理的潜在性能增益,是基础理论层面亟待解决的关键性难题。

(2) 在波达方向估计和波束成形的算法设计层面,虽然前述研究逐渐开始探索多维欠奈奎斯特采样模式以及相应的稀疏张量信号处理手段,但是它们大多是面向高效、低成本图像处理应用开展的。面向阵列应用的稀疏张量信号处理方法通常采用恢复处理一阶稀疏张量信号的策略,并没有涉及稀疏张量信号的高阶统计处理与虚拟域张量处理,在算法自由度、精度、分辨率等性能指标上仍有显著的提升空间。因此,如何在稀疏张量信号高阶统计处理框架下,发展高性能的稀疏阵列波达方向估计和波束成形方法,是算法设计层面的一个重要挑战。

(3) 在稀疏阵列张量信号处理的鲁棒性机理层面,复杂信号传播环境往往伴随着低信噪比、脉冲噪声、多径效应等非理想条件,对虚拟域处理所依赖的信号高阶统计模型的准确性表达造成负面影响。由于张量维度之间存在相互耦合关联,非理想条件对单一维度造成的干扰将牵涉其他维度,从而带来更为复杂的张量信号统计特性偏差。传统基于模型优化的阵列信号处理方法往往不能全面解决上述非理想条件的影响,存在明显的性能衰落。为此,在稀疏张量信号处理的背景下,如何设计具备非理想条件抵抗能力的鲁棒阵列信号处理方法,丰富稀疏阵列张量信号处理的理论体系,仍然是一个值得关注的问题。

近年来,研究者针对上述三方面挑战,开展了一系列面向结构化稀疏阵列张量信号处理的理论与方法研究,取得了相应的进展,有效突破了多维阵列信号处理的性能瓶颈,为满足新一代信息基础设施中高效系统部署、信源信息提取、鲁棒抗干扰等需求提供理论依据和技术支撑。本文以“理论基础—算法设计—鲁棒机理”为主线,针对这些最新研究进展的核心内容展开介绍,其逻辑关系如图3所示。具体而言,在理论基础层面,介绍面向稀疏张量信号的高阶统计处理理论,以求实现多维虚拟域上的奈奎斯特匹配处理和信源辨识能力优化;在算法设计层面,围绕阵列信号处理的两大基本问题,介绍基于虚拟域张量填充的稀疏阵列波达方向估计算法以及基于互质张量权重优化的稀疏阵列波束成形算法;在此基础上,在鲁棒机理层面,为了克服稀疏阵列张量信号处理在非理想条件下的性能衰落问题,介绍一种张量化稀疏神经网络架构,从数据驱动角度实现鲁棒稀疏张量信号处理。

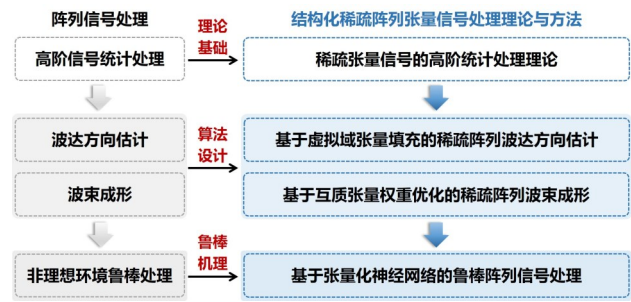


图3 结构化稀疏阵列张量信号处理的最新研究成果逻辑关系图

### 3 稀疏张量信号的高阶统计处理理论

稀疏阵列信号的高阶虚拟域统计处理是稀疏阵列信号处理理论的核心,也是利用稀疏感知提升系统性能的关键。对于张量信号模型而言,其中所蕴含的信号特征并不是低维度特征的简单排列和堆叠,而是具有矢量/矩阵所不具备的独特统计特性以及结构化关联性。相应地,多维虚拟域信号在张量空间的表征形式和处理方法亦具备由张量代数所带来的独特性质。为了形成面向稀疏张量信号的高阶统计处理理论,Zheng等人<sup>[119]</sup>面向多维稀疏阵列场景,构建多维欠奈奎斯特采样信号的普适性张量化表征形式;基于稀疏张量信号高阶统计量的维度变换,推导对应增广虚拟立体阵列的虚拟域张量,并建立虚拟域张量分解唯一性条件与信源辨识能力之间的关联关系;进而从信源辨识数量优化的角度,对虚拟域张量进行灵活重构,求解最优虚拟域张量CP模型所对应的最大信源辨识数量,并以此为理论基础实现欠定条件下的信源参数估计。

#### 3.1 稀疏阵列张量信号建模及其统计量推导

如图4所示,在 $xoy$ 平面上部署一个具备系统化稀疏结构的扩展型互质平面阵列 $\mathbb{P}$ <sup>[73]</sup>,作为典型稀疏阵列的一种实例。互质平面阵列 $\mathbb{P}$ 由2个稀疏平面子阵列 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{N}$ 组成。其中, $\mathbb{M}$ 包含 $2M_x \times 2M_y$ 个天线阵元,而 $\mathbb{N}$ 包含 $N_x \times N_y$ 个天线阵元。这里, $\{M_x, N_x\}$ 和 $\{M_y, N_y\}$ 分别为一对互质整数。子阵列 $\mathbb{M}$ 中天线阵元在 $x$ 轴和 $y$ 轴方向上的间隔分别为 $N_x d$ 和 $N_y d$ ,而子阵列 $\mathbb{N}$ 中天线阵元在 $x$ 轴和 $y$ 轴方向上的间隔分别为 $M_x d$ 和 $M_y d$ ,单位间隔 $d$ 为信号的半波长。由于2个稀疏平面子阵列的互质排布特点,它们的天线阵元仅在 $xyz$ 坐标系原点 $(0,0,0)$ 处重叠。因此,互质平面阵列 $\mathbb{P}$ 中天线阵元的数量为 $|\mathbb{P}| = 4M_x M_y + N_x N_y - 1$ 。

假设空间中有 $K$ 个信源的非相干远场窄带信号入射至互质平面阵列 $\mathbb{P}$ 上。第 $k$ 个信源入射信号的方位角和俯仰角分别表示为 $\theta_k \in [-\pi/2, \pi/2]$ 和 $\phi_k \in [-\pi/2, \pi/2], k = 1, 2, \dots, K$ 。在传统的矩阵信号模型中,互质平面阵列 $\mathbb{P}$ 在第 $t$ 个时刻的接收信号被表示

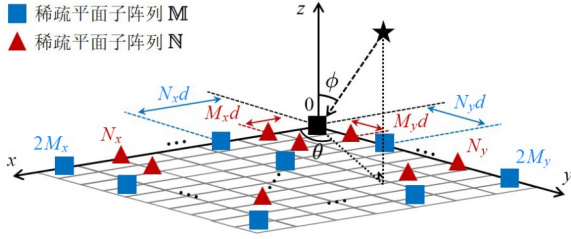


图4 互质平面阵列的结构示意图

为一个长矢量  $\mathbf{x}_p(t) = [\mathbf{x}_M(t), \mathbf{x}_N(t)] \in \mathbf{C}^{4M_x M_y + N_x N_y - 1}$ . 其中,  $\mathbf{x}_M(t) \in \mathbf{C}^{4M_x M_y}$  和  $\mathbf{x}_N(t) \in \mathbf{C}^{N_x N_y}$  分别为 2 个稀疏平面子阵列 M 和 N 在第  $t$  个时刻的接收信号. 进而, 互质平面阵列 P 的  $T$  个采样快拍信号可被堆叠为矩阵  $\mathbf{X}_p = [\mathbf{x}_p(1), \mathbf{x}_p(2), \dots, \mathbf{x}_p(T)] \in \mathbf{C}^{(4M_x M_y + N_x N_y) \times T}$ . 在此矩阵信号模型基础上, 利用传统稀疏信号的高阶统计处理方法计算  $\mathbf{X}_p$  的自相关协方差矩阵  $\mathbf{R}_p$ , 并通过矢量化该协方差矩阵推导相应的虚拟域信号, 进而引入空间平滑技术, 获取对应虚拟阵列的满秩虚拟域协方差矩阵<sup>[35]</sup>. 这样的处理方式破坏了多维稀疏阵列接收信号的原始结构, 在一个维度上对复杂的多维空间信息进行堆叠表征, 并且后续虚拟域信号处理过程也忽略了多维统计特征的结构化关联, 从根源上造成了性能损失.

为了解决上述问题, 对多维稀疏阵列信号进行张量化建模. 具体而言, 将 2 个稀疏平面子阵列 M 和 N 在第  $t$  个时刻的接收信号表示为 2 个矩阵:

$$\mathbf{X}_M(t) = \sum_{k=1}^K [\mathbf{a}_M(\mu_k) \otimes \mathbf{a}_M(v_k)] s_k(t) + \mathbf{N}_M(t) \in \mathbf{C}^{2M_x \times 2M_y} \quad (1)$$

$$\mathbf{X}_N(t) = \sum_{k=1}^K [\mathbf{a}_N(\mu_k) \otimes \mathbf{a}_N(v_k)] s_k(t) + \mathbf{N}_N(t) \in \mathbf{C}^{N_x \times N_y} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{a}_M(\mu_k) = [1, e^{-j\pi N_x \mu_k}, \dots, e^{-j\pi N_x (2M_x - 1) \mu_k}]^T$  和  $\mathbf{a}_M(v_k) = [1, e^{-j\pi N_y v_k}, \dots, e^{-j\pi N_y (2M_y - 1) v_k}]^T$  分别为 M 在  $x$  轴和  $y$  轴方向上对应第  $k$  个信源的导引矢量,  $\mathbf{a}_N(\mu_k) = [1, e^{-j\pi M_x \mu_k}, \dots, e^{-j\pi M_x (N_x - 1) \mu_k}]^T$  和  $\mathbf{a}_N(v_k) = [1, e^{-j\pi M_y v_k}, \dots, e^{-j\pi M_y (N_y - 1) v_k}]^T$  分别为 N 在  $x$  轴和  $y$  轴方向上对应第  $k$  个信源的导引矢量;  $\mu_k = \sin \phi_k \cos \theta_k$  和  $v_k = \sin \phi_k \sin \theta_k$  分别为相对于  $x$  轴和  $y$  轴的波达方向投影参

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}_{\{1,3\}\{2,4\}} = \sum_{k=1}^K \sigma_{s_k}^2 [\mathbf{a}_N^*(\mu_k) \otimes \mathbf{a}_M(\mu_k)] \circ [\mathbf{a}_N^*(v_k) \otimes \mathbf{a}_M(v_k)] + \tilde{\mathbf{N}} \quad (6)$$

其中,  $\sigma_{s_k}^2$  为第  $k$  个信源的信号功率,  $\mathbf{a}_N^*(\mu_k) \otimes \mathbf{a}_M(\mu_k)$  和  $\mathbf{a}_N^*(v_k) \otimes \mathbf{a}_M(v_k)$  分别在指数项上构成了差集数组, 即

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_x &= \{m_x N_x - n_x M_x \mid m_x = 0, 1, \dots, 2M_x - 1, n_x = 0, 1, \dots, N_x - 1\} \\ \mathbb{V}_y &= \{m_y N_y - n_y M_y \mid m_y = 0, 1, \dots, 2M_y - 1, n_y = 0, 1, \dots, N_y - 1\} \end{aligned} \quad (7)$$

数;  $s_k(t)$  为第  $k$  个信源在第  $t$  个时刻的信号波形,  $t = 1, 2, \dots, T$ ,  $T$  为采样快拍数;  $\mathbf{N}_M(t), \mathbf{N}_N(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{J})$  为独立同分布的高斯白噪声,  $\sigma_n^2$  为噪声功率;  $j$  为虚数单位,  $\circ$  表示外积操作. 进而, 将 M 和 N 的  $T$  个采样快拍信号分别在时间维度上进行叠加, 得到 2 个三维稀疏张量信号, 表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_M &= [\mathbf{X}_M(1), \mathbf{X}_M(2), \dots, \mathbf{X}_M(T)]_{\cup_3} \in \mathbf{C}^{2M_x \times 2M_y \times T} \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_M(\mu_k) \circ \mathbf{a}_M(v_k) \circ \mathbf{s}_k + \mathcal{N}_M \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_N &= [\mathbf{X}_N(1), \mathbf{X}_N(2), \dots, \mathbf{X}_N(T)]_{\cup_3} \in \mathbf{C}^{N_x \times N_y \times T} \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_N(\mu_k) \circ \mathbf{a}_N(v_k) \circ \mathbf{s}_k + \mathcal{N}_N \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{s}_k = [s_k(1), s_k(2), \dots, s_k(T)]^T$  为第  $k$  个信源的多快拍采样信号波形.

与传统矩阵信号模型不同的是, 稀疏张量信号模型(3)和(4)能够反映每个时刻接收信号的二维空间属性. 正因如此, 2 个稀疏张量信号  $\mathcal{X}_M$  和  $\mathcal{X}_N$  具备与 2 个稀疏平面子阵列 M 和 N 相匹配的特有结构, 无法在时间维度方向上进行堆叠. 因此, 传统的信号自相关统计方式不适用于稀疏张量信号模型. 为了推导稀疏张量信号的高阶统计量, 计算得到稀疏张量信号  $\mathcal{X}_M$  和  $\mathcal{X}_N$  的四维互相关张量:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}} &= \mathbf{E} \{ \mathbf{X}_M(t) \circ \mathbf{X}_N^*(t) \} \\ &= \sum_{k=1}^K \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}_M(\mu_k) \circ \mathbf{a}_M(v_k) \circ \mathbf{a}_N^*(\mu_k) \circ \mathbf{a}_N^*(v_k) + \tilde{\mathbf{N}} \\ &\in \mathbf{C}^{2M_x \times 2M_y \times N_x \times N_y} \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{N}}$  为互相关噪声张量. 互相关张量  $\tilde{\mathbf{R}}$  中涵盖了 2 个稀疏平面子阵列在  $x$  轴和  $y$  轴方向的导引矢量, 是后续构造增广虚拟阵列及其对应虚拟域张量模型的基础.

### 3.2 基于虚拟域张量重构的信源辨识数量优化与欠定参数估计

根据虚拟域信号的推导原理, 2 个稀疏平面子阵列在同一坐标轴方向上导引矢量的 Kronecker 积能够构造出增广差集数组; 对  $\tilde{\mathbf{R}}$  的第一、三维度以及第二、四维度分别进行合并, 以形成对应同一坐标轴方向导引矢量的 Kronecker 积, 获取对应  $\mathbb{V}$  的等价虚拟域信号, 即

这 2 个差集数组对应了增广虚拟平面阵列  $V = \{(x_v, y_v) | x_v = V_x d, y_v = V_y d\}$  在  $x$  轴和  $y$  轴方向上的虚拟阵元坐标.

值得注意的是,如图 5(a)所示,大小为  $\tilde{J}_x \times \tilde{J}_y$  的虚拟平面阵列  $V$  是非连续的,即存在成行成列的孔洞,而  $V$  中包含了一个大小为  $J_x \times J_y$  的虚拟均匀平面阵列  $U$ . 因此,提取  $\tilde{\mathbf{R}}$  中的元素并进行排列,得到对应虚拟均匀

平面阵列  $U$  的虚拟域信号  $U$ ,能够实现虚拟域上的奈奎斯特匹配处理. 对于由互相关张量  $\tilde{\mathbf{R}}$  维度合并操作推导而来的虚拟均匀平面阵列  $U$ ,它不关于坐标轴对称. 为了充分扩展虚拟阵列孔径,利用基于互相关张量的共轭统计量构建出  $U$  的镜像部分  $U_{\text{sym}}$ ,并推导其对应的虚拟域信号;进而,叠加虚拟均匀平面阵列  $U$  及其镜像部分  $U_{\text{sym}}$ ,得到一个具备三维孔径的虚拟均匀立体阵列  $Q$ ,相应地构建其对应的虚拟域张量  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{J_x \times J_y \times 2}$ .

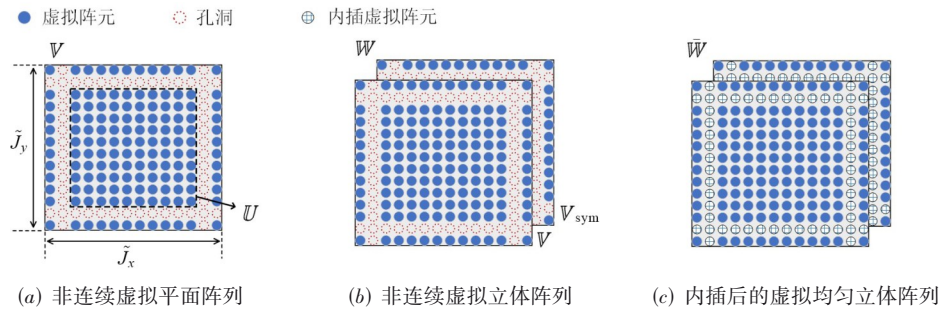


图 5 增广虚拟阵列的结构示意图

文献[119]通过分析虚拟域张量的 CP 分解唯一性条件,求解虚拟域张量 CP 模型所对应的最大信源辨识数量(即算法的自由度),从而剖析虚拟域张量分解唯一性条件与信源辨识能力间的关联性. 通过分析可知,虚拟域张量 CP 分解的最大信源辨识数量与其 CP 因子矩阵的 Kruskal 秩之和相关,而在此限制下,直接分解虚拟域张量  $\mathbf{U}$  所对应的最大信源辨识数量为  $\min(J_x, J_y)$ ,无法超过物理天线阵元数量. 得益于张量模型的可拓展、可重构特性,文献[119]从最大化信源辨识数量的角度出发,提出了一种基于空域类别信息合并的虚拟域张量重构方法. 该方法的思路在于:对虚拟域张量  $\mathbf{U}$  进行平移分割与维度拓展,分析平移分割窗口大小的优化区间;以此为基础,合并虚拟域张量的拓展维度并求解关于平移分割窗口大小的优化问题,构建出内嵌空间 Kronecker 因子的最优虚拟域张量 CP 模型;由于该模型所对应 CP 因子矩阵的 Kruskal 秩之和更高,相应的参数估计算法具备更强的信源辨识能力.

由此,通过求解最优虚拟域张量 CP 模型所对应的 CP 分解唯一性条件,得到信源辨识数量的理论上限为  $\lceil \min(J_x, J_y) (\max(J_x, J_y) + 2) \rceil / 4$ ,超过了互质平面阵列  $\mathbb{P}$  的物理天线阵元数量. 这意味着,通过对该虚拟域张量进行 CP 分解,从 Kronecker 因子中提取波达方向等信息,能够实现欠定条件下的空间信源参数估计. 在部署包含 35 阵元的互质平面阵列  $\mathbb{P}$  条件下,上述虚拟域张量处理方法所能辨识的最大信源数量为 50 个. 如图 6 所示,该方法能够对 50 个信源的波达方向参数进行有效估计,从而验证了其在欠定条件下的信源参数

估计能力.

综上所述,面向稀疏张量信号的高阶统计处理是关联稀疏张量信号模型与多维虚拟域处理的关键,能够保障稀疏张量信号处理的奈奎斯特匹配和信源辨识数量优化,为后续设计基于稀疏张量信号统计模型的波达方向估计和波束成形算法奠定了理论基础.

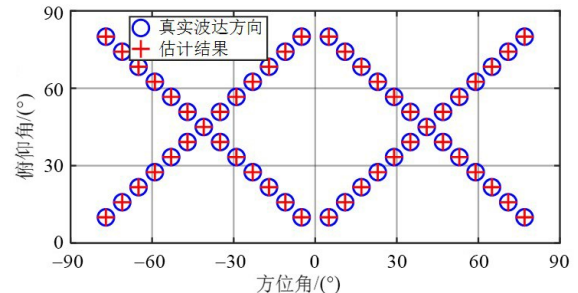


图 6 虚拟域张量分解的欠定参数估计性能

#### 4 基于虚拟域张量填充的稀疏阵列波达方向估计

波达方向估计能够获取信源的空间方位信息,在无线通信、雷达、射电天文等重要领域均有广泛应用. 上述工作推导出增广非连续虚拟平面阵列  $V$ ,并通过处理其中虚拟均匀平面阵列  $U$  所对应的虚拟域张量,为稀疏阵列的信源辨识和参数估计提供了显著的性能增益. 然而,该处理方法仅利用了非连续虚拟阵列中的连续部分,损失了一部分非连续的虚拟域统计信息,在实现波达方向估计方面仍存在一定的性能提升空间. 为此,在稀疏张量信号的高阶统计处理理论上,探究

非连续虚拟立体阵列所对应虚拟域张量的填充策略,有望利用全部的多维虚拟阵列信息,实现更高性能的稀疏阵列波达方向估计.

与低秩矩阵填充相似,低秩张量填充以张量信号中缺失元素的离散化分布为前提,利用缺失元素与相邻已知元素之间的相关性对缺失元素进行估计<sup>[120,121]</sup>,通常用于恢复包含随机缺失像素的多通道图像张量<sup>[122]</sup>.然而,由于非连续虚拟平面阵列 $\mathbb{V}$ 中包含了成片孔洞,其对应的虚拟域张量中存在成片缺失元素,无法在低秩约束条件下得到有效填充.近年来,国内外研究者开始关注规则化缺失数据的恢复问题.例如,为了填充包含成片缺失像素的图像张量,基于空间内嵌的张量填充方法利用空间元素多重内嵌的 Tucker 模型或者张量链模型重建出完整图像的张量信号<sup>[123,124]</sup>.然而,该方法并不匹配虚拟域张量的 CP 模型,且其中涉及的空间内嵌与张量秩遍历操作带来了极大计算复杂度,并不适用于波达方向估计场景.为了解决虚拟域张量处理的非连续信息损失问题,Zheng 等人<sup>[125,126]</sup>提出

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mu_k) = \left[ e^{-j\pi(-M_x N_x + M_x)\mu_k}, e^{-j\pi(-M_x N_x + M_x + 1)\mu_k}, \dots, e^{-j\pi(2M_x N_x - N_x)\mu_k} \right]^T \circledast \mathbf{e}_x \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}(v_k) = \left[ e^{-j\pi(-M_y N_y + M_y)v_k}, e^{-j\pi(-M_y N_y + M_y + 1)v_k}, \dots, e^{-j\pi(2M_y N_y - N_y)v_k} \right]^T \circledast \mathbf{e}_y \quad (10)$$

它们分别等价于 $\mathbb{W}$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴方向上对应第 $k$ 个信源的索引矢量, $\mathbf{e}_x$ 和 $\mathbf{e}_y$ 分别为 $x$ 轴和 $y$ 轴方向上虚拟阵元的索引矢量,即它们在对应虚拟阵元的位置上数值为1,而在对应孔洞的位置上数值为0;有

$$\tilde{\mathbf{l}}_k = \left[ \mathbf{1}, e^{-j\pi(-(M_x N_x + M_x + N_x)\mu_k - (M_y N_y + M_y + N_y)v_k)} \right]^T \quad (11)$$

$\tilde{\mathbf{l}}_k$ 为镜像因子矢量,且 $\tilde{\mathbf{Z}}$ 是对应的噪声功率张量.

为了对虚拟域张量 $\tilde{\mathbf{U}}$ 施加有效低秩约束,文献[125]对其中的成片缺失元素进行最优化离散,构造出具备最优缺失元素离散分布且充分满足低秩约束的结构化虚拟域张量,并相应地设计结构化虚拟域张量核范数最小化问题,求解出结构化虚拟域张量的填充结果.具体而言,虚拟域张量成片缺失元素的最优化离散方法包括3个步骤:非完整虚拟域张量分割、结构化虚拟域张量构造以及虚拟域张量平移分割窗口大小优化.首先,利用大小为 $P_x \times P_y$ 的窗口,从 $\tilde{\mathbf{U}}$ 中分割出 $L_x \times L_y$ 个虚拟域子张量,即

$$\tilde{\mathbf{U}}_{l_x, l_y} = \tilde{\mathbf{U}}_{(1+l_x:P_x+l_x, 1+l_y:P_y+l_y, 1:2)} \in \mathbf{C}^{P_x \times P_y \times 2} \quad (12)$$

其中, $l_x = 1, 2, \dots, L_x$ ;  $l_y = 1, 2, \dots, L_y$ .进而对虚拟域子张量进行有序叠加与维度合并,在此过程中充分离散缺失元素,得到一个三维结构化虚拟域张量:

$$\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{T}}_{\{1,2\}\{4,5\}\{3\}} \in \mathbf{C}^{P_x P_y \times L_x L_y \times 2} \quad (13)$$

对于该结构化虚拟域张量,文献[125]给出理论分析,证明其中的缺失元素不再集中于某个切片上.

了虚拟域张量的成片缺失元素填充方法,以充分利用全部虚拟域张量统计信息,进一步提升稀疏阵列波达方向估计的精度、分辨率等性能指标.

#### 4.1 虚拟域张量成片缺失元素的最优化离散

相比于虚拟均匀平面阵列 $\mathbb{U}$ ,非连续虚拟平面阵列 $\mathbb{V}$ 具备更大孔径,表示为 $\tilde{\mathbf{J}}_x \times \tilde{\mathbf{J}}_y$ ,其中 $\tilde{\mathbf{J}}_x = 3M_x N_x - M_x - N_x + 1$ ,  $\tilde{\mathbf{J}}_y = 3M_y N_y - M_y - N_y + 1$ .根据3.2小节的多维虚拟阵列构建过程,推导出非连续虚拟平面阵列 $\mathbb{V}$ 及其对应的镜像部分 $\mathbb{V}_{\text{sym}}$ ,将它们进行叠加,得到一个含有成片孔洞的非连续虚拟立体阵列 $\mathbb{W}$ ,如图5(b)所示,其大小为 $\tilde{\mathbf{J}}_x \times \tilde{\mathbf{J}}_y \times 2$ .相应地,通过抽取并排列(6)式中互相关矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$ 及其共轭矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}^*$ 中的元素,分别得到对应 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{V}_{\text{sym}}$ 的等价虚拟域信号 $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{J}}_x \times \tilde{\mathbf{J}}_y}$ 和 $\tilde{\mathbf{U}}_{\text{sym}} \in \mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{J}}_x \times \tilde{\mathbf{J}}_y}$ .进而,将 $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{J}}_x \times \tilde{\mathbf{J}}_y}$ 和 $\tilde{\mathbf{U}}_{\text{sym}} \in \mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{J}}_x \times \tilde{\mathbf{J}}_y}$ 在第三维度进行叠加,得到对应 $\mathbb{W}$ 的虚拟域张量,表示为

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{k=1}^K \sigma_{s_k}^2 \tilde{\mathbf{b}}(\mu_k) \circ \tilde{\mathbf{b}}(v_k) \circ \tilde{\mathbf{l}}_k + \tilde{\mathbf{Z}} \in \mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{J}}_x \times \tilde{\mathbf{J}}_y \times 2} \quad (8)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mu_k) = \left[ e^{-j\pi(-M_x N_x + M_x)\mu_k}, e^{-j\pi(-M_x N_x + M_x + 1)\mu_k}, \dots, e^{-j\pi(2M_x N_x - N_x)\mu_k} \right]^T \circledast \mathbf{e}_x \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}(v_k) = \left[ e^{-j\pi(-M_y N_y + M_y)v_k}, e^{-j\pi(-M_y N_y + M_y + 1)v_k}, \dots, e^{-j\pi(2M_y N_y - N_y)v_k} \right]^T \circledast \mathbf{e}_y \quad (10)$$

为了保障良好的虚拟域张量填充效果,文献[125]定义缺失元素离散程度含量比(Dispersion-to-Percentage Ratio, DPR),作为衡量结构化虚拟域张量中缺失元素分布情况的量化指标,并以最大化DPR为目标,设计虚拟域张量平移分割窗口大小的优化问题,对结构化虚拟域张量 $\mathbf{D}$ 中缺失元素的离散分布情况进行优化,以获取最优的结构化虚拟域张量CP模型.

#### 4.2 基于结构化虚拟域张量填充的波达方向估计

针对缺失元素充分离散的结构化虚拟域张量 $\mathbf{D}$ ,引入张量秩函数的最紧松弛函数,即张量核范数<sup>[127]</sup>,作为优化目标函数,设计结构化虚拟域张量的核范数最小化问题:

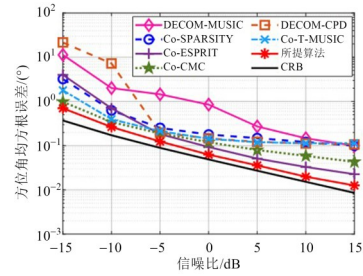
$$\min_{\bar{\mathbf{D}}} \|\bar{\mathbf{D}}\|_* \quad \text{s.t. } P_{\bar{\Omega}}(\bar{\mathbf{D}}) = P_{\bar{\Omega}}(\mathbf{D}) \quad (14)$$

其中, $\bar{\mathbf{D}}$ 为填充后的虚拟域张量, $\bar{\Omega}$ 为结构化虚拟域张量 $\mathbf{D}$ 中已知元素的位置索引, $\|\cdot\|_*$ 为核范数,且投影函数 $P_{\bar{\Omega}}(\cdot)$ 保证填充前后结构化虚拟域张量中的已知元素保持不变.为了保障该优化问题能够高效、稳健地求解,文献[125]利用交替方向乘法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)优化得到虚拟域张量的填充结果 $\bar{\mathbf{D}}$ ,对应构建出一个内插后的虚拟均匀立体阵列 $\bar{\mathbb{W}}$ ,如图5(c)所示,并理论证明该求解过程的全局收敛性.通过推导填充后结构化虚拟域张量 $\mathbf{D}$ 的CP模型表达式,并对其进行CP分解,即可获取波达方向

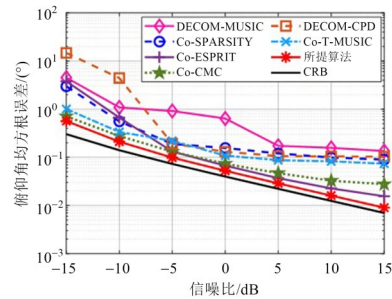
估计的闭式解。

以俯仰角和方位角估计的均方根误差(Root-Mean-Squared Error, RMSE)为性能量化指标,对比基于虚拟域张量填充的波达方向估计算法与其他稀疏阵列波达方向估计方法的估计精度,如图7所示。同时,绘制克拉美罗界(Cramér-Rao Bound, CRB)曲线<sup>[36,128]</sup>,作为稀疏阵列波达方向估计的理论性能极限。如表1所列,对比方法包括:基于子阵分解的多重信号分类法(DECOMposed subarray-based Multiple Signal Classification, DECOM-MUSIC)<sup>[72]</sup>,虚拟域稀疏恢复方法(Coarray Sparsity, Co-SPARSITY)<sup>[129,130]</sup>,虚拟域旋转因子不变法(Coarray-based Estimation of Signal Parameters using Rotational Invariance Techniques, Co-ESPRIT)<sup>[80]</sup>,虚拟域协方差矩阵填充方法(Coarray Covariance Matrix Completion, Co-CMC)<sup>[81]</sup>,基于子阵分解的CP分解法(DECOMposed subarray-based Canonical Polyadic Decomposition, DECOM-CPD)<sup>[131]</sup>,以及虚拟域张量多重信号分类法(Coarray Tensor-based Multiple Signal Classification, Co-T-MUSIC)<sup>[113]</sup>。其中,DECOM-MUSIC和DECOM-CPD方法分别将稀疏子阵分解的解模糊思想与MUSIC和ESPRIT方法相结合;Co-SPARSITY和Co-ESPRIT方法分别采用稀疏恢复方法和ESPRIT方法对矢量化虚拟域信号对应的协方差矩阵进行处理,而Co-T-MUSIC方法则融合了虚拟域张量处理与MUSIC方法。然而,Co-SPARSITY、Co-ESPRIT以及Co-T-MUSIC这3种方法仍然只利用了增广虚拟阵列的连续部分。相较之下,Co-CMC方法通过填充对应非连续虚拟阵列的非完整虚拟域协方差矩阵,利用了全部的虚拟域统计信息。

从图7可看出,DECOM-MUSIC和DECOM-CPD方法的精度性能受限于2个稀疏子阵列的物理孔径,且子阵参数匹配过程对噪声影响的适应性差,在低信噪比区间存在明显的性能衰落现象。相较之下,Co-SPARSITY和Co-ESPRIT方法对矢量化虚拟域信号进行处理,利用了增广虚拟阵列孔径,因此它们的波达方向估计精度高于DECOM-MUSIC方法的估计精度;



(a) 方位角均方根误差随信噪比变化曲线



(b) 俯仰角均方根误差随信噪比变化曲线

图7 波达方向估计精度性能对比图

类似地,Co-T-MUSIC方法通过设计虚拟域张量的空间谱估计与搜索策略,获得比DECOM-CPD方法更高的估计精度。然而,这些方法均没有利用到全部的非连续虚拟域统计信息,而Co-CMC方法在矢量化虚拟域信号处理的基础上,引入协方差矩阵填充实现对全部虚拟域统计信息的有效利用,进一步提高了估计精度。值得注意的是,对于DECOM-MUSIC、Co-T-MUSIC以及Co-SPARSITY等需要预定义角度参数网格点的方法而言,它们的估计误差不会随信噪比的增加持续下降,而是受限于网格点间隔,逐渐趋向一个恒定值。与这些方法相比,基于虚拟域张量填充的稀疏阵列波达方向估计算法通过对虚拟域张量的成片缺失元素进行有效填充,解决了非连续虚拟域张量统计信息难以被完全利用的问题,并且推导出了二维波达方向估计的闭式解,因此其具备最好的估计精度性能,对应的RMSE曲线始终逼近理论性能下界CRB。

表1 稀疏阵列波达方向估计方法对比

方法	是否推导虚拟域	是否利用全部虚拟域信息	是否具有闭式解	是否采用张量信号建模
DECOM-MUSIC	否	—	否	否
Co-SPARSITY	是	否	否	否
Co-ESPRIT	是	否	是	否
Co-CMC	是	是	否	否
DECOM-CPD	否	—	否	是
Co-T-MUSIC	是	否	否	是
虚拟域张量填充	是	是	是	是

## 5 基于互质张量权重优化的稀疏阵列波束成形

波束成形作为阵列信号处理的另一个基本问题,常被应用于提高无线传输质量、降低信道干扰以及增强目标感知能力.相比于均匀阵列,稀疏阵列能够提供更大的物理阵列孔径,从而带来更为尖锐的波束主瓣和更高的输出 SINR.如 2.2 节所述,随着一维阵列向多维阵列拓展,基于张量模型的波束成形器能够提供更为精准、高效的波束控制,而现有张量波束成形器大多仍是面向均匀阵列设计的,并不适用于多维稀疏阵列.对于多维欠奈奎斯特采样信号而言,波束成形权重在信号波达方向上的响应存在模糊性,即波束成形的空域混叠问题,从而在波束方向图上生成规律性的虚峰.这些虚峰的强度接近波束主瓣的强度,严重影响系统的波束成形性能.

针对上述问题,Zheng 等人<sup>[132-134]</sup>设计面向稀疏张量信号模型的结构化空域滤波准则,并利用多维稀疏阵列子阵列的互质排布特点,引入互质张量权重的联合约束条件以克服空域混叠影响,实现了不受虚峰影响且具备更高输出 SINR 的稀疏阵列波束成形.

### 5.1 稀疏张量波束成形的权重优化准则

部署互质平面阵列  $\mathbb{P}$  实现空间信号的多维欠奈奎斯特采样,进而设计波束成形器以增强期望方向信号,抑制干扰与噪声.不同的是,本节采用非扩展型互质阵列结构作为典型实例,即构成互质平面阵列  $\mathbb{P}$  的 2 个稀疏平面子阵列  $\mathbb{M}$  和  $\mathbb{N}$  分别由  $M_x \times M_y$  和  $N_x \times N_y$  个天线阵元组成,但所提算法可被拓展至其他类型互质阵列,包括扩展型互质阵列、嵌套阵列等.

假设空间中存在  $(K+1)$  个信源,其中一个期望信源来自方向  $(\theta_s, \phi_s)$ ,而其他  $K$  个干扰信源来自方向  $(\theta_k, \phi_k), k=1, 2, \dots, K$ .  $\theta_s, \phi_s \in [-\pi/2, \pi/2]$  分别为期望信源的方位角和俯仰角,而  $\theta_k, \phi_k \in [-\pi/2, \pi/2]$  分别为第  $k$  个干扰信源的方位角和俯仰角.为了保留多维欠奈奎斯特采样信号的原始结构,并设计与信号结构相匹配的结构化空域滤波形式,以稀疏张量信号模型为基础,相应地设计有效的稀疏张量波束成形权重优化准则.具体而言,2 个稀疏平面子阵列  $\mathbb{M}$  和  $\mathbb{N}$  在第  $t$  个时刻的接收信号可建模为 2 个矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\mathbb{M}}(t) &= \mathbf{S}_{\mathbb{M}}(t) + \mathbf{I}_{\mathbb{M}}(t) + \mathbf{N}_{\mathbb{M}}(t) \in \mathbf{C}^{M_x \times M_y} \\ \mathbf{X}_{\mathbb{N}}(t) &= \mathbf{S}_{\mathbb{N}}(t) + \mathbf{I}_{\mathbb{N}}(t) + \mathbf{N}_{\mathbb{N}}(t) \in \mathbf{C}^{N_x \times N_y} \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{S}_{\mathbb{M}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbb{M}}(\mu_s, \nu_s) s_s(t)$  和  $\mathbf{S}_{\mathbb{N}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbb{N}}(\mu_s, \nu_s) s_s(t)$  分别为  $\mathbb{M}$  和  $\mathbb{N}$  上期望信源的入射信号,  $\mathbf{I}_{\mathbb{M}}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_{\mathbb{M}}(\mu_k, \nu_k) s_k(t)$  和  $\mathbf{I}_{\mathbb{N}}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_{\mathbb{N}}(\mu_k, \nu_k) s_k(t)$  分别

为  $\mathbb{M}$  和  $\mathbb{N}$  上干扰信源的入射信号,且  $\mathbf{N}_{\mathbb{M}}(t), \mathbf{N}_{\mathbb{N}}(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{J})$  为独立同分布的高斯白噪声.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbb{M}}(\mu_s, \nu_s) &= \mathbf{a}_{\mathbb{M}}(\mu_s) \circ \mathbf{a}_{\mathbb{M}}(\nu_s) \in \mathbf{C}^{M_x \times M_y} \\ \mathbf{A}_{\mathbb{N}}(\mu_s, \nu_s) &= \mathbf{a}_{\mathbb{N}}(\mu_s) \circ \mathbf{a}_{\mathbb{N}}(\nu_s) \in \mathbf{C}^{N_x \times N_y} \end{aligned} \quad (16)$$

以上为对应期望信源波达方向的导引矩阵,分别反映了稀疏平面子阵列  $\mathbb{M}$  和  $\mathbb{N}$  的空间结构属性.

将 2 个稀疏平面子阵列  $\mathbb{M}$  和  $\mathbb{N}$  的  $T$  个采样快拍信号  $\{\mathbf{X}_{\mathbb{M}}(t), t=1, 2, \dots, T\}$  和  $\{\mathbf{X}_{\mathbb{N}}(t), t=1, 2, \dots, T\}$  分别第 3 个维度进行叠加,得到 2 个稀疏张量信号  $\mathcal{X}_{\mathbb{M}} \in \mathbf{C}^{M_x \times M_y \times T}$  和  $\mathcal{X}_{\mathbb{N}} \in \mathbf{C}^{N_x \times N_y \times T}$ .针对这 2 个稀疏张量信号,文献[132]设计与其结构相匹配的权重对其进行张量化加权,进而提出稀疏张量波束成形权重优化方法,实现高性能稀疏阵列波束成形输出.具体而言,由于稀疏张量信号模型充分考虑了稀疏平面子阵列的空域采样结构性,稀疏张量信号  $\mathcal{X}_{\mathbb{M}}$  和  $\mathcal{X}_{\mathbb{N}}$  的大小不同,无法被堆叠成一个整体张量.因此,需要设计 2 个独立的张量权重  $\mathbf{W}_{\mathbb{M}} \in \mathbf{C}^{M_x \times M_y}$  和  $\mathbf{W}_{\mathbb{N}} \in \mathbf{C}^{N_x \times N_y}$ ,对第  $t$  个时刻的信号矩阵  $\mathbf{X}_{\mathbb{M}}(t)$  和  $\mathbf{X}_{\mathbb{N}}(t)$  分别开展空域滤波.这 2 个权重在  $x$  轴和  $y$  轴方向上的大小关系均具备互质特点.基于张量内积操作,定义 2 个稀疏平面子阵列的输出信号  $y_{\mathbb{M}}(t) = \langle \mathbf{W}_{\mathbb{M}}^*, \mathbf{X}_{\mathbb{M}}(t) \rangle$  和  $y_{\mathbb{N}}(t) = \langle \mathbf{W}_{\mathbb{N}}^*, \mathbf{X}_{\mathbb{N}}(t) \rangle$ .此时,如果对 2 个权重  $\mathbf{W}_{\mathbb{M}}$  和  $\mathbf{W}_{\mathbb{N}}$  进行独立优化,则分别得到 2 个稀疏平面子阵列的张量波束成形输出信号和对应的波束方向图.但是,由于稀疏平面子阵列中天线的稀疏排布特点,两个独立优化问题约束条件中的期望信源波达方向响应会各自产生空域混叠,即存在模糊波达方向,在导引矩阵相位上规律性地产生相同的响应,从而在波束方向图中生成除了主瓣以外的虚峰,且虚峰与主瓣的强度相近.

为了克服由天线阵元稀疏排布所带来的虚峰影响,文献[132]利用张量权重的多重线性投影性质,将质数分解唯一性定理在张量空间进行推广,并以此为基础,理论证明了互质张量权重的联合约束条件能够有效消除期望信源波束响应的模糊性.进而,通过设计并求解张量权重  $\mathbf{W}_{\mathbb{M}}$  和  $\mathbf{W}_{\mathbb{N}}$  的联合优化问题,能够在尖锐化主瓣的前提下保障较低的旁瓣水平.

### 5.2 基于互质张量权重全局联合优化求解的波束成形

基于上述分析,文献[132]提出了基于互质约束的稀疏张量权重联合优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}_{\mathbb{M}}, \mathbf{W}_{\mathbb{N}}} & \quad |y_{\mathbb{P}}(t)|^2 \\ \text{s.t.} & \quad \langle \mathbf{W}_{\mathbb{M}}^*, \mathbf{A}_{\mathbb{M}}(\mu_s, \nu_s) \rangle = 1 \\ & \quad \langle \mathbf{W}_{\mathbb{N}}^*, \mathbf{A}_{\mathbb{N}}(\mu_s, \nu_s) \rangle = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

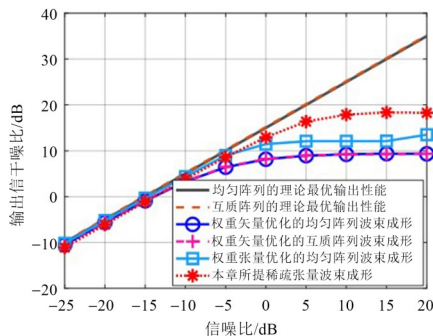
其中,  $y_p(t) = (y_M(t) + y_N(t))/2$  为稀疏张量波束成形器的输出信号. 进而, 从张量权重的可分解性质出发, 由原始优化问题构造出一对相互耦合的波束成形子权重优化问题, 提出了子问题的目标函数松弛与交替最小化求解方法, 并理论证明了该算法的全局收敛性. 由此, 获得了稀疏张量波束成形权重的全局最优解, 能够对稀疏张量信号进行有效抵抗空域混叠的结构化空域滤波输出.

进而, 通过仿真测试所提稀疏张量波束成形器的

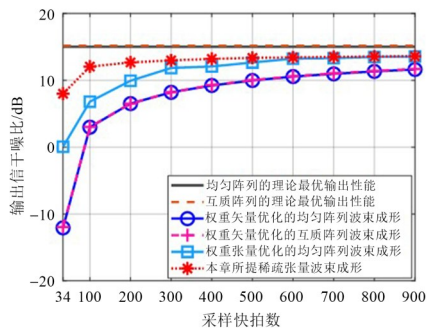
收敛性能和优化问题求解方法性能, 并对比该波束成形器与其他波束成形器的波束方向图、输出 SINR 以及计算复杂度等性能, 综合验证了所提算法的有效性和性能优越性. 如表 2 所列, 具体涉及的对比方法包括: 基于权重矢量优化的均匀阵列波束成形器, 基于权重矢量优化的互质阵列波束成形器以及基于张量权重优化的均匀阵列波束成形器. 这些对比方法均是采用 MVDR 这一准则<sup>[135]</sup>, 针对不同的信号模型优化相应的波束成形权重. 其中, 图 8 展示了输出 SINR 性能.

表 2 波束成形方法对比

方法	采用准则	阵列结构	物理孔径	是否具备虚峰消除能力	是否采用张量信号建模
基于权重矢量优化的均匀阵列波束成形器	MVDR	包含 33 阵元的均匀平面阵列	较小	—	否
基于权重张量优化的均匀阵列波束成形器	张量 MVDR	包含 33 阵元的均匀平面阵列	较小	—	是
基于权重矢量优化的互质阵列波束成形器	MVDR	包含 33 阵元的互质平面阵列	较大	否	否
稀疏张量波束成形器	基于互质联合优化的张量 MVDR	包含 33 阵元的互质平面阵列	较大	是	是



(a) 输出 SINR 随信噪比变化曲线



(b) 输出 SINR 随采样快拍数变化曲线

图 8 输出 SINR 性能对比

结合图 8 与表 2 可看出, 相比于传统基于权重矢量优化的波束成形器, 面向均匀阵列的张量波束成形器表现出更好的输出 SINR 性能, 从而说明了结合张量信号模型和结构化空域滤波策略带来的输出性能增益. 在此基础上, 所提稀疏张量波束成形器充分发挥了多

维稀疏阵列结构和张量化空域滤波的联合优势, 在利用更大物理孔径的同时消除了空域混叠影响, 进一步提升了输出 SINR, 其 SINR 曲线在所有仿真场景中均更加贴近理论最优的 SINR 极限. 当信噪比在 5~20 dB 时, 相比基于权重矢量优化的波束成形器而言, 稀疏张量波束成形器的输出 SINR 提高了 8 dB, 而相比面向均匀阵列的张量波束成形器而言, 稀疏张量波束成形器的输出 SINR 提高了 5 dB. 该结果说明: 稀疏张量波束成形器基于张量信号结构化空域滤波的原理, 匹配多维稀疏阵列的空间结构特点, 兼具良好收敛性能和抗混叠能力, 为实现高性能多维信号增强与环境干扰抑制提供了方法支撑.

## 6 基于张量化神经网络的鲁棒阵列信号处理

随着新一代信息化基础设施建设的持续发展, 电磁波信号的传播环境趋向复杂化, 通常存在背景噪声大、干扰强、多径效应明显等问题. 前述章节介绍了面向稀疏张量信号高阶统计模型的优化算法(如虚拟域张量分解、虚拟域张量填充、稀疏张量权重优化等), 实现了稀疏阵列波达方向估计和波束成形. 它们在本质上是模型驱动的方法, 与子空间分解、稀疏恢复等矩阵统计模型优化方法类似, 均要求相对准确、稳定的信号高阶统计特性(一般需要假定远场、窄带、非相关、信噪比相对较高等信号条件). 低信噪比、非高斯噪声以及有色信号等非理想条件会带来明显的统计特性偏差, 造成子空间提取失准、稀疏约束失效等影响<sup>[136,137]</sup>. 高阶虚拟域信号处理对于这类负面影响更为敏感, 存在难以避免的性能衰落问题.

为了应对上述挑战,神经网络模拟人脑神经元的行为特征进行分布式并行信息学习与处理,能够更好地捕捉深层次信号特征,展现出了对多径效应<sup>[138]</sup>、低信噪比<sup>[139]</sup>以及信号幅相误差<sup>[140]</sup>等非理想条件的抵抗能力,实现了更加鲁棒的波达方向估计<sup>[141]</sup>和波束成形<sup>[142, 143]</sup>. 然而,这些面向阵列信号处理的神经网络将输入端多维接收信号进行矢量化处理,利用网络层的权重矩阵对其进行线性加权输出,因而导致输出状态的无结构与无序性. 由此可知,其网络层待训练权重的规模与输入信号统计量的规模呈线性正相关;当信号规模增长时,待训练权重的规模同步快速增长,导致网络训练开销庞大、训练效率低下等问题. 针对该问题,研究者开始关注资源集约(Cost-efficient)的神经网络架构<sup>[144]</sup>. 在阵列信号处理领域,Zheng 等人<sup>[145, 146]</sup>率先将张量代数工具引入神经网络架构设计,提出了一种面向鲁棒波达方向估计的张量化神经网络,使其兼备训练高效性和输出鲁棒性.

### 6.1 基于张量化神经网络的鲁棒波达方向估计

文献<sup>[146]</sup>匹配神经网络输入端多维阵列信号统计量与神经网络层输出状态空间的张量化结构,剖析从输入端协方差张量到状态空间张量的多重线性映射关联,提出基于逆低秩张量分解的张量信号统计特征前向传播方法,从而压缩网络层的大规模待训练权重,高效输出鲁棒阵列信号处理结果.

考虑大小为  $I_x \times I_y$  的均匀平面阵列  $S$ , 并将其在  $T$  个快拍的接收信号表示为三维张量:

$$\mathcal{X}_S = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_S(\mu_k) \circ \mathbf{a}_S(\nu_k) \circ \mathbf{s}_k + \mathcal{N}_S \in \mathbf{C}^{I_x \times I_y \times T} \quad (18)$$

其中,  $\mathbf{a}_S(\mu_k)$  和  $\mathbf{a}_S(\nu_k)$  分别为  $S$  在  $x$  轴和  $y$  轴方向上对应第  $k$  个信源的导引矢量,  $\mathcal{N}_S$  为加性高斯白噪声. 进一步推导张量信号  $\mathcal{X}_S$  对应的四维协方差张量:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_S &= \sum_{k=1}^K \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}_S(\mu_k) \circ \mathbf{a}_S(\nu_k) \circ \mathbf{a}_S^*(\mu_k) \circ \mathbf{a}_S^*(\nu_k) + \tilde{\mathcal{N}}_S \\ &\in \mathbf{C}^{I_x \times I_y \times I_x \times I_y} \end{aligned} \quad (19)$$

将其实部与虚部在第五维度叠加,得到一个五维实值协方差张量  $\mathcal{Y} \in \mathbf{C}^{I_x \times I_y \times I_x \times I_y \times 2}$ , 将其作为神经网络输入. 不同于传统神经网络的矩阵运算逻辑(即矢量化输入信号统计量并将其与网络层权重矩阵进行线性内积加权获取状态空间),所提网络保持网络层输出状态空间的张量结构,将其同样表示为一个五维张量  $\mathcal{H}_1 \in \mathbf{R}^{I_{1,1} \times I_{1,2} \times I_{1,3} \times I_{1,4} \times I_{1,5}}$ , 并引入张量代数工具,构建从协方差张量  $\mathcal{Y}$  到状态空间张量  $\mathcal{H}_1$  的多重线性映射.

具体而言,通过建立 Tucker 分解模型与张量信号特征传播过程间的关联关系,将  $\mathcal{Y}$  至  $\mathcal{H}_1$  的转换表示为逆 Tucker 分解过程:

$$\mathcal{H}_1 = f_1(\mathcal{Y} \times_1 \mathbf{V}_{0,1} \times_2 \mathbf{V}_{0,2} \times_3 \mathbf{V}_{0,3} \times_4 \mathbf{V}_{0,4} \times_5 \mathbf{V}_{0,5}) \quad (20)$$

图 9 中,  $\mathbf{V}_{0,1}, \mathbf{V}_{0,2}, \mathbf{V}_{0,3}, \mathbf{V}_{0,4}, \mathbf{V}_{0,5}$  为逆 Tucker 因子矩阵,包含了对应第一个张量化网络层的待训练权重. 这些逆 Tucker 因子矩阵的大小仅与各自对应维度的大小呈线性正相关. 由此可知,传统神经网络的权重规模相对于输入信号统计量的规模呈线性正相关,而张量化神经网络将其转换为多重线性正相关,实现了待训练权重在多重低维空间的压缩. 基于该权重压缩原理,文献<sup>[146]</sup>提出张量化神经网络的高效前向传播与波达方向损失函数的反向传播方法.

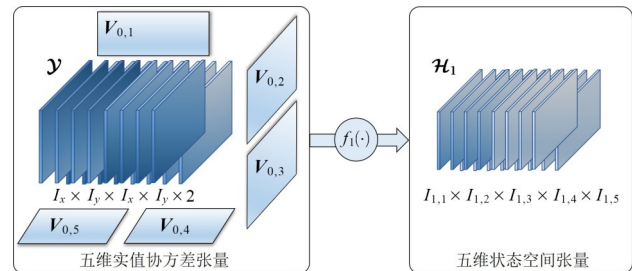
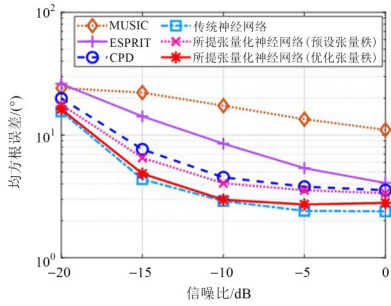


图9 协方差张量至状态空间张量的映射关系

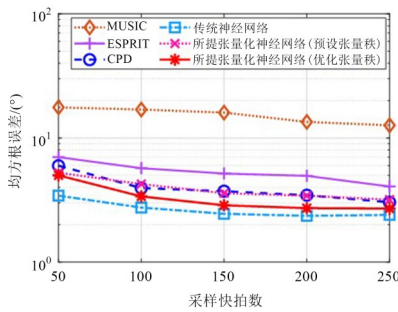
为了保障张量化神经网络的鲁棒输出性能,引入贝叶斯优化手段<sup>[146, 147]</sup>,对张量化网络层所对应的 Tucker 序列进行优化选取,可实现网络训练效率与输出性能的有效平衡. 构建 2 个具备相同拓扑的 3 层张量化神经网络与传统基于矩阵运算的神经网络,张量化神经网络仅仅需要耗费 24.65 min 即可完成训练,而传统神经网络却需要消耗 541.04 min 完成训练. 因此,张量化神经网络将训练效率提高了近 22 倍. 与此同时,其在训练过程中所占用的 GPU 内存为 1 009 MiB, 相比传统神经网络所需占用的 3 313 MiB 降低了约 2/3. 为了验证张量化神经网络的波达方向估计精度性能,将其与传统基于矩阵运算的神经网络<sup>[148]</sup>以及基于模型优化的波达方向估计方法进行对比. 这些方法包括基于矩阵信号处理的 MUSIC 和 ESPRIT 方法,以及基于张量信号处理的 CP 分解方法(Canonical Polyadic Decomposition, CPD)<sup>[45]</sup>.

如图 10 所示,在信噪比相对较低和采样快拍数量较小的情况下,传统基于模型优化的方法均表现出相对较差的波达方向估计精度;相比之下,基于神经网络的方法通过数据驱动模式,利用涵盖大量低信噪比信号统计量在内的训练集对神经网络进行训练和拟合,从而在这种条件下表现出相对优越的性能,展现出了该场景下的鲁棒性. 其中,张量化神经网络(预设张量秩)的估计性能与 CP 分解方法相近,但与传统基于矩阵运算的神经网络相比,其估计精度性能存在一定损失. 产生该现象的原因在于:张量化神经网络引入神经网络层的低秩张量分解映射,极大程度压缩了待训练

权重,以提高网络训练效率,因而适当牺牲了神经网络的输出性能.然而,通过进一步引入 Tucker 秩序列优化选取策略,张量化神经网络的估计性能与传统神经网络十分接近,不存在量级上的明显差距,且仍保持了较高的神经网络训练效率,充分体现了对系统性能与效率的有效平衡.



(a) 均方根误差随信噪比变化曲线



(b) 均方根误差随采样快拍数变化曲线

图 10 波达方向估计精度性能对比图

## 6.2 融合张量化神经网络与稀疏张量信号模型的双重稀疏处理

前述工作对神经网络层的特征映射关系进行张量化构建,将低秩张量分解的稀疏化能力引入神经网络架构设计,实现了网络层大规模待训练权重的稀疏化(即权重压缩),并验证了张量化神经网络的鲁棒阵列信号处理性能.在此基础上,Zheng 等人<sup>[149]</sup>融合稀疏张量信号模型与张量化神经网络架构,实现“模型+数据”双驱动的鲁棒稀疏阵列信号处理.

具体而言,文献[149]将虚拟域张量  $\mathcal{U} \in \mathbf{R}^{J_1 \times J_2 \times 2}$  作为卷积神经网络输入;进而,基于张量化神经网络的设计思想,对  $L$  个卷积核  $\{\mathbf{C}_l, l=1, 2, \dots, L\}$  进行低秩 CP 分解,从而压缩卷积核中的待训练权重,即:

$$\mathbf{C}_l = [\boldsymbol{\tau}; \bar{\mathbf{V}}_{l,1}, \bar{\mathbf{V}}_{l,2}, \bar{\mathbf{V}}_{l,3}, \bar{\mathbf{V}}_{l,4}] \quad (21)$$

其中,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{\bar{R}}$  为幅度系数矢量,  $\bar{\mathbf{V}}_{l,1}, \bar{\mathbf{V}}_{l,2}, \bar{\mathbf{V}}_{l,3}, \bar{\mathbf{V}}_{l,4}$  为对应卷积核 4 个维度的 CP 因子矩阵,且  $\bar{R}$  为 CP 秩.

基于卷积核的低秩 CP 分解形式,将传统基于矩阵

运算的虚拟域张量卷积处理转换为 3 个子卷积步骤.这些子卷积步骤利用压缩的 CP 因子矩阵,生成与传统卷积神经网络层相同规模的输出特征图,并且该卷积处理过程具备更低的计算复杂度.

针对上述面向虚拟域张量输入的张量分解卷积神经网络,文献[149]设计相应的输出损失函数和反向传播步骤,完成网络加速训练与超参数优化,得到一个基于双重稀疏化处理的鲁棒波达方向估计器.从仿真实验结果来看,传统卷积神经网络中的待训练权重数量为 22 816,权重占用内存为 0.16 MB,且训练过程所需浮点操作次数(Floating Point operation, FLOP)为  $4.114 \times 10^6$ ,而对于所提张量分解卷积神经网络,其待训练权重数量为 366,权重占用内存为 0.07 MB,且训练过程所需浮点操作次数为  $1.843 \times 10^6$ .由此可见,张量分解卷积神经网络具备更高的训练效率,训练过程耗费更少的系统资源.同时,该网络具备与传统卷积神经网络相近且优于 CP 分解方法的估计精度.

## 7 未来研究展望

本文所介绍的结构化稀疏阵列张量信号处理最新研究成果涵盖了稀疏信号建模和统计处理理论、数理优化算法以及特征学习策略.在理论与方法的深化研究层面以及相关技术的应用探索层面,该领域目前仍然存在许多值得深入思考的问题.根据本文所介绍的最新研究进展,下列开放性问题可作为未来研究工作的潜在方向.

(1) 在稀疏阵列波达方向估计方面,本文所介绍虚拟域张量处理算法对信号条件做出了相对理想的假设,例如高斯、窄带、远场、非相干等.然而,在实际应用场景中,复杂的信号传播环境可能带来非高斯、宽带、近场、相干等信号特性,从而造成一定程度的算法性能衰落.虽然张量化神经网络克服了一些非理想条件的影响,但仍没有涵盖全部情况.并且,从模型驱动的虚拟域张量处理角度来看,非理想张量统计模型优化机制的研究尚在起步阶段.在不依赖神经网络的前提下,如何设计更加鲁棒的虚拟域张量处理算法,在上述复杂电磁传播环境下实现稀疏阵列波达方向估计,仍然是一个值得关注的问题.

(2) 在稀疏阵列波束成形方面,本文所介绍稀疏张量波束成形器的本质是将最小方差无畸变响应准则推广至张量空间,并从克服结构化稀疏阵列空域混叠的角度出发设计张量权重的优化方法.然而,在最小方差无畸变响应的权重闭式解中,干扰加噪声协方差矩阵是由采样信号协方差矩阵来替代的,因此存在信号自相消问题,也即,随着信噪比增大,期望信号在协方差矩阵中的比重变大,导致输出信干噪比偏离最优性能.

针对该问题,干扰加噪声协方差矩阵的重建技术可消除期望信号分量的影响,保障输出性能在高信噪比区间仍然逼近理论性能.如何将该思想拓展至稀疏张量波束成形器的设计中,用于克服张量空间的信号自相消问题,同样是一个重要的研究方向.

(3) 在多维欠奈奎斯特采样信号的深度学习方面,本文所介绍的张量化神经网络以全连接网络、卷积网络为基础架构.随着深度学习的迅猛发展,更多类型的学习模式,例如强化学习、零次学习等,更有利于对非理想条件下的信号统计特征进行充分挖掘和利用.张量化神经网络核心理念,是引入张量代数工具对神经网络层的特征映射机理进行稀疏化设计,与上述深度学习模式并不冲突.为此,通过进一步融合所提张量化神经网络的权重压缩原理与前沿的深度学习方法,有望实现泛化性、鲁棒性更强的智能化稀疏张量信号处理.

(4) 本文所介绍的稀疏张量信号处理算法与网络旨在解决阵列信号处理领域的基础性问题,具备应用上的普适性和可迁移性.如图 11 所示,在 MIMO 系统中,基于虚拟域张量处理/张量成片缺失元素填充的波达方向估计方法能够实现高精度、高分辨率的信源测向<sup>[116,150]</sup>;在无线通信应用中,基于低秩/稀疏张量模型的波束成形策略能够在使用更少导频的同时保障相对理想的信号增强与抗干扰能力<sup>[151]</sup>;在此基础上,在通信感知一体化系统中,结构化稀疏阵列张量信号处理理论与方法能够赋予系统更强的环境参数估计和无线链路抗干扰能力.为此,未来研究可逐步发掘本文所述理论与方法在典型阵列信号处理应用中的作用.然而,在实际系统中部署这些方法时,仍然需要针对性地解决一些工程化视角的特有问题.例如,在通感感知一体化系统中,虽然本文所述方法提供了高性能信源辨识、参数估计和高效波束成形的基础框架,然而,从通信感知波形一体化设计、功率分配、感知辅助通信等角度出发,这些理论与方法仍需经历一定程度的升级改进,才能够发挥出更加优异的实用效果.

## 8 结论

本文面向多维阵列信号处理应用的发展趋势,介绍了结构化稀疏阵列张量信号处理这一重要研究方向:在张量空间中引入多维结构化稀疏感知理论,设计面向结构化稀疏阵列的张量信号处理理论与方法,以解决大规模高维信号的高经济性信息获取难题,充分保障系统的综合性能.本文从阵列信号处理领域所关注的几个关键性问题出发,涵盖了信号高阶统计处理理论基础、波达方向估计算法研究、波束成形算法研究以及非理想条件下的鲁棒处理方法研究.具体而言,本

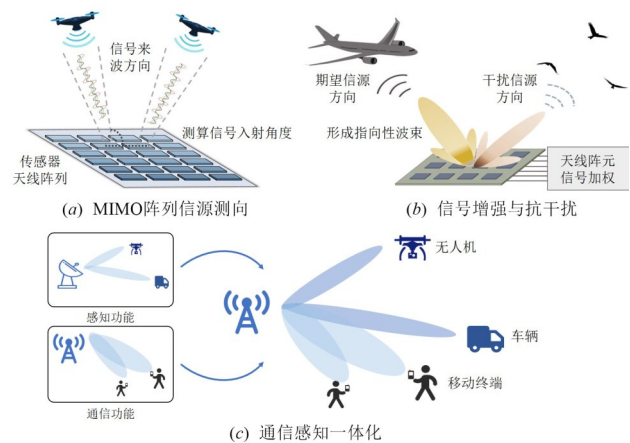


图 11 典型应用场景示意图

文介绍了高阶虚拟域张量统计处理的基础理论,保障了稀疏张量信号处理在多维虚拟域上的奈奎斯特匹配和自由度提升,实现了欠定条件下的信源参数估计;介绍了基于虚拟域张量填充的稀疏阵列波达方向估计算法,充分利用全部的非连续多维虚拟阵列信息实现高精度、超分辨信源测向;介绍了基于互质张量权重联合优化的稀疏阵列波束成形算法,以稀疏张量信号空域滤波为原理实现波束方向图上的虚峰消除和主瓣尖锐化,提高了多维稀疏阵列的信号增强与抗干扰性能;介绍了基于张量化稀疏神经网络的鲁棒阵列信号处理方法,为满足多维稀疏阵列信号处理的鲁棒性需求提供了数据驱动的解决思路.最后,本文对结构化稀疏阵列张量信号处理的未来研究方向进行展望,相关研究方向包括能够抵抗非理想信号条件的稀疏阵列波达方向估计算法、能够解决信号自相消问题的稀疏阵列波束成形算法、结合前沿深度学习模式的稀疏信号处理神经网络以及相关理论与方法在实际系统的应用机制等.

## 参考文献

- [1] TREES H L V. Detection, Estimation, and Modulation Theory, Optimum Array Processing[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2013.
- [2] LIU W, HAARDT M, GRECO M S, et al. Twenty-five years of sensor array and multichannel signal processing: A review of progress to date and potential research directions[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2017, 40(4): 80-91.
- [3] PESAVENTO M, TRINH-HOANG M, VIBERG M. Three more decades in array signal processing research: An optimization and structure exploitation perspective[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2023, 40(4): 92-106.
- [4] SHI X F, YANG C Q, XIE W G, et al. Anti-drone system with multiple surveillance technologies: Architecture, im-

- plementation, and challenges[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2018, 56(4): 68-74.
- [5] ZHOU L Y, NING X Z, YOU M Y, et al. Robust multi-UAV placement optimization for AOA-based cooperative localization[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2024, 36(9): 1-15.
- [6] DAS A. Real-valued sparse Bayesian learning for off-grid direction-of-arrival (DOA) estimation in ocean acoustics[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2021, 46(1): 172-182.
- [7] FAN D, GAO F F, LIU Y W, et al. Angle domain channel estimation in hybrid millimeter wave massive MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2018, 17(12): 8165-8179.
- [8] CHEN S, TAN R R, WANG Z M, et al. VoiceMap: Autonomous mapping of microphone array for voice localization[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2024, 11(2): 2909-2923.
- [9] KUTTY S, SEN D. Beamforming for millimeter wave communications: An inclusive survey[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2016, 18(2): 949-973.
- [10] PARK D, YANG E, AHN S, et al. Adaptive beamforming for low-angle target tracking under multipath interference[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50(4): 2564-2577.
- [11] ZHANG X, SUN S, TAO M X, et al. Multi-satellite cooperative networks: Joint hybrid beamforming and user scheduling design[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2024, 23(7): 7938-7952.
- [12] CHENG G Y, FANG Y, XU J, et al. Optimal coordinated transmit beamforming for networked integrated sensing and communications[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2024, 23(8): 8200-8214.
- [13] WU X H, ZHU W P. On efficient gridless methods for 2-D DOA estimation with uniform and sparse L-shaped arrays[J]. *Signal Processing*, 2022, 191: 108351.
- [14] HU Z, XU D, SU T. A fast wavenumber domain 3-D near-field imaging algorithm for cross MIMO array[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2024, 62: 5204109.
- [15] WANG X H, BENESTY J, CHEN J D, et al. Beamforming with cube microphone arrays via kronecker product decompositions[J]. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2021, 29: 1774-1784.
- [16] YOO I, SMITH D R. Design of conformal array of rectangular waveguide-fed metasurfaces[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2022, 70(7): 6060-6065.
- [17] MANOLAKIS D, SHAW G. Detection algorithms for hyperspectral imaging applications[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2002, 19(1): 29-34.
- [18] GAY S L, BENESTY J. *Acoustic Signal Processing for Telecommunication*[M]. Cham, Switzerland: Springer Science & Business Media, 2000.
- [19] LI D L, DU Z Z, WANG Q, et al. Recent advances in acoustic technology for aquaculture: A review[J]. *Reviews in Aquaculture*, 2024, 16(1): 357-381.
- [20] 陈涛, 李敏行, 郭立民, 等. 基于原子范数最小化的极化敏感阵列 DOA 估计[J]. *电子学报*, 2023, 51(4): 835-842.
- CHEN T, LI M X, GUO L M, et al. DOA estimation of polarization sensitive array based on atomic norm minimization[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2023, 51(4): 835-842. (in Chinese)
- [21] WEN F Q, SHI J P, HE J, et al. 2D-DOD and 2D-DOA estimation using sparse L-shaped EMVS-MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(2): 2077-2084.
- [22] LATHAUWER D L. *Signal processing based on multilinear algebra*[D]. Belgium: Universiteit Leuven, 1997.
- [23] COMON P, LUCIANI X, DE ALMEIDA A L F. Tensor decompositions, alternating least squares and other tales[J]. *Journal of Chemometrics*, 2009, 23(7/8): 393-405.
- [24] CICHOCKI A, MANDIC D, DE LATHAUWER L, et al. Tensor decompositions for signal processing applications: From two-way to multiway component analysis[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2015, 32(2): 145-163.
- [25] CHEN H Y, AHMAD F, VOROBYOV S, et al. Tensor decompositions in wireless communications and MIMO radar[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2021, 15(3): 438-453.
- [26] 国务院. “十四五”数字经济发展规划[R/OL]. (2022-12-21)[2023-01-04]. [https://www.gov.cn/zhengce/content/2022-01/12/content\\_5667817.htm](https://www.gov.cn/zhengce/content/2022-01/12/content_5667817.htm).
- The State Council. 14th five year plan for the development of digital economy[R/OL]. (2022-12-21)[2023-01-04]. [https://www.gov.cn/zhengce/content/2022-01/12/content\\_5667817.htm](https://www.gov.cn/zhengce/content/2022-01/12/content_5667817.htm). (in Chinese)
- [27] 中国移动研究院. 网络协作通感一体化技术白皮书[R/OL]. (2022-05-18)[2024-01-23]. <http://221.179.17.81/images/20231017/91411697522735844.pdf>.
- China Mobile Research Institute. White paper on network collaborative sensing integration technology[R/OL]. (2022-05-18)[2024-01-23]. <http://221.179.17.81/images/20231017/91411697522735844.pdf>. (in Chinese)
- [28] 中国移动研究院. 面向网络协作的智能超表面技

- 术白皮书[R/OL]. (2022-06-26) [2024-02-15]. <http://221.179.17.81/images/20231017/454169752283494.pdf>. China Mobile Research Institute. White paper on intelligent metasurface technology for network collaboration[R/OL]. (2022-06-26)[2024-02-15]. <http://221.179.17.81/images/20231017/454169752283494.pdf>. (in Chinese)
- [29] SIDIROPOULOS N D, DE LATHAUWER L, FU X, et al. Tensor decomposition for signal processing and machine learning[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(13): 3551-3582.
- [30] BENEDETTO J J, FERREIRA P J S G. *Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications*[M]. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2001.
- [31] BELLMAN R. *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*[M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1961.
- [32] AMIN M G. *Sparse Arrays for Radar, Sonar, and Communications*[M]. Hoboken, New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2024.
- [33] VAIDYANATHAN P P, PAL P. Sparse sensing with coprime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573-586.
- [34] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167-4181.
- [35] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Coprime sampling and the music algorithm[C]//2011 Digital Signal Processing and Signal Processing Education Meeting (DSP/SPE). Piscataway: IEEE, 2011: 289-294.
- [36] WANG M Z, NEHORAI A. Coarrays, music, and the cramer-Rao bound[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(4): 933-946.
- [37] HARSHMAN R. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an explanatory multimodal factor analysis[J]. *UCLA Working Pap. Phonet.*, 1970, 16: 1-84.
- [38] CARROLL J D, CHANG J J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition[J]. *Psychometrika*, 1970, 35(3): 283-319.
- [39] TUCKER L R. Implications of factor analysis of three-way matrices for measurement of change[J]. *Problems in Measuring Change*, 1963, 15: 122-137.
- [40] TUCKER L R. The extension of factor analysis to three-dimensional matrices[J]. *Contributions to Mathematical Psychology*, 1964: 110-119.
- [41] TUCKER L R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis[J]. *Psychometrika*, 1966, 31(3): 279-311.
- [42] LATHAUWER L, MOOR B, VANDEWALLE J. A multilinear singular value decomposition[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2000, 21(4): 1253-1278.
- [43] 李阳. 张量理论及其在阵列处理中的应用研究[D]. 上海: 复旦大学, 2014.
- LI Y. *Tensor Theory and Its Application in Array Processing*[D]. Shanghai: Fudan University, 2014. (in Chinese)
- [44] RAIMONDI F. *Tensor Array Processing*[D]. Grenoble: Université Grenoble-Alpes, 2017.
- [45] SIDIROPOULOS N D, BRO R, GIANNAKIS G B. Parallel factor analysis in sensor array processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(8): 2377-2388.
- [46] ZHENG H, ZHOU C W, SHI Z G, et al. Structured tensor reconstruction for coherent DOA estimation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2022, 29: 1634-1638.
- [47] MIRON S, LE BIHAN N, MARS J I. Vector-sensor MUSIC for polarized seismic sources localization[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005, 2005: 74-84.
- [48] SIDIROPOULOS N D, GIANNAKIS G B, BRO R. Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(3): 810-823.
- [49] SIDIROPOULOS N D, LIU X Q. Identifiability results for blind beamforming in incoherent multipath with small delay spread[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(1): 228-236.
- [50] ZHANG X R, LIU Z W, XU Y G, et al. Adaptive tensorial beamformer based on electromagnetic vector-sensor arrays with coherent interferences[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2015, 26(3): 803-821.
- [51] RIBEIRO L N, DE ALMEIDA A L F, MOTA J C M. Tensor beamforming for multilinear translation invariant arrays[C]//2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Piscataway: IEEE, 2016: 2966-2970.
- [52] RIBEIRO L N, DE ALMEIDA A L F, MOTA J C M. Separable linearly constrained minimum variance beamformers[J]. *Signal Processing*, 2019, 158: 15-25.
- [53] LIU L, XIE J, WANG L, et al. Robust tensor beamforming for polarization sensitive arrays[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2019, 30(2): 727-748.
- [54] XIA W, XIA G Q, LI J H. Collaborative beamforming

- via diffusion adaptation based on tensor over array networks[J]. *Digital Signal Processing*, 2020, 106: 102825.
- [55] IBRAHIM M S, MALHOTRA A, BELURI M, et al. Vandermonde constrained tensor decomposition for hybrid beamforming in multi-carrier MIMO systems[C]// *GLOBECOM 2022 - 2022 IEEE Global Communications Conference*. Piscataway: IEEE, 2022: 2474-2479.
- [56] DU J H, YU W J, CHEN Y Z, et al. Tensor-based angle estimation for bistatic MIMO radar systems with multislotted gain-phase error[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(6): 8411-8427.
- [57] XIE Q P, PAN X Y, ZHAO F. Joint 2D-DOD and 2D-DOA estimation in bistatic MIMO radar via tensor ring decomposition[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2023, 30: 1507-1511.
- [58] ZHENG H, ZHOU C W, SHI Z G, et al. SubTTD: DOA estimation via sub-nyquist tensor train decomposition[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2022, 29: 1978-1982.
- [59] WEN F Q, SHI J P, ZHANG Z J. Joint 2D-DOD, 2D-DOA, and polarization angles estimation for bistatic EMVS-MIMO radar via PARAFAC analysis[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2020, 69(2): 1626-1638.
- [60] WANG X P, GUO Y H, WEN F Q, et al. EMVS-MIMO radar with sparse rx geometry: Tensor modeling and 2-D direction finding[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(6): 8062-8075.
- [61] ARAÚJO G T, DE ALMEIDA A L F, BOYER R. Channel estimation for intelligent reflecting surface assisted MIMO systems: A tensor modeling approach[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2021, 15(3): 789-802.
- [62] LIN L N, ZHENG H, VOROBYOV S A, et al. Sensing-aided communication channel estimation with tensor-based moving target localization[C]// *ICASSP 2024 - 2024 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. Piscataway: IEEE, 2024: 8606-8610.
- [63] PANDEY D, LEIB H. A tensor based precoder and receiver for MIMO GFDM systems[C]// *ICC 2021 - IEEE International Conference on Communications*. IEEE, 2021: 1-6.
- [64] RIBEIRO Y S, ALMEIDA A L F, FEZAL E A, et al. Low-complexity joint active and passive beamforming design for IRS-assisted MIMO[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2024, 13(3): 607-611.
- [65] ZHANG R Y, CHENG L, WANG S, et al. Integrated sensing and communication with massive MIMO: A unified tensor approach for channel and target parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communica-*
- tions, 2024, 23(8): 8571-8587.
- [66] DAOUST O, NAYIR H, AZAM I, et al. Tensor-based space debris detection for satellite mega-constellations[EB/OL]. (2024-06-09)[2024-08-12]. <https://arxiv.org/abs/2311.11838v1>.
- [67] MOFFET A. Minimum-redundancy linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1968, 16(2): 172-175.
- [68] BLOOM G S, GOLOMB S W. Applications of numbered undirected graphs[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1977, 65(4): 562-570.
- [69] 周成伟. 互质阵列信号处理算法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2018.
- ZHOU C W. Research on signal processing algorithm of coprime array[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2018. (in Chinese)
- [70] 周成伟, 郑航, 顾宇杰, 等. 互质阵列信号处理研究进展: 波达方向估计与自适应波束成形[J]. *雷达学报*, 2019, 8(5): 558-577.
- ZHOU C W, ZHENG H, GU Y J, et al. Research progress on coprime array signal processing: Direction-of-Arrival estimation and adaptive beamforming[J]. *Journal of Radars*, 2019, 8(5): 558-577. (in Chinese)
- [71] ZHOU C W, GU Y J, SHI Z G, et al. Structured nyquist correlation reconstruction for DOA estimation with sparse arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2023, 71: 1849-1862.
- [72] ZHOU C W, SHI Z G, GU Y J, et al. DECOM: DOA estimation with combined MUSIC for coprime array[C]// *2013 International Conference on Wireless Communications and Signal Processing*. Piscataway: IEEE, 2013: 1-5.
- [73] QIN S, ZHANG Y D, AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(6): 1377-1390.
- [74] LIU C L, VAIDYANATHAN P P. Super nested arrays: Linear sparse arrays with reduced mutual coupling: Part I: Fundamentals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(15): 3997-4012.
- [75] LAI X, ZHANG X F, HAN S, et al. Multi-layer filled coprime arrays for DOA estimation with extended hole-free coarray[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2024, 73(2): 2621-2632.
- [76] RAJAMÄKI R, KOIVUNEN V. Sparse symmetric linear arrays with low redundancy and a contiguous sum co-array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 1697-1712.

- [77] ZHANG Y D, AMIN M G, HIMED B. Sparsity-based DOA estimation using co-prime arrays[C]//2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway: IEEE, 2013: 3967-3971.
- [78] TAN Z, ELDAR Y C, NEHORAI A. Direction of arrival estimation using co-prime arrays: A super resolution viewpoint[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(21): 5565-5576.
- [79] ZHOU C W, GU Y J, FAN X, et al. Direction-of-arrival estimation for coprime array via virtual array interpolation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(22): 5956-5971.
- [80] ZHOU C W, ZHOU J F. Direction-of-arrival estimation with coarray ESPRIT for coprime array[J]. Sensors, 2017, 17(8): 1779.
- [81] LIU C L, VAIDYANATHAN P P, PAL P. Coprime coarray interpolation for DOA estimation via nuclear norm minimization[C]//2016 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). Piscataway: IEEE, 2016: 2639-2642.
- [82] HOSSEINI S M, SEBT M A. Array interpolation using covariance matrix completion of minimum-size virtual array[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(7): 1063-1067.
- [83] ZHOU C W, GU Y J, SHI Z G, et al. Off-grid direction-of-arrival estimation using coprime array interpolation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2018, 25(11): 1710-1714.
- [84] QIN G D, AMIN M G, ZHANG Y D. DOA estimation exploiting sparse array motions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(11): 3013-3027.
- [85] MARTINO G, IODICE A. Passive beamforming with coprime arrays[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2017, 11(6): 964-971.
- [86] CHAVALI V, WAGE K E, BUCK J R. Multiplicative and min processing of experimental passive sonar data from thinned arrays[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2018, 144(6): 3262.
- [87] ZHOU C W, GU Y J, HE S B, et al. A robust and efficient algorithm for coprime array adaptive beamforming[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2018, 67(2): 1099-1112.
- [88] GU Y J, LESHEM A. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(7): 3881-3885.
- [89] GU Y J, GOODMAN N A, HONG S H, et al. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix sparse reconstruction[J]. Signal Processing, 2014, 96: 375-381.
- [90] GU Y J, ZHOU C W, GOODMAN N A, et al. Coprime array adaptive beamforming based on compressive sensing virtual array signal[C]//2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Piscataway: IEEE, 2016: 2981-2985.
- [91] 陈力恒, 马晓川, 李璇, 等. 结合压缩感知模型的稀疏阵列波束形成方法[J]. 信号处理, 2020, 36(4): 475-485.
- CHEN L H, MA X C, LI X, et al. Sparse array beamforming method combined with compressed sensing model[J]. Journal of Signal Processing, 2020, 36(4): 475-485. (in Chinese)
- [92] ZHOU C W, SHI Z G, GU Y J. Coprime array adaptive beamforming with enhanced degrees-of-freedom capability[C]//2017 IEEE Radar Conference (RadarConf). Piscataway: IEEE, 2017: 1357-1361.
- [93] ZHENG Z, YANG T, WANG W Q, et al. Robust adaptive beamforming via coprime coarray interpolation[J]. Signal Processing, 2020, 169: 107382.
- [94] CHENG Y, ZHANG X Y, LIU T P, et al. Coprime array-adaptive beamforming via atomic-norm-based sparse recovery[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2021, 15(11): 1494-1507.
- [95] TIAN X, WANG B, TAO K, et al. An improved synthesis of sparse planar arrays using density-weighted method and chaos sparrow search algorithm[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2023, 71(5): 4339-4349.
- [96] LI C H, GAN L, LING C. 3D coprime arrays in sparse sensing [C]//ICASSP 2019 - 2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2019: 4200-4204.
- [97] FU M C, ZHENG Z, WANG W Q. Two-dimensional direction finding based on cylindrical nested conformal array[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, 59(5): 6853-6862.
- [98] YANG S Y, WANG M, LI P, et al. Compressive hyperspectral imaging via sparse tensor and nonlinear compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 53(11): 5943-5957.
- [99] KANATSOU LIS C I, FU X, SIDIROPOULOS N D, et al. Tensor completion from regular sub-nyquist samples[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 68: 1-16.
- [100] QIAN F, ZHANG C C, FENG L T, et al. Tubal-sampling: Bridging tensor and matrix completion in 3-D

- seismic data reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2021, 59(1): 854-870.
- [101] WANG X D, WU Y K, ZHUANG D Y, et al. Low-rank Hankel tensor completion for traffic speed estimation[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2023, 24(5): 4862-4871.
- [102] HUANG L T, ALMEIDA A L F, SO H C. Target estimation in bistatic MIMO radar via tensor completion[J]. *Signal Processing*, 2016, 120: 654-659.
- [103] WANG H W, FANG J, DUAN H P, et al. Compressive wideband spectrum sensing and signal recovery with unknown multipath channels[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2022, 21(7): 5305-5316.
- [104] LIU L, GU J F, WEI P. Joint DOA and frequency estimation with sub-Nyquist sampling[J]. *Signal Processing*, 2019, 154: 87-96.
- [105] WANG F Y, FANG J, DUAN H P, et al. Phased-array-based sub-nyquist sampling for joint wideband spectrum sensing and direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(23): 6110-6123.
- [106] JIANG S Y, FU N, WEI Z L, et al. Sub-nyquist spectrum sensing and DOA estimation with space-time trilinear modeling[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 6504613.
- [107] QIU W, ZHOU J X, FU Q. Tensor representation for three-dimensional radar target imaging with sparsely sampled data[J]. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2019, 6: 263-275.
- [108] LIU Z, ZHOU F, WU J J, et al. A generalized and accelerated approach of ambiguity-free imaging for sub-nyquist SAR[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2023, 61: 5214118.
- [109] NA S Q, MISHRA K V, LIU Y M, et al. TenDSuR: Tensor-based 4D sub-nyquist radar[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(2): 237-241.
- [110] MAMISTVALOV A, ELDAR Y C. Deep unfolded recovery of sub-nyquist sampled ultrasound images[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2021, 68(12): 3484-3496.
- [111] 张思乾, 于美婷, 匡纲要. 一种低秩张量约束的下视稀疏线阵 SAR 三维成像算法[J]. *电子与信息学报*, 2021, 43(6): 1667-1675.
- ZHANG S Q, YU M T, KUANG G Y. A three-dimensional imaging algorithm of downward-looking sparse linear array SAR based on low-rank tensor[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021, 43(6): 1667-1675. (in Chinese)
- [112] HAN K Y, NEHORAI A. Nested vector-sensor array processing via tensor modeling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(10): 2542-2553.
- [113] LIU C L, VAIDYANATHAN P P. Tensor MUSIC in multidimensional sparse arrays[C]//2015 49th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Piscataway: IEEE, 2015: 1783-1787.
- [114] ZHENG H, SHI Z G, ZHOU C W, et al. Coupled coarray tensor CPD for DOA estimation with coprime L-shaped array[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2021, 28: 1545-1549.
- [115] SHI J P, WEN F Q, LIU T P. Nested MIMO radar: Coarrays, tensor modeling, and angle estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2021, 57(1): 573-585.
- [116] LUO S, WANG Y X, LI J Y, et al. Coarray tensor-based angle estimation for bistatic MIMO radar with a dilated moving receive array[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(6): 8995-9009.
- [117] XU F, ZHENG H, VOROBYOV S A. Tensor-based 2-D DOA estimation for L-shaped nested array[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024, 60(1): 604-618.
- [118] ZHENG H, ZHOU C W, WANG Y, et al. Sample fourth-order cumulant tensor denoising for DOA estimation with coprime L-shaped array[C]//2021 55th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers. Piscataway: IEEE, 2021: 1668-1672.
- [119] ZHENG H, ZHOU C W, SHI Z G, et al. Coarray tensor direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2023, 71: 1128-1142.
- [120] GANDY S, RECHT B, YAMADA I. Tensor completion and low-n-rank tensor recovery via convex optimization[J]. *Inverse Problems*, 2011, 27(2): 025010.
- [121] KONG W C, ZHANG F, QIN W J, et al. Low-tubal-rank tensor completion via local and nonlocal knowledge[J]. *Information Sciences*, 2024, 657: 120002.
- [122] LIU J, MUSIALSKI P, WONKA P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, 35(1): 208-220.
- [123] YOKOTA T, EREM B, GULER S, et al. Missing slice recovery for tensors using a low-rank model in embedded space[C]//2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE,

- 2018: 8251-8259.
- [124] SEDIGHIN F, CICHOCKI A, YOKOTA T, et al. Matrix and tensor completion in multiway delay embedded space using tensor train, with application to signal reconstruction[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 27: 810-814.
- [125] ZHENG H, SHI Z G, ZHOU C W, et al. Coarray tensor completion for DOA estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(5): 5472-5486.
- [126] ZHENG H, ZHOU C W, DE ALMEIDA A L F, et al. Doa estimation via coarray tensor completion with missing slices[C]//ICASSP 2022 - 2022 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Piscataway: IEEE, 2022: 5053-5057.
- [127] RECHT B, FAZEL M, PARRILO P A. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization[J]. *SIAM Review*, 2010, 52(3): 471-501.
- [128] LIU C L, VAIDYANATHAN P P. Cramér-Rao bounds for coprime and other sparse arrays, which find more sources than sensors[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 61: 43-61.
- [129] SHI J P, HU G P, ZHANG X F, et al. Sparsity-based two-dimensional DOA estimation for coprime array: From sum-difference coarray viewpoint[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(21): 5591-5604.
- [130] SHI Z G, ZHOU C W, GU Y J, et al. Source estimation using coprime array: A sparse reconstruction perspective[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2017, 17(3): 755-765.
- [131] HE J, ZHANG Z H, GU C, et al. Cumulant-based 2-D direction estimation using an acoustic vector sensor array[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(2): 956-971.
- [132] ZHENG H, ZHOU C W, SHI Z G, et al. Sub-nyquist tensor beamformer: A coprimality constrained design[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2023, 71: 4163-4177.
- [133] ZHENG H, ZHOU C W, SHI Z G, et al. Joint coprime weights optimization for sub-nyquist tensor beamforming[C]//2022 IEEE Radar Conference (RadarConf22). Piscataway: IEEE, 2022: 1-6.
- [134] 郑航, 周成伟, 王勇, 等. EMVS 互质面阵张量波束成形[J]. *信号处理*, 2024, 40(2): 250-262.
- ZHENG H, ZHOU C W, WANG Y, et al. Tensor beamforming for EMVS coprime planar array[J]. *Journal of Signal Processing*, 2024, 40(2): 250-262. (in Chinese)
- [135] CAPON J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1969, 57(8): 1408-1418.
- [136] SHAGHAGHI M, VOROBYOV S A. Subspace leakage analysis and improved DOA estimation with small sample size[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(12): 3251-3265.
- [137] ZHANG Z Y, SHI Z G, SHAO C Q, et al. Ziv-zakai bound for 2D-DOAs estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2024, 72: 2483-2497.
- [138] HOANG D T, LEE K. Deep learning-aided coherent direction-of-arrival estimation with the FTMR algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 1118-1130.
- [139] PAPAGEORGIOU G K, SELLATHURAI M, EL-DAR Y C. Deep networks for direction-of-arrival estimation in low SNR[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 3714-3729.
- [140] LIU Z M, ZHANG C W, YU P S. Direction-of-arrival estimation based on deep neural networks with robustness to array imperfections[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2018, 66(12): 7315-7327.
- [141] VARANASI V, GUPTA H, HEGDE R M. A deep learning framework for robust DOA estimation using spherical harmonic decomposition[J]. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2020, 28: 1248-1259.
- [142] NGUYEN N T, MA M Y, LAVI O, et al. Deep unfolding hybrid beamforming designs for THz massive MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2023, 71: 3788-3804.
- [143] HE C Y, ZHOU C W, SHI Z G, et al. Deep INCM reconstruction for adaptive beamforming[C]//ICASSP 2024 - 2024 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Piscataway: IEEE, 2024: 13491-13495.
- [144] 曾焕强, 胡浩麟, 林向伟, 等. 深度神经网络压缩与加速综述[J]. *信号处理*, 2022, 38(1): 183-194.
- ZENG H Q, HU H L, LIN X W, et al. Deep neural network compression and acceleration: An overview[J]. *Journal of Signal Processing*, 2022, 38(1): 183-194. (in Chinese)
- [145] ZHENG H, ZHOU C W, VOROBYOV S A, et al. Tensorized neural layer decomposition for 2-D DOA estimation[C]//ICASSP 2023 - 2023 IEEE International Con-

- ference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Piscataway: IEEE, 2023: 1-5.
- [146] ZHENG H, SHI Z G, ZHOU C W, et al. Deep tensor 2-D DOA estimation for URA[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2024, 72: 4065-4080.
- [147] SNOEK J, LAROCHELLE H, ADAMS R P. Practical Bayesian optimization of machine learning algorithms[EB/OL]. (2012-06-13)[2012-12-03]. <https://arxiv.org/abs/1206.2944v2>.
- [148] FONSECA N J G, COUDYSER M, LAURIN J J, et al. On the design of a compact neural network-based DOA estimation system[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(2): 357-366.
- [149] ZHENG H, ZHOU C W, VOROBOYV S A, et al. Decomposed CNN for sub-nyquist tensor-based 2-D DOA estimation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2023, 30: 708-712.
- [150] CHEN J L, ZHANG Y Y, YAO C H, et al. Hermitian toeplitz covariance tensor completion with missing slices for angle estimation in bistatic MIMO radars[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2024, 60(6): 8401-8418.
- [151] SOKAL B, GOMES P R B, ALMEIDA A L F, et al. Reducing the control overhead of intelligent reconfigurable surfaces via a tensor-based low-rank factorization approach[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2023, 22(10): 6578-6593.

### 作者简介



**郑 航** 男, 1998 年生, 广东汕头人. 2019 年 6 月在同济大学获得工学学士学位, 2024 年 6 月在浙江大学信息与电子工程学院获得博士学位. 主要研究方向为阵列信号处理、张量信号处理、智能信号处理.

E-mail: hangzheng@zju.edu.cn



**王 勇** 男, 1974 年生, 河南郑县人. 2002 年 3 月在浙江大学信息与电子工程学系获得博士学位, 现为浙江大学信息与电子工程学院副教授. 主要研究方向为雷达信号识别技术、超宽带应用技术.

E-mail: wangy@zju.edu.cn



**史治国** 男, 1978 年生, 江苏扬州人. 2006 年 3 月在浙江大学信息与电子工程学系获得博士学位, 现为浙江大学求是特聘教授、博士生导师、教育部长江学者特聘教授. 主要研究方向为阵列信号处理、张量信号处理、人工智能信号处理、物联网. 中国电子学会会员编号: E190012854S.

E-mail: shizg@zju.edu.cn



**周成伟** 男, 1990 年生, 浙江临海人. 2018 年 6 月在浙江大学信息与电子工程学院获得博士学位, 现为浙江大学信息与电子工程学院研究员、博士生导师. 主要研究方向为阵列信号处理、张量信号处理、无人机智能监测技术.

E-mail: zhouchw@zju.edu.cn